Aula 6

Esboçando gráficos: primeiros passos

Existe o processo simples de esboçar-se o gráfico de uma função contínua ligando-se um número finito de pontos $P_1 = (x_1, f(x_1)), \ldots, P_n = (x_n, f(x_n))$, de seu gráfico, no plano xy. Mas este procedimento nem sempre revela as nuances do gráfico.

Nesta aula veremos como as derivadas são ferramentas auxiliares no esboço desses gráficos, provendo informações qualitativas que não podem ser descobertas através de uma simples plotagem de pontos.

6.1 Crescimento e decrescimento

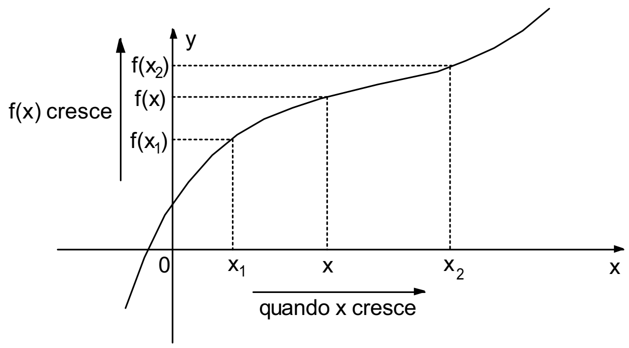


Figura 6.1. f é crescente em um certo intervalo I.

Definição 6.1

1. $\boxed{\text{\textit{A função $f(x)$ é crescente no intervalo I ($I \subset \mathbb{R}$) se, nesse intervalo, quando x aumenta de valor, $f(x)$ também aumenta de valor.}}}$

   Em outras palavras, f é crescente se vale a implicação

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

2. *A função $f(x)$ é decrescente no intervalo I ($I \subset \mathbb{R}$) se, nesse intervalo, quando x cresce em valor, $f(x)$ decresce.*

   Em outras palavras, f é decrescente se vale a implicação

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

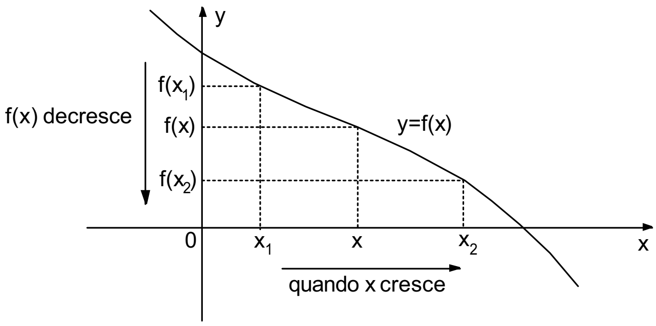


Figura 6.2. f é decrescente em um certo intervalo I.

Teorema 6.1 *Suponhamos que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e tem derivada nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$.*

1. *Se $f'(x) > 0$ nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$, então f é crescente no intervalo $[a, b]$.*

2. *Se $f'(x) < 0$ nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$, então f é decrescente no intervalo $[a, b]$.*

Não iremos demonstrar o teorema 6.1 aqui. Iremos apenas ilustrar geometricamente o fato de que esse teorema é bastante plausível.

Na figura 6.3, em que f é crescente em um certo intervalo $[a, b]$, todas as retas tangentes ao gráfico de f, no intervalo $]a, b[$, são inclinadas para a direita. Daí os coeficientes angulares dessas retas são todos positivos. Como o coeficiente angular em um ponto $P = (c, f(c))$ é $f'(c)$, temos $f'(c) > 0$ para cada $c \in]a, b[$.

O comportamento de $f'(x)$ nos extremos do intervalo não precisa ser levado em consideração. Na figura 6.3, temos $f'(a) = 0$ e $f'(b) = +\infty$ (a reta tangente em $(b, f(b))$ é vertical, $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = +\infty$).

Na figura 6.4, em que f é decrescente em um certo intervalo $[a, b]$, todas as retas tangentes ao gráfico de f, no intervalo $]a, b[$, são inclinadas para a esquerda. Daí os

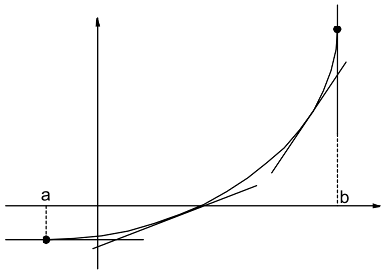


Figura 6.3. Os coeficientes angulares, das retas tangentes, sempre positivos, é indicativo de função crescente.

coeficientes angulares dessas retas são todos negativos. Como o coeficiente angular em um ponto $P = (c, f(c))$ é $f'(c)$, temos $f'(c) < 0$ para cada $c \in]a, b[$.

O comportamento de $f'(x)$ nos extremos do intervalo não precisa ser levado em consideração. Na figura 6.4, temos $f'(a) = 0$ e $f'(b) = -\infty$ (a reta tangente em $(b, f(b))$ é vertical, $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = -\infty$).

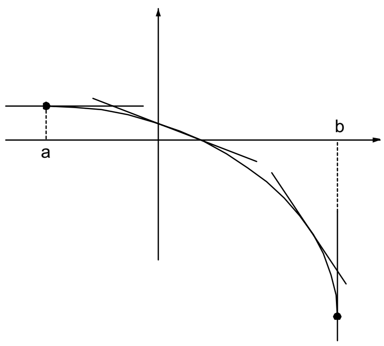


Figura 6.4. Os coeficientes angulares, das retas tangentes, sempre negativos, é indicativo de função decrescente.

Definição 6.2 (Pontos de máximo e pontos de mínimo locais)

Um ponto x_0, no domínio da função f, é um ponto de mínimo local de f *se existe um intervalo $[a, b]$ contido no domínio de f, com $a < x_0 < b$, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em $[a, b]$.*
Isto ocorre, por exemplo, no caso em que existem intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ contidos em $D(f)$ tais que f é decrescente em $[a, x_0]$ e é crescente em $[x_0, b]$. Veja figura 6.5.

Se, ao contrário, $f(x) \leq f(x_0)$, para todo x em $[a, b]$, x_0 é um ponto de máximo local de f.
Isto se dá, por exemplo, quando existem intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ contidos em $D(f)$ tais que f é crescente em $[a, x_0]$ e decrescente em $[x_0, b]$. Veja figura 6.6.

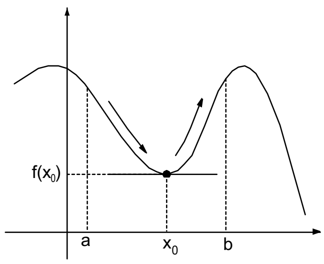


Figura 6.5. x_0 é um ponto de mínimo local. Note que $f'(x_0) = 0$ se f tem derivada em x_0 pois, em um ponto de mínimo local, a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.

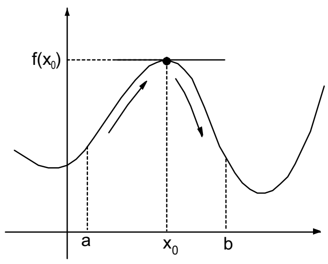


Figura 6.6. x_0 é um ponto de máximo local. Note que $f'(x_0) = 0$ se f tem derivada em x_0 pois, em um ponto de máximo local, a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.

6.2 Derivadas de ordem superior e concavidades do gráfico

Sendo f uma função, definimos f' como sendo a função derivada de f, e f'' (lê-se "f duas linhas") como sendo a derivada da derivada de f, ou seja

$$\boxed{f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}}$$

É costume denotar também, sendo $y = f(x)$,

$$\boxed{f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

A notação $\frac{d^2y}{dx^2}$ é lida "de dois y de x dois".

Analogamente, definem-se

$$\boxed{f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

e para cada $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Definição 6.3

1. *O gráfico de* $y = f(x)$ *é* côncavo para cima *(ou* tem concavidade voltada para cima*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano acima de cada reta tangente a ela nesse intervalo (veja figura 6.7).*

   Dizemos que o intervalo I *é aberto quando* I *tem uma das formas:* $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$.

2. *O gráfico de* $y = f(x)$ *é* côncavo para baixo *(ou* tem concavidade voltada para baixo*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela (veja figura 6.8).*

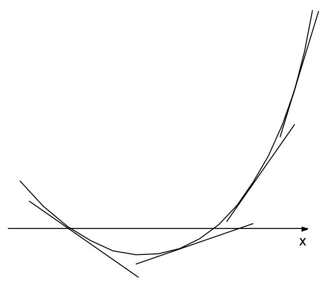


Figura 6.7. Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para cima, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Isto quer dizer que, exceto pelos pontos de tangência, a curva $y = f(x)$ (para $x \in I$) está sempre no semi-plano acima de cada reta tangente a ela. Neste caso, à medida em que x cresce, cresce também o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(x, f(x))$, na figura passando de negativo a positivo.

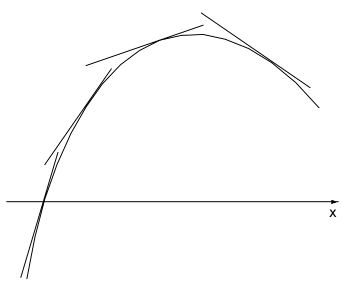


Figura 6.8. Neste gráfico a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Isto quer dizer que, exceto pelos pontos de tangência, a curva $y = f(x)$ (para $x \in I$) está sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela. Neste caso, à medida em que x cresce, decresce o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(x, f(x))$, na figura passando de positivo a negativo.

Teorema 6.2 *Sendo $f(x)$ derivável duas vezes nos pontos do intervalo aberto I,*

1. *se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então a curva $y = f(x)$ é côncava para cima em I;*
2. *se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo em I.*

Não demonstraremos o teorema 6.2 aqui, mas faremos a seguinte observação.

Se $f''(x) > 0$ nos pontos $x \in I$ então, pelo teorema 6.1, a função $f'(x)$ é crescente em I. Assim, $f'(x)$ cresce à medida em que x cresce, como na figura 6.7. Desse modo, temos a curva $y = f(x)$ côncava para cima em I.

Se $f''(x) < 0$ nos pontos $x \in I$ então, pelo teorema 6.1, a função $f'(x)$ é decrescente em I. Assim, $f'(x)$ decresce à medida em que x cresce, como na figura 6.8. Desse modo, temos a curva $y = f(x)$ côncava para baixo em I.

Definição 6.4 (Pontos de inflexão da curva $y = f(x)$)
O ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é um ponto de inflexão *da curva $y = f(x)$ se esta curva é côncava para cima (ou para baixo) em um intervalo $]\alpha, x_0[$ (α real ou $-\infty$) e côncava para baixo (respectivamente, para cima) em um intervalo $]x_0, \beta[$ (β real ou $+\infty$). Isto quer dizer que o ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é um ponto de mudança do sentido de concavidade do gráfico de f. Veja figura 6.9.*

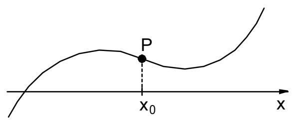


Figura 6.9. P é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Tendo em vista o resultado do teorema 6.2, se $f''(x)$ é contínua, os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $(x, f(x))$ para os quais $f''(x) = 0$.

Exemplo 6.1 *Consideremos a função $f(x) = x^2 - 3x$.*

Temos $f'(x) = 2x - 3$ e $f''(x) = 2$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3/2$$

Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $x \geq 3/2$ (ou seja, no intervalo $[3/2, +\infty[$).

Por outro lado, $f(x)$ é decrescente no intervalo $]-\infty, 3/2]$.

Desse modo, em $x_0 = 3/2$, temos um ponto mínimo local, que acontece ser o ponto de mínimo de $f(x)$. Note que $f'(3/2) = 0$, pois se x_0 é um ponto de máximo ou mínimo local, de uma função derivável, a reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

Como $f''(x) = 2 > 0$ para todo x, o gráfico de f tem a concavidade sempre voltada para cima.

Com os elementos deduzidos acima, notando que $f(3/2) = -9/4$, e que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^2 - 3x$ na figura 6.10.

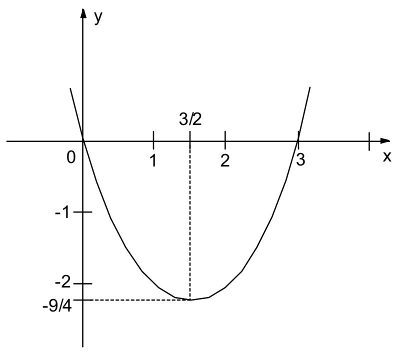


Figura 6.10.

Aqui levamos em conta também que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplo 6.2 *Consideremos a função* $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Temos $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) = 3x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 2$$

Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e também é crescente no intervalo $[2, +\infty[$, sendo decrescente no intervalo $[0, 2]$. Desse modo 0 é ponto de máximo local de f e 2 é ponto de mínimo local. Repare que 0 e 2 são raízes de $f'(x)$. Assim, nos pontos $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(2, f(2)) = (2, -4)$ as retas tangentes ao gráfico de f são horizontais.

Analisando a variação de sinal de $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Assim, a curva $y = x^3 - 3x^2$, gráfico de f, tem concavidade voltada para cima quando $x > 1$, e para baixo quando $x < 1$. O ponto $P = (1, f(1)) = (1, -2)$ é ponto de inflexão do gráfico.

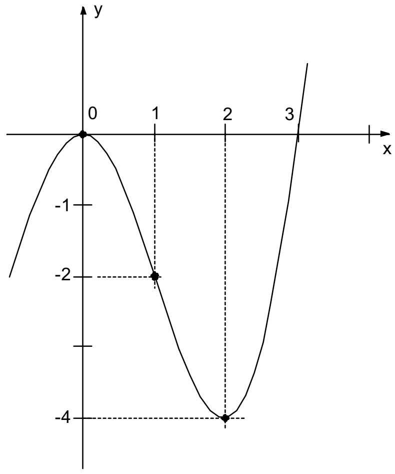


Figura 6.11.

Com os elementos deduzidos acima, notando que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^3 - 3x^2$ na figura 6.11.

Aqui levamos em conta também que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

6.3 Problemas

Cada uma das funções $f(x)$ dadas abaixo tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$. Para cada uma delas,

(a) Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente;

(b) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos;

(c) Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo;

(d) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$;

(e) Calcule as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), quando isto não for difícil;

(f) Calcule os limites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(g) A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de f.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$

5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

6. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

6.3.1 Respostas e sugestões

1. (a) $f'(x) = -2x+2$. $f \nearrow$ (é crescente) em $]-\infty, 1]$, e $\searrow$ (é decrescente) em $[1, +\infty[$. (b) 1 é ponto de máximo local de f. $f(1) = 2$. (c) $f''(x) = -2$. A curva $y = f(x)$ é sempre côncava para baixo. (d) A curva $y = f(x)$ não tem pontos de inflexão. (e) As raízes de f são $1 - \sqrt{2} \approx -0,6$ e $1 + \sqrt{2} \approx 2,4$. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 1]$, $\searrow$ em $[1, 3]$, e $\nearrow$ novamente em $[3, +\infty[$. (b) 1 é ponto de máximo local de f, 3 é ponto de mínimo local. $f(1) = 4$, $f(3) = 0$. (c) $f''(x) = -6x - 12$. A curva $y = f(x)$ é $\frown$ (côncava para baixo) em $]-\infty, 2[$ e $\smile$ (côncava para cima) em $]2, +\infty[$. (d) $P = (2, 2)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f. (e) As raízes de f são 0 e 3. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. (a) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12(x^3 - x^2 - 2x)$. $f \searrow$ em $]-\infty, -1]$, $\nearrow$ em $[1, 0]$, $\searrow$ em $[0, 2]$ e $\nearrow$ em $[2, +\infty[$. (b) -1 e 2 são pontos de mínimo locais de f, 0 é ponto de máximo local. $f(-1) = 3$, $f(0) = 8$, $f(2) = -24$. (c) $f''(x) = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2)$. A curva $y = f(x)$ é $\smile$ em $]-\infty, x_1[$ e em $]x_2, +\infty[$, e é $\frown$ em $]x_1, x_2[$, sendo $x_1 = (1 - \sqrt{7})/3 \approx -0,5$ e $x_2 = (1 + \sqrt{7})/2 \approx 1,2$. (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. (e) As raízes de f não podem ser determinadas com facilidade. Graficamente, poderemos notar que f tem uma raiz entre 0 e 1, e uma outra entre 2 e 3. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. (a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 0]$, e $\searrow$ em $[0, +\infty[$. (b) 0 é ponto de máximo local de f. $f(0) = 3$. (c) $f''(x) = \dfrac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$. A curva $y = f(x)$ é $\smile$ em $]-\infty, -\sqrt{3}/3[$ e em $]\sqrt{3}/3, +\infty[$, e é $\frown$ em $]-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3[$. (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(-\sqrt{3}/3, 5/2)$ e $(\sqrt{3}/3, 5/2)$, sendo $\sqrt{3}/3 \approx 0,6$. (e) f não tem raízes: $f(x) > 0$ para todo x real. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

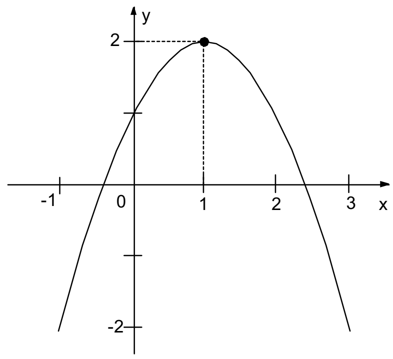
5. (a) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 1]$, $\searrow$ em $[1, 2]$, e $\nearrow$ em $[2, +\infty[$. (b) 1 é ponto de máximo local de f, 2 é ponto de mínimo local. $f(1) = -1$, $f(2) = -2$. (c) $f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3)$. A curva $y = f(x)$ é $\smile$ em $]3/2, +\infty[$ e é $\frown$ em $]-\infty, 3/2[$. (d) O ponto de inflexão do gráfico é $(3/2, -3/2)$. (e) As raízes

de f não podem ser determinadas com facilidade. Graficamente, poderemos notar que f tem uma raiz entre 2 e 3 (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

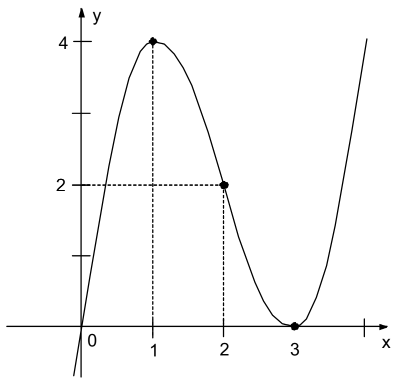
6. (a) $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. $f \searrow$ em $]-\infty,-1]$, $\nearrow$ em $[-1,1]$, e $\searrow$ em $[1,+\infty[$. (b) -1 é ponto de mínimo local de f, 1 é ponto de máximo local. $f(-1)=2$, $f(1)=2$. (c) $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. A curva $y=f(x)$ é $\frown$ em $]-\infty,-\sqrt{3}[$, $\smile$ em $]-\sqrt{3},0[$, $\frown$ em $]0,\sqrt{3}[$ e $\smile$ em $\sqrt{3},+\infty[$. (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $(0,0)$ e $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ (e) A única raíz de f é 0. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Esboços dos gráficos:

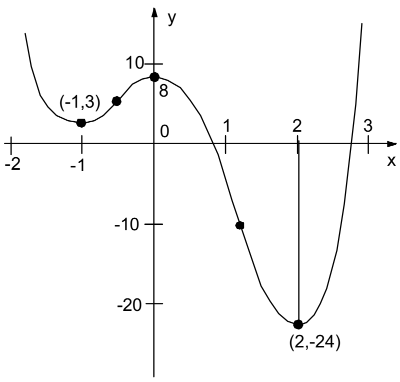
1.



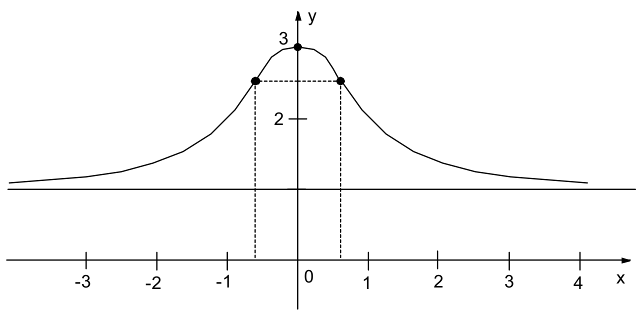
2.



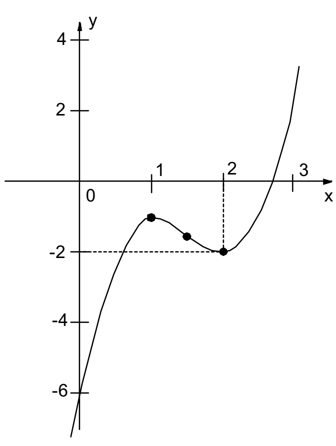
3.



4.



5.



6.