

Aula 8

Máximos e mínimos

Nesta aula estaremos explorando procedimentos estratégicos para determinar os *valores extremos* de uma função f , ou seja, o *valor máximo* e o *valor mínimo* de uma função f , em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sem recorrer a um esboço do gráfico de f nesse intervalo.

Um teorema da Análise Matemática, conhecido na literatura como *Teorema de Weierstrass*, nos garante:

(Teorema de Weierstrass) *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ (sendo a e b números reais), então existem pontos x_0 e x_1 em $[a, b]$ tais que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de $f(x)$, para x em $[a, b]$.*

Os pontos x_0 e x_1 aos quais se refere o teorema de Weierstrass são chamados *ponto de mínimo de f* e *ponto de máximo de f* , respectivamente. O teorema é ilustrado na figura 8.1.

Elucidando os conceitos aqui apresentados, sendo $I \subset D(f)$ um intervalo (limitado ou ilimitado), dizemos que

1. $f(x_0)$ é o valor mínimo de f (ou de $f(x)$) em I se

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

2. $f(x_1)$ é o valor máximo de f (ou de $f(x)$) em I se

$$f(x_1) \geq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

Por exemplo, no intervalo $I = [-1, +\infty[$, a função dada por $f(x) = x^2$ tem um ponto de mínimo $x_0 = 0$, sendo $f(0) = 0$ seu valor mínimo, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in I$. Nesse intervalo, f não tem valor máximo pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

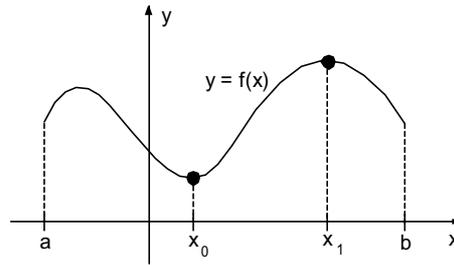


Figura 8.1. A função f , contínua em $[a, b]$, tem x_0 e x_1 como seus pontos de *mínimo* e de *máximo*, respectivamente.

8.1 Estratégias para determinar máximos e mínimos de uma função contínua, em um intervalo

Como determinar os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$, onde uma função contínua f atinge seus valores máximo e mínimo? Uma solução deste problema seria esboçar o gráfico de f nesse intervalo, conforme as estratégias desenvolvidas nas aulas 6 e 7, e então localizar os valores extremos de f . Mas como determinar os valores máximo e mínimo de f , no intervalo $[a, b]$, sem recorrer ao estudo do esboço de seu gráfico? É isto que trataremos de responder.

Recapitulando um conceito introduzido na aula 6, diremos que x_0 é um *ponto de mínimo local* de f se existe um intervalo aberto $I \subset D(f)$, com $x_0 \in I$, tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I$$

E neste caso, $f(x_0)$ é um *valor mínimo local* de f .

Analogamente, diremos que x_1 é um *ponto de máximo local* de f , e que $f(x_1)$ é um *valor máximo local* de f , se existe um intervalo aberto $I \subset D(f)$, com $x_1 \in I$, tal que

$$f(x_1) \geq f(x), \text{ para todo } x \text{ em } I$$

Teorema 8.1 Se f tem derivada em um intervalo aberto I , e se $x_0 \in I$ é ponto de mínimo local de f , então $f'(x_0) = 0$. Se $x_1 \in I$ é ponto de máximo local de f , então $f'(x_1) = 0$.

Demonstração. Mostraremos que $f'(x_0) = 0$, usando a definição de derivada.

Tome $\Delta x \neq 0$, com $x_0 + \Delta x \in I$.

Então $f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$ e daí $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$.

Se $\Delta x > 0$, temos $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$, e se $\Delta x < 0$, temos $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$.

Temos $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Neste caso, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Mas $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$ e $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$.

Logo, $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, e portanto $f'(x_0) = 0$.

Deixamos ao leitor a dedução do resultado para pontos de máximo locais. ■

Observemos que se x_0 é um ponto de mínimo (absoluto) de f , então x_0 tem uma das seguintes características:

- (i) x_0 é também um ponto de mínimo local de f , e f tem derivada em x_0 . Neste caso, conforme o teorema 8.1, $f'(x_0) = 0$.
- (ii) x_0 é um ponto de mínimo local de f , mas f não tem derivada no ponto x_0 .
- (iii) x_0 é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, $x_0 = a$ ou $x_0 = b$.

Os casos (i), (ii) e (iii) são ilustrados na figura 8.2.

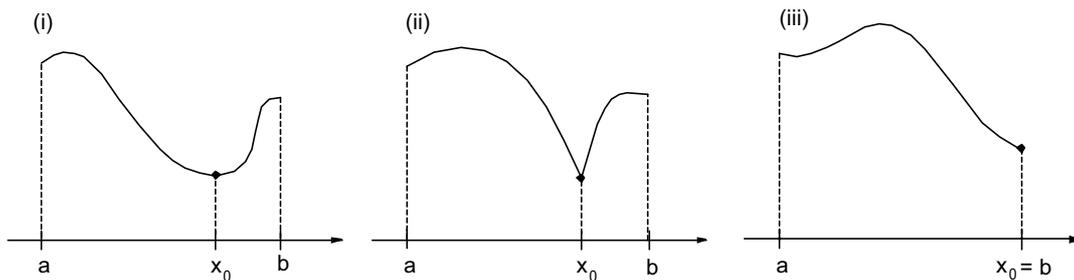


Figura 8.2. Pontos de mínimo típicos.

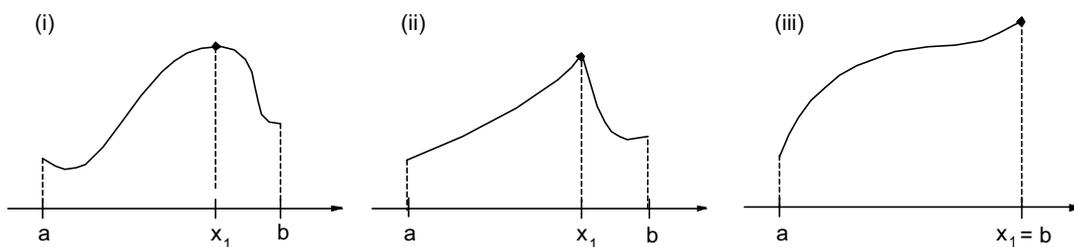


Figura 8.3. Pontos de máximo típicos.

Analogamente, se x_1 é um ponto de máximo de f , então x_1 tem uma das três seguintes características:

- (i) x_1 é também um ponto de máximo local de f , e f tem derivada em x_1 . Neste caso, conforme o teorema 8.1, $f'(x_1) = 0$.
- (ii) x_1 é um ponto de máximo local de f , mas f não tem derivada no ponto x_1 .
- (iii) x_1 é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, $x_1 = a$ ou $x_1 = b$.

Esses casos são ilustrados na figura 8.3.

Um número real x é chamado um *ponto crítico de f* quando $f'(x) = 0$ ou quando f é contínua em x mas não existe $f'(x)$.

Assim, um ponto de máximo ou de mínimo de uma função f , em um intervalo $[a, b]$, é um ponto crítico de f ou uma das extremidades do intervalo.

Exemplo 8.1 Determinar os valores máximo e mínimo de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, no intervalo $[-3, 3]$.

Solução. A função f é contínua no intervalo $[-3, 3]$. Temos $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$. As soluções de $f'(x) = 0$ são $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Estes são os pontos críticos de f no intervalo $[-3, 3]$. Calculando os valores de f nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:

$$f(x_1) = f(-2) = 20, f(x_2) = f(1) = -7, f(-3) = 9 \text{ e } f(3) = 45.$$

Assim sendo, por comparação dos valores obtidos, o ponto de mínimo de f , para $-3 \leq x \leq 3$, é $x_{\min} = x_2 = 1$, sendo $f(1) = -7$ o valor mínimo de f nesse intervalo. Já o ponto de máximo de f , para $-3 \leq x \leq 3$, é $x_{\max} = 3$, sendo $f(3) = 45$ o valor máximo de f nesse intervalo. Como ilustração, temos um esboço do gráfico de f , no intervalo $[-3, 3]$, na figura 8.4.

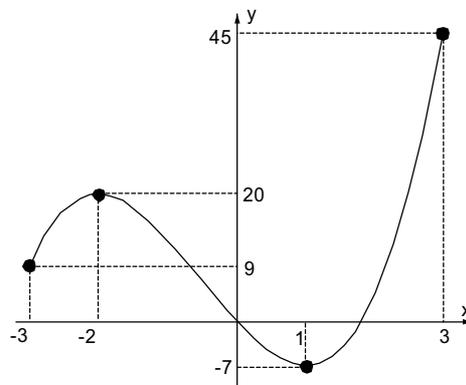


Figura 8.4.

Exemplo 8.2 Determinar os valores máximo e mínimo de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x - 2)^2$, no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Solução. A função f é contínua no intervalo $[-1, 1]$. $f'(x) = \frac{4(2x^2 - 5x + 2)}{3\sqrt[3]{x}}$.

Temos $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 2$ ou $x = 1/2$.

Agora, 0 também é um ponto crítico de f , uma vez que f é contínua no ponto 0, mas não se define $f'(0)$.

Assim, Como $2 \notin [-1, 1]$, os pontos críticos de f são $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 0$.

Calculando os valores de f nos extremos do intervalo e nos pontos críticos, temos:

$$f(x_1) = f(1/2) = \frac{9}{4\sqrt[3]{4}} \approx 1,4 \quad (\sqrt[3]{4} \approx 1,6), \quad f(0) = 0, \quad f(-1) = 9 \text{ e } f(1) = 1.$$

Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo de f , enquanto que $f(-1) = 9$ é seu valor máximo.

Questão Como determinar os pontos de um intervalo $I \subset D(f)$, nos quais f atinge seus valores máximo e mínimo, se I é um intervalo aberto ou ilimitado, e f é contínua em I ?

Neste caso, a resposta é:

Sendo f contínua em um intervalo I , comparamos os valores de f nos extremos que efetivamente pertencem ao intervalo com os valores de f nos seus pontos críticos desse intervalo. Comparamos ainda esses valores com os limites de $f(x)$ quando x tende a extremos que não pertencem ao intervalo.

Como reforço estratégico na pesquisa de máximos e mínimos locais, temos também o seguinte teorema.

Teorema 8.2 Sendo f uma função contínua, com f' também contínua, em um intervalo aberto I , e x_0 um ponto de I ,

1. se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f ;
2. se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f ;

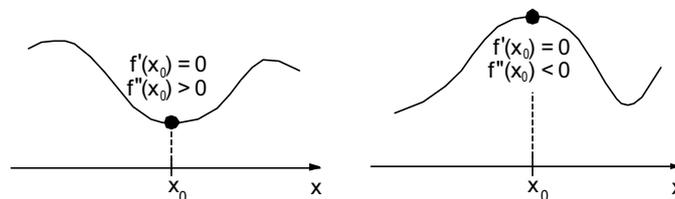


Figura 8.5.

Não faremos a demonstração do teorema 8.2 aqui, mas faremos a seguinte observação geométrica, que o torna intuitivamente óbvio.

Se $f'(x_0) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f , em $P = (x_0, f(x_0))$, é horizontal.

Se, além disso, $f''(x_0) > 0$, temos a concavidade do gráfico de f , em P , voltada para cima, e assim x_0 é um ponto de mínimo local de f . Se $f''(x_0) < 0$, a concavidade do gráfico de f , em P , é voltada para baixo, e x_0 é então um ponto de máximo local de f . Estas duas possibilidades são ilustradas na figura 8.5.

Exemplo 8.3 Determinar os valores máximo e mínimo de $f(x) = x + \frac{1}{x}$, para $x > 0$.

Solução. Estamos procurando os valores máximo e mínimo de f no intervalo $]0, +\infty[$. Temos $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, e portanto $f'(x) = 0$ (com $x > 0$) se e somente se $x = 1$.

Agora, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Portanto, f não tem valor máximo em $]0, +\infty[$.

Temos ainda $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e $f''(1) > 0$. Assim, $x_1 = 1$ é ponto de mínimo local de f . Como f não tem outros pontos críticos, 1 é o ponto de mínimo global de f , sendo $f(1) = 2$ o valor mínimo de f no intervalo $]0, +\infty[$.

8.2 Aplicações a problemas de otimização

Exemplo 8.4 Qual é a maior área retangular que pode ser cercada com 200 m de tela de arame?

Solução.

(Passo 1) *Analizamos o problema, e desenhamos um diagrama incluindo toda a informação. Introduzimos variáveis.*

Fazemos isto na figura 8.6

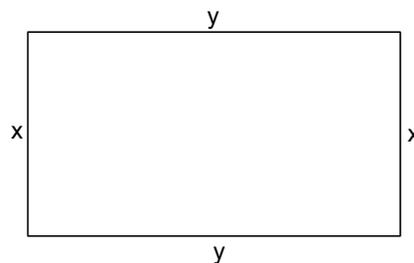


Figura 8.6. O perímetro do retângulo é $2x + 2y$.

(Passo 2) *Expressamos a quantidade a ser maximizada como uma função de uma variável. Determinamos o domínio dessa função a partir das condições do problema.*

A área do retângulo deve ser maximizada, sob a condição de que o perímetro é 200 m.

Essa área é dada por $A = xy$. Como $y = 100 - x$, temos

$$A = A(x) = x(100 - x)$$

e, nas condições do problema, temos $0 \leq x \leq 100$.

(Passo 3) *Determinamos o ponto de máximo e o valor máximo da função, no intervalo em que ela está definida.*

Usando os procedimentos discutidos anteriormente, sendo $A(x) = 100x - x^2$, temos $A'(x) = 100 - 2x$.

$A'(x) = 0$ se e somente se $x = 50$. Temos $A(50) = 50 \cdot (100 - 50) = 50^2 = 2500$. Temos ainda $A(0) = A(100) = 0$ (valor mínimo da área).

Assim, o valor máximo de $A(x)$ é atingido quando $x = 50$ m. Assim, o retângulo de perímetro 200 m, com área máxima, é um quadrado de 50 m de lado.

Exemplo 8.5 *Uma grande caixa deve ser construída cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos de uma folha retangular de zinco, de 3 m por 8 m, dobrando-se os quatro lados (abas laterais) para cima e soldando-se as arestas verticais que ficaram justapostas. Encontre o maior volume possível para esta caixa.*

Solução.

(1) Um diagrama contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, é mostrado na figura 8.7

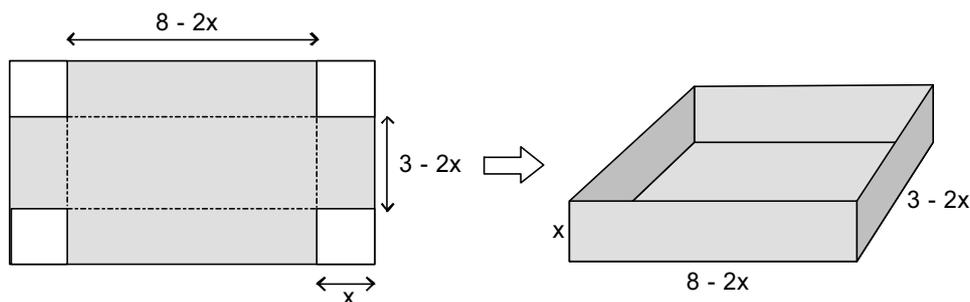


Figura 8.7.

(2) O volume da caixa da figura 8.7 é dado por

$$V = V(x) = x(8 - 2x)(3 - 2x), \text{ para } 0 \leq x \leq 3/2$$

(3) $V'(x) = 0$ se e somente se $x = 2/3$ ou $x = 3$ (esta última solução está descartada, pois $3 \notin D(V)$).

O único ponto crítico de V é $2/3$. Nas extremidades do domínio temos $V = 0$. Como $V \geq 0$, o ponto crítico só pode ser máximo local, e portanto máximo absoluto.

Assim, $x = 2/3$ é ponto de máximo de V , e as dimensões da caixa de volume máximo são $20/3$, $5/3$ e $2/3$ m, tendo ela volume $200/27$ m³.

Exemplo 8.6 *Deseja-se construir uma lata cilíndrica totalmente fechada, de volume v , gastando-se, em sua confecção, a menor quantidade de material possível. Determine a razão entre a altura e o diâmetro dessa lata.*

Solução.

(1) Diagramas contendo todas as informações do problema, bem como a introdução de uma variável, estão na figura 8.8

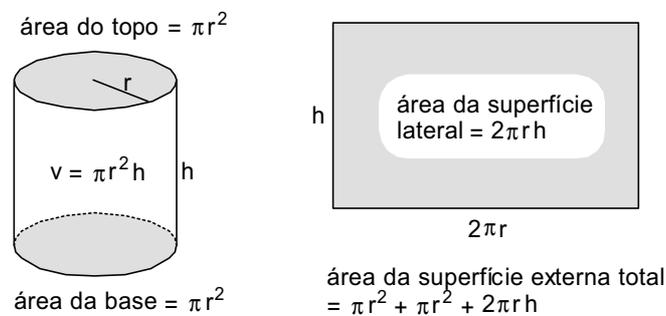


Figura 8.8.

(2) A superfície externa total da lata cilíndrica, ilustrada na figura 8.8, é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Como $\pi r^2 h = v$, temos $h = \frac{v}{\pi r^2}$, e então

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$$

sendo $S(r)$ definida somente para $r > 0$.

$$(3) S'(r) = 4\pi r - \frac{2v}{r^2}.$$

$S' = 0$ se e somente se $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, e este é o único ponto crítico de S no intervalo $r > 0$.

Temos também que $\lim_{r \rightarrow 0} S(r) = +\infty$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} S(r) = +\infty$. Assim, $S(r)$ não tem valor máximo, e seu único ponto crítico só pode ser ponto de mínimo local. Isto é confirmado observando-se que $S''(r) = 4\pi + \frac{4v}{r^3} > 0$ para todo $r > 0$. Portanto, o

gráfico de $S = S(r)$ tem convexidade voltada para cima, o que confirma $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ como seu ponto de mínimo local, e também ponto de mínimo absoluto da função S .

Sendo $r = \sqrt[3]{v/(2\pi)}$, temos

$$\frac{h}{r} = \frac{v}{\pi r^3} = \frac{v}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}\right)^3} = \frac{v}{\pi \left(\frac{v}{2\pi}\right)} = 2$$

Portanto, $h = 2r$, ou seja, a altura da lata deve ser igual ao diâmetro da base se quisermos minimizarmos o material a ser gasto em sua confecção.

Este é o padrão, ao menos aproximado, de algumas latas de conservas, tais como latas de creme de leite e de leite condensado. Por questões de praticidade, muitas latas fogem deste padrão, como por exemplo as latas de óleo comestível.

8.3 Problemas

Encontre os pontos de máximo e de mínimo, bem como os valores máximo e mínimo, das funções dadas, nos intervalos indicados.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$, $x \in [-4, 2]$

Resposta. $x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 2$, $f(-1) = -3$, $f(2) = 6\sqrt[3]{2} \approx 7,6$.

2. $f(x) = x^2 + 2x - 4$, $x \in [-2, 2]$.

Resposta. $x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 2$, $f(-1) = -5$, $f(2) = 4$.

3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Resposta. $x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 1$, $f(-1) = -1/2$, $f(1) = 1/2$.

4. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$.

Resposta. f não tem máximo, nem mínimo.

Resolva os seguintes problemas de otimização.

- Um recipiente de lata, de forma cilíndrica e aberto no topo, deve ter capacidade de v litros. Determine a razão entre a altura h e o diâmetro d da base de modo que a quantidade de lata usada na sua fabricação seja a menor possível.

Resposta. $h = d/2$.

2. Um estudante quer construir um viveiro retângular para seu hamster, usando a parede de um cômodo como um dos lados e cercando os demais três lados com 3 metros de tela disponíveis, obtendo a maior área retangular possível. Quais devem ser as dimensões de seu viveiro?

Resposta. O viveiro deve ter 1,5 m na frente e 0,75 m nos lados.

3. Determinar as dimensões de um cilindro, de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio R .

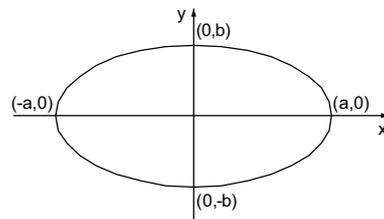
Sugestão. Faça um desenho visualizando o cilindro de perfil dentro da esfera. No desenho, você terá um retângulo dentro de um círculo. Demarque a altura h do cilindro, e diâmetro da sua base, $2r$. Demarque também o raio R da esfera. Use o teorema de Pitágoras obter relações entre h e r . O volume do cilindro é dado por $V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = \pi r^2 \cdot h$.

Resposta. $r =$ raio da base $= \sqrt{\frac{2}{3}}R$. $h =$ altura do cilindro $= \sqrt{2}r$.

4. Determinar as dimensões de um cilindro, inscrito em uma esfera de raio R , cuja área da superfície externa total é a máxima possível.

Resposta. $r =$ raio da base $= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}R$, $h = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R$.

5. Na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, inscreva um retângulo, de área máxima, com dois de seus lados paralelos ao eixo x (e os outros dois paralelos ao eixo y). *Sugestão.* Os quatro vértices do retângulo, todos pertencentes à elipse, serão pontos (x, y) , $(-x, y)$, $(x, -y)$ e $(-x, -y)$.



Resposta. O retângulo tem dimensões $\sqrt{2}a$ e $\sqrt{2}b$.

6. Quer-se construir um tanque de aço para armazenar gás propano, com a forma de um cilindro circular reto, com um hemisfério (semi-esfera) em cada extremidade. Se a capacidade desejada para o tanque é 100 decímetros cúbicos (litros), quais as dimensões que exigem a menor quantidade de aço? (Despreze a espessura das paredes do tanque).

Resposta. O tanque deve ser esférico, de raio $\sqrt[3]{75/\pi} \approx 2,88$ metros.

7. Qual ponto da parábola $y = x^2 + 1$ está mais próximo do ponto $A = (3, 1)$?

Sugestão. A distância de um ponto qualquer $P = (x, y)$ ao ponto A é dada por $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$. Se P é um ponto da parábola, temos $y = x^2 + 1$, e então $d = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$. Como $d \geq 0$, temos que d terá seu valor mínimo quando d^2 assumir seu valor mínimo. Assim, basta procurarmos o valor mínimo de $f(x) = (x-3)^2 + x^4$. *Resposta.* $(1, 2)$.

8. Um veterinário tem 100 m de tela de arame. Com isto deseja construir seis canis, primeiro cercando uma região retangular e depois subdividindo essa região em seis

retângulos menores, através de cinco cercas divisórias internas, paralelas a um dos lados. Que dimensões externas, dessa região retangular, maximizam sua área total, se o veterinário gasta os 100 m de tela nessa construção?

Resposta. 25 m por $50/7 \approx 7,14$ m.

9. Ao procurar o ponto da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximo da origem, Joãozinho raciocinou da seguinte maneira.

Temos que procurar, dentre os pontos da hipérbole, aquele para o qual $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ tem valor mínimo. Como $d \geq 0$, d será mínimo quando d^2 for mínimo. Agora, sendo $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole, temos $y^2 = x^2 - 1$, logo $d^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 - 1$.

Procurando o valor mínimo de $d^2 = f(x) = 2x^2 - 1$, calculamos $f'(x) = 4x$. Temos $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 0$. Para $x = 0$ porém, temos $y^2 = 0^2 - 1 = -1$, uma impossibilidade. Logo, não há nenhum ponto da hipérbole cuja distância à origem seja mínima.

Explique o erro no raciocínio de Joãozinho, já que um esboço da hipérbole (faça-o) revela que os pontos $(\pm 1, 0)$ são seus pontos mais próximos da origem. *Sugestão.* Para quais valores de x define-se d ?

