Aula 7

Esboçando gráficos: zeros no denominador e retas assíntotas

Na aula 6, estivemos concentrados no estudo de funções contínuas em $\mathbb{R}$, com derivadas primeira e segunda também contínuas.

Nesta aula, estaremos voltando nossa atenção para *funções algébricas*. Uma função é algébrica quando sua fórmula $f(x)$ envolve todas ou algumas das quatro *operações racionais* $+$, $-$, $\times$ e $\div$, e eventualmente extrações de raízes n-ésimas ($\sqrt[n]{\ }$).

Na verdade, as funções da aula 6 são também funções algébricas.

As funções algébricas que estaremos estudando agora, porém, tem uma ou várias das seguintes peculiaridades:

(i) o denominador na fórmula de $f(x)$ se anula para um ou mais valores de x;

(ii) para alguns valores de x, f é contínua em x, mas f' não o é;

(iii) para alguns valores de x, f e f' são contínuas em x, mas f'' não o é;

(iv) quando $x \to +\infty$ (ou quando $x \to -\infty$), a curva $y = f(x)$ aproxima-se indefinidamente de uma reta (chamada *reta assíntota da curva* $y = f(x)$). (Os gráficos das funções dos problemas 4 e 6, página 55, tem assíntotas horizontais).

A apresentação desses novos aspectos no esboço de gráficos de funções será feita através de exemplos. Vamos a eles.

Exemplo 7.1 *Esboçar o gráfico de f, sendo $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, ou seja, esboçar a curva $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.*

Detectando assíntotas verticais

Repare que $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Agora, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$, e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

Esses limites laterais, sendo infinitos, detectam que a reta vertical de equação $x = 2$ é uma *assíntota vertical do gráfico de* f. Mais precisamente, esses limites laterais detectam que

quando $x \to 2^+$*, os pontos correspondentes, no gráfico, "sobem" no plano* xy*, aproximando-se indefinidamente dessa reta. Quando* $x \to 2^-$*, os pontos do gráfico "descem" no plano* xy*, também aproximando-se indefinidamente da reta assíntota.*

Crescimento e decrescimento

Temos

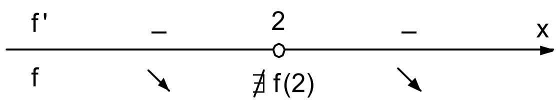
$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x-2) - (x-2)'(2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2}$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Assim sendo $f'(x) < 0$ para todo x em $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Esta função f não pode ter máximos nem mínimos locais.

Temos o seguinte diagrama de sinais de f' e intervalos de crescimento e decrescimento de f:

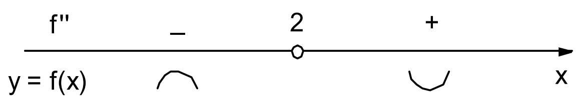


Concavidades do gráfico

Temos

$$f''(x) = \left[\frac{-5}{(x-2)^2}\right]' = [-5(x-2)^{-2}]' = 10(x-2)^{-3}$$

Temos o seguinte diagrama de sinais de f'' e direções de concavidades do gráfico de f:



Como $2 \notin D(f)$, o gráfico não tem ponto de inflexão.

Comportamento no infinito (outras assíntotas)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2$$

Também $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Assim, a reta $y = 2$ é uma *assíntota horizontal à direita e à esquerda do gráfico de* f.

Esboço do gráfico de f, com base nos aspectos estudados acima: figura 7.1

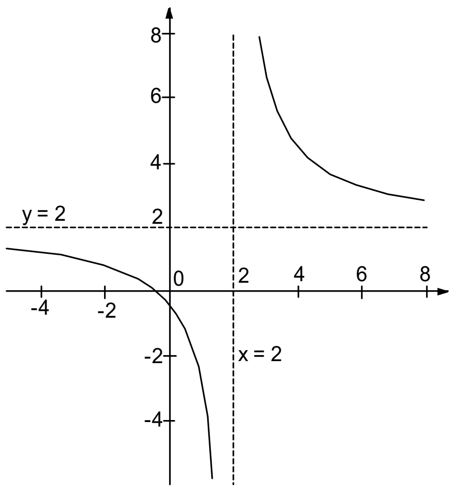


Figura 7.1.

Exemplo 7.2 *Esboçar o gráfico de* $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Detectando assíntotas verticais

Repare que $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Agora, $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, e $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

A reta vertical de equação $x = 1$ é uma *assíntota vertical do gráfico da curva* $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Quando x está próximo de 1, pontos da curva "sobem" no plano xy, aproximando-se da assíntota, à direita, e "descem", aproximando-se da assíntota, à esquerda.

Crescimento e decrescimento. Máximos e mínimos locais

Temos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 2x + 2)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 2x + 2)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Portanto

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Assim, $y' = 0$ para $x = 0$ e para $x = 2$.

As raízes do numerador de y' são 0 e 2, enquanto que 1 é raiz do denominador. Além disso, em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$ e $]2, +\infty[$, a derivada y' mantém-se positiva ou negativa.

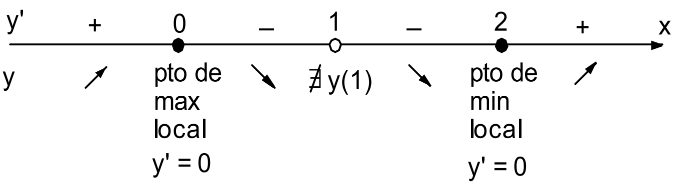
Este fato nos é garantido por um teorema da Análise Matemática, chamado *teorema do anulamento*, ou *teorema de Bolzano*, que enuncia

Teorema de Bolzano *Se uma função contínua f não tem raízes em um intervalo, então $f(x)$ mantém-se positiva ou negativa em todos os pontos x do intervalo.*

Com base nessas observações, para analisar a variação de sinais de y' podemos recorrer ao seguinte argumento:

Quando x é muito grande, $y' > 0$. Assim, $y' > 0$ no intervalo $x > 2$. Quando x passa por 2, y' troca de sinal. Portanto, $y' < 0$ para $1 < x < 2$. Quando x passa por 1, y' não muda de sinal porque o termo $x - 1$ aparece elevado ao quadrado no denominador. Assim sendo, temos ainda $y' < 0$ no intervalo $0 < x < 1$. Ao passar por 0, y' troca de sinal novamente e temos então $y' > 0$ quando $x < 0$.

Temos então o seguinte diagrama de sinais de y' e intervalos de crescimento e decrescimento de y:



Temos então que y cresce em $]-\infty, 0]$, decresce em $[0, 1[$ e em $]1, 2]$, e cresce em $[2, +\infty[$.

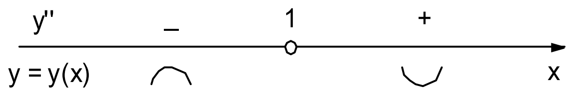
Concavidades e inflexões do gráfico

Temos

$$y'' = \left[\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right]' = \frac{(x^2-2x)'(x-1)^2 - [(x-1)^2]'(x^2-2x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$



Temos o seguinte diagrama de sinais de y'' e direções de concavidades da curva $y = y(x)$:

Como não há y para $x = 1$, o gráfico não tem ponto de inflexão.

Comportamento no infinito (outras assíntotas)

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Temos ainda $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

Assim, a curva não tem *assíntota horizontal*.

Esboço do gráfico de f, com base nos elementos coletados acima: figura 7.2

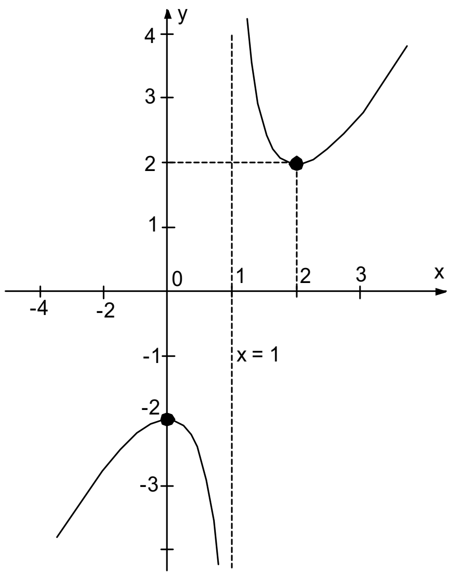


Figura 7.2.

Assíntotas inclinadas!

Há algo mais que pode ser destacado no gráfico esboçado na figura 7.2: a existência, até aqui insuspeita, de uma *assíntota inclinada* (também chamada assíntota oblíqua).

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, para certos números reais a e b, temos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f à direita, uma *assíntota inclinada* se $a \neq 0$.

Neste caso, à medida em que x cresce, tornando-se muito grande, com valores positivos, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de $ax+b$.

Por razões análogas, a reta $y = ax+b$ é uma assíntota do gráfico de f, à esquerda, quando $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$.

Como determinar os coeficientes a e b?

Para determinar a, note que se $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{[f(x)-(ax+b)]+(ax+b)}{x}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{x}\\
&= \frac{0}{+\infty} + a = a
\end{aligned}$$

Assim, se a reta $y = ax+b$ é uma assíntota do gráfico de f então

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a$$

Para determinar b, basta agora calcularmos

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$$

No caso da curva que estamos estudando,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+2}{x^2-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1
\end{aligned}$$

e assim obtemos $a = 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1} - ax\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1} - x\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+2-x(x-1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x+2}{x-1} = -1
\end{aligned}$$

e assim obtemos $b = -1$.

Portanto, a reta $y = x-1$ é assíntota inclinada da curva.

Com base nos elementos coletados acima, incluindo a informação adicional sobre a assíntota inclinada, temos um novo esboço, mais preciso, da curva da figura 7.2, na figura 7.3.

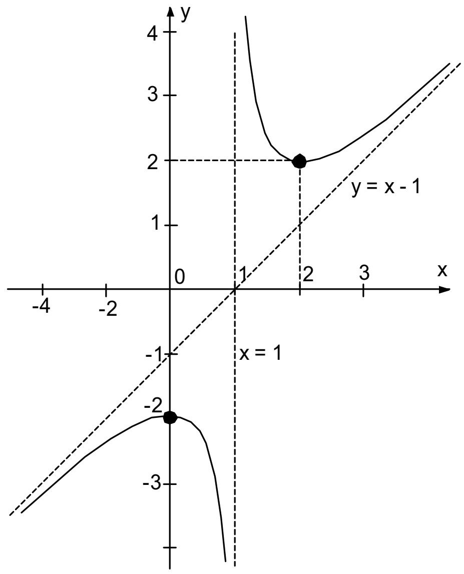


Figura 7.3.

Exemplo 7.3 *Esboçar o gráfico de* $y = f(x) = (x+2)\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

O gráfico desta função f não apresenta assíntotas verticais, visto que a função f é contínua em todo o conjunto $\mathbb{R}$, isto é, em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Crescimento e decrescimento. Máximos e mínimos locais

Temos $y = (x+2)\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

Para calcular y', primeiro faremos

$$y = (x+2)(x-3)^{2/3}$$

Desse modo, pela regra da derivada de um produto,

$$y' = (x-3)^{2/3} + (x+2)\cdot\frac{2}{3}(x-3)^{-1/3}$$

Agora, para facilitar os cálculos, colocamos em evidência a fração $1/3$, e também a potência de $x-3$ de menor expoente:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot[3(x-3)^1 + 2(x+2)] \\ &= \frac{1}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot(5x-5) \\ &= \frac{5}{3}(x-3)^{-1/3}\cdot(x-1) \end{aligned}$$

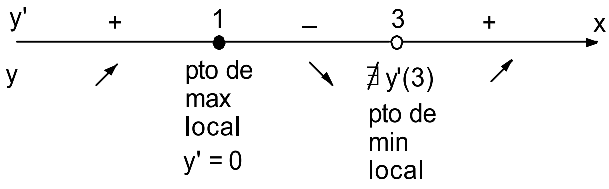
Para termos clareza quanto aos sinais de y', reescrevemos y' usando radicais:

$$y' = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x-3}}$$

Note que a função f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, mas $f'(x)$ não se define quando $x = 3$.

As raízes do numerador e do denominador de y' são 1 e 3, sendo $y' = 0$ para $x = 1$.

Temos então o seguinte diagrama de sinais de y', e correspondentes intervalos de crescimento e decrescimento de f:



Temos então que f cresce em $]-\infty, 1]$, decresce em $[1, 3]$ e cresce novamente em $[1, +\infty[$. Aqui temos algo novo: f não tem derivada em $x_0 = 3$, mas $x_0 = 3$ é um ponto de mínimo local de f ! Como é a geometria do gráfico de f nas proximidades do ponto $x_0 = 3$? A resposta a esta questão virá com o estudo das concavidades do gráfico.

Concavidades e inflexões da curva

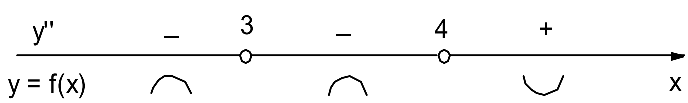
Temos

$$\begin{aligned} y'' &= \left[\frac{5}{3}(x-3)^{-1/3} \cdot (x-1)\right]' \\ &= \frac{-5}{9}(x-3)^{-4/3}(x-1) + \frac{5}{3}(x-3)^{-1/3} \\ &= \frac{5}{9}(x-3)^{-4/3}[-(x-1) + 3(x-3)^1] \\ &= \frac{5}{9}(x-3)^{-4/3}(2x-8) \\ &= \frac{10}{9}(x-3)^{-4/3}(x-4) \end{aligned}$$

Assim,

$$f''(x) = \frac{10(x-4)}{9\sqrt[3]{(x-3)^4}}$$

Temos o seguinte diagrama de sinais de y'' e direções de concavidades do gráfico de f (resista à tentação de simplificar o radical $\sqrt[3]{(\quad)^4}$) :



O ponto $(4, f(4)) = (4, 6)$ é ponto de inflexão do gráfico.

Deixamos ao leitor a verificação de que o gráfico de f não tem retas assíntotas no infinito, pois $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Com base nos elementos coletados acima, temos um esboço da curva $y = f(x)$ na figura 7.4.

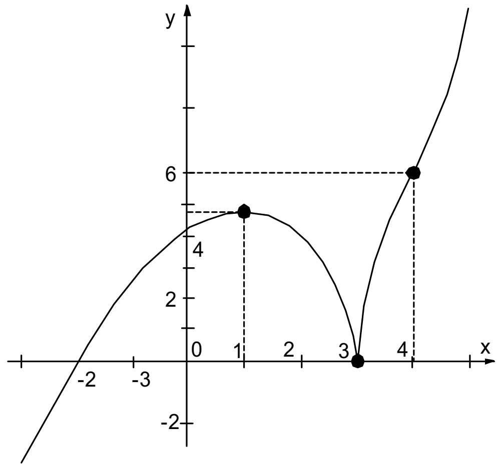


Figura 7.4.

Neste esboço levamos em conta as aproximações $f(1) = 3\sqrt[3]{4} \approx 3 \cdot (1,6) = 4,8$, $f(0) = 2\sqrt[3]{9} \approx 2 \cdot (2,1) = 4,2$. Levamos em conta também que -2 e 3 são raízes de f (isto é, soluções de $f(x) = 0$).

Note que, antes e pouco depois de $x_0 = 3$, o gráfico tem concavidade voltada para baixo. Como f decresce em $[1, 3]$ e cresce em $[3, +\infty[$, temos, no gráfico de f, a formação de um "bico" agudo no ponto $(3, 0)$. Isto explica a inexistência de derivada em x_0. Não há reta tangente ao gráfico no ponto $(3, 0)$.

Observação 7.1 (O gráfico de f em pontos com derivadas infinitas)

Quando f é contínua em um intervalo contendo um ponto x_0 no seu interior, e f' é contínua em todos os pontos desse intervalo, exceto em x_0 e, além disso, $\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, temos uma reta vertical tangente ao gráfico de f em $P = (x_0, f(x_0))$. Estes dois casos são ilustrados na figura 7.5.

Quando $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty$, o gráfico forma um bico em $P = (x_0, f(x_0))$, tal como no ponto $(3, 0)$ da figura 7.4 ou no ponto P do gráfico à esquerda na figura 7.6. Quando $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = +\infty$, temos novamente um bico em P, só que agora apontando para cima, tal como no gráfico à direita na figura 7.6.

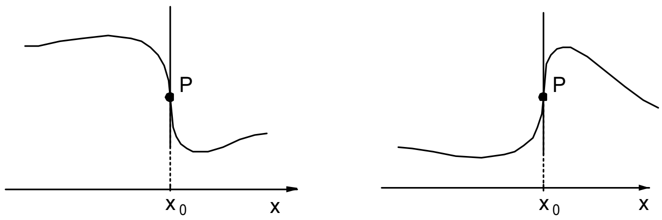


Figura 7.5. À esquerda, $\lim_{x\to x_0} f'(x) = -\infty$. À direita, $\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty$

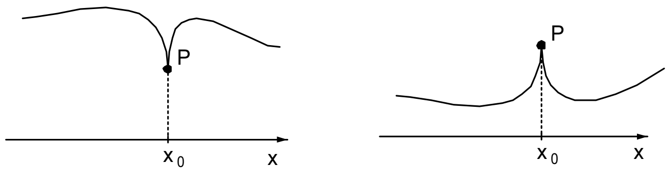


Figura 7.6. À esquerda, $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty$, e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty$. À direita, $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = +\infty$

7.1 Problemas

Um importante teorema sobre funções contínuas, chamado *teorema de Bolzano* ou *teorema do anulamento*, enuncia o seguinte:

Teorema de Bolzano *Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (ou com $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$), então f tem uma raiz no intervalo $]a, b[$, isto é, existe x_0, $a < x_0 < b$, tal que $f(x_0) = 0$.*

Na página 60, desta aula, temos uma versão equivalente desse teorema.

Este teorema está ilustrado nos gráficos das funções (contínuas) dos problemas 3 e 5, página 56, da aula 6. A função do problema 3 satisfaz $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, e também $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$, o que lhe garante a existência de uma raiz entre 0 e 1, e de uma outra entre 2 e 3. Já a função do problema 5 possui uma raiz no intervalo $]2, 3[$.

1. Usando o *teorema do anulamento*, enunciado acima, mostre que
   (a) $f(x) = x^5 + x + 1$ possui uma raiz no intervalo $]-1, 0[$.
   (b) A equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ tem três raízes reais distintas entre si.
2. Mostre que todo polinômio $p(x)$, de grau ímpar, com coeficientes reais, tem ao menos uma raiz real.
   Sugestão. Considere os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$.

Para cada uma das funções dadas abaixo,

(a) Determine o domínio da função e, com base nisto, verifique se a curva $y = f(x)$ tem retas assíntotas verticais.

(b) Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente;

(c) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos;

(d) Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo;

(e) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$;

(f) Calcule as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), quando isto não for difícil;

(g) Verifique se a curva $y = f(x)$ tem retas assíntotas horizontais ou inclinadas.

(h) A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de f.

(i) Indique os pontos do gráfico onde a reta tangente é vertical e os pontos onde inexiste tal reta tangente (procure por pontos onde f é contínua, mas f' não é definida).

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$

6. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

8. $f(x) = 2x - 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$

7.1.1 Respostas e sugestões

Para os problemas de 3 a 8, daremos como resposta apenas as derivadas primeira e segunda, e o esboço do gráfico.

3. $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 2}{(x^2 - 2)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{2x^3 + 12x}{(x^2 - 2)^3}$

4. $f'(x) = \dfrac{2x + x^2}{(1 + x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1 + x)^3}$

5. $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

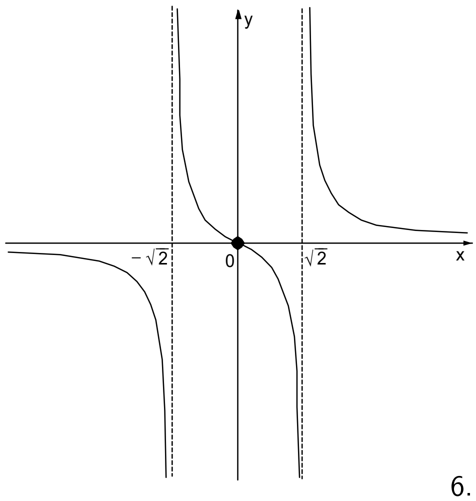
6. $f'(x) = \dfrac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, $f''(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$

7. $f'(x) = \dfrac{4x-x^2}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}}$, $f''(x) = \dfrac{-8x^2}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^5}}$

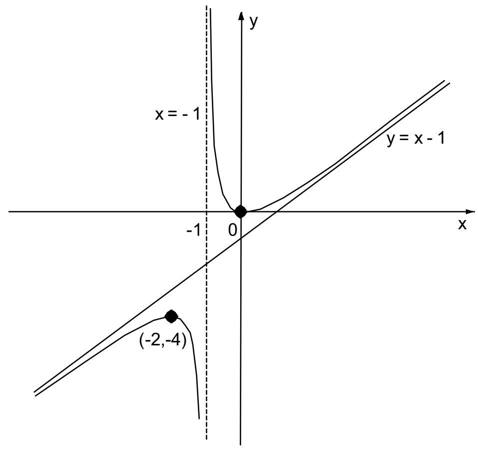
8. $f'(x) = 2 - \dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$, $f''(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^5}}$

Esboços dos gráficos:

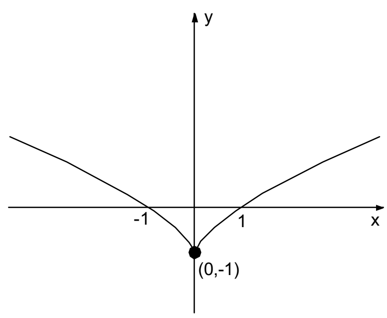
3.



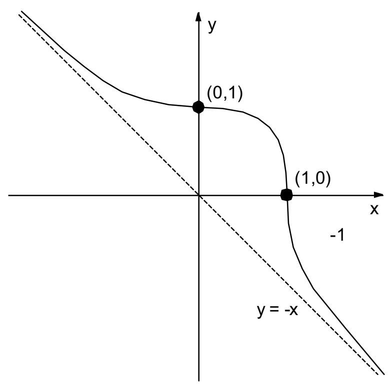
4.



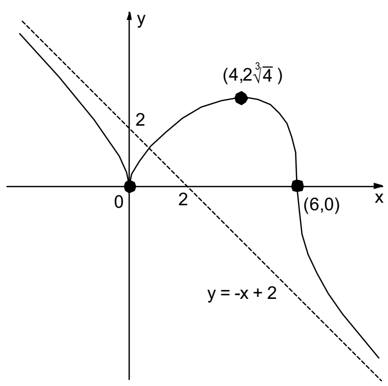
5.



6.

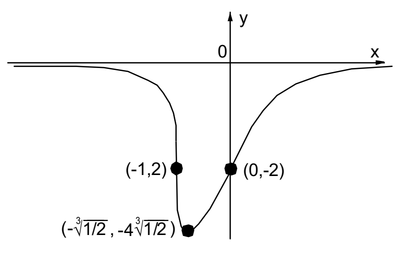


7.



Dado numérico: $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$

8.



Dado numérico: $\sqrt[3]{1/2} \approx 0{,}8$