

Aula 9

Funções exponenciais e logarítmicas. Uma revisão e o número e

Nesta aula faremos uma pequena revisão das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Faremos ainda uma apresentação do número e , uma constante importante da matemática universitária.

9.1 Pequena revisão de potências

Sabemos que, sendo a um número real positivo,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \text{ e } a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

se $m, n \in \mathbb{Z}$, e $n > 0$. Assim define-se a *potência de base a e expoente p* , a^p (lê-se “ a elevado a p ”), para todo $p \in \mathbb{Q}$.

Se α é um número irracional, existe uma seqüência de números racionais que tende a α (uma seqüência de aproximações de α por números racionais), ou seja, existe uma seqüência de números racionais

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$.

Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,414213562$, existe uma seqüência de aproximações de $\sqrt{2}$, cujos cinco primeiros termos são dados na primeira coluna da tabela abaixo:

$\alpha_1 = 1,4$	$(\alpha_1^2 = 1,96)$	$ \alpha_1 - \alpha \approx 0,014213562 < 0,1$
$\alpha_2 = 1,41$	$(\alpha_2^2 = 1,9881)$	$ \alpha_2 - \alpha \approx 0,004213562 < 0,01$
$\alpha_3 = 1,414$	$(\alpha_3^2 = 1,999396)$	$ \alpha_3 - \alpha \approx 0,000213562 < 0,001$
$\alpha_4 = 1,4142$	$(\alpha_4^2 = 1,99996164)$	$ \alpha_4 - \alpha \approx 0,000013562 < 0,0001$
$\alpha_5 = 1,41421$	$(\alpha_5^2 = 1,99998992)$	$ \alpha_5 - \alpha \approx 0,000003562 < 0,00001$

Uma calculadora nos fornece uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 12 casas decimais: $\sqrt{2} \approx 1,414213562373$. A seqüência acima, de aproximações sucessivas de $\sqrt{2}$, é tal que $|\alpha_n - \sqrt{2}| < 10^{-n}$, e assim $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n - \sqrt{2}| = 0$, e então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \sqrt{2}$ (a segunda coluna da tabela acima sugere que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^2 = 2$).

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e sendo α um número irracional, e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ uma seqüência de racionais com limite α , a^α é definido como o limite da seqüência

$$a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}, a^{\alpha_4}, \dots$$

Por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ é o limite da seqüência

$$2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \dots$$

Uma calculadora nos fornece as aproximações:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^{1,4} &= 2^{14/10} = \sqrt[10]{2^{14}} && \approx 2,6390 \\ 2^{1,41} &= 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}} && \approx 2,6574 \\ 2^{1,414} &= 2^{1414/1000} && \approx 2,6647 \\ 2^{1,4142} &= 2^{14142/10000} && \approx 2,6651 \end{aligned}$$

No que diz respeito a potências de base real positiva e expoente real, temos as seguintes boas propriedades, que aceitaremos sem demonstração:

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e $x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^0 = 1$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad \text{se também } b > 0$$

9.2 A função exponencial

Sendo a um número real, positivo, $a \neq 1$, define-se a função exponencial de base a por

$$f(x) = a^x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Tomamos $a \neq 1$ pela simples razão de que $1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que torna a^x constante no caso em que $a = 1$ (funções constantes não são classificadas como funções exponenciais). Além disso, tomamos $a > 0$ porque, se $a < 0$, a^x não se define para uma infinidade de valores reais de x . Por exemplo, se $a = -4$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a^{1/2n} = (-4)^{1/2n} = \sqrt[n]{-4}$ não se define como número real.

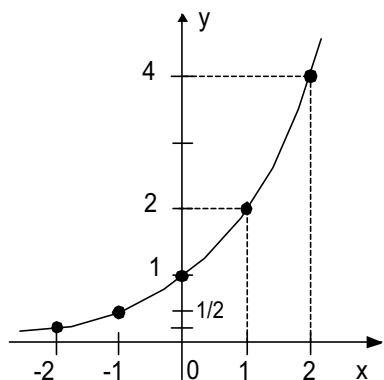
Assumiremos que, se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial dada por $f(x) = a^x$, é contínua em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}$$

Assumiremos também que se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente, com $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente, com $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0^+ (= 0)$.

Na figura 9.1 temos esboços dos gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

(a)



(b)

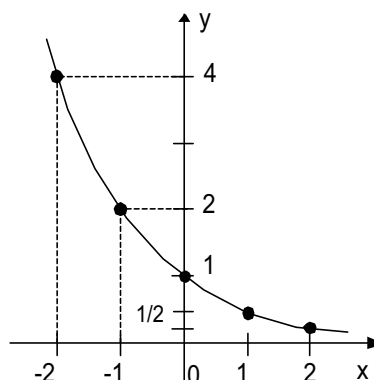


Figura 9.1. Gráficos de (a) $y = 2^x$, (b) $y = (1/2)^x$.

Temos agora as seguintes novidades na *álgebra de limites*:

$$\text{Se } a > 1, \quad a^{+\infty} = +\infty, \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ (= 0)$$

$$\text{Se } 0 < a < 1, \quad a^{+\infty} = 0^+ (= 0), \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

9.3 Logaritmos e funções logarítmicas

Se $a > 0$, $a \neq 1$, e $x > 0$, o *logaritmo de x na base a* , denotado por $\log_a x$, é o expoente ao qual devemos elevar a para obtermos x , ou seja

$$\log_a x = y \text{ se e somente se } a^y = x$$

Assim sendo,

$$a^{\log_a x} = x$$

Por exemplo,

$$\log_2 8 = 3, \text{ pois } 2^3 = 8;$$

$$\log_9 27 = \frac{3}{2}, \text{ pois } 9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27;$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2, \text{ pois } 2^{-2} = 1/4;$$

$$\log_{1/2} 16 = -4, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16;$$

$$\log_2 5 \approx 2,3219, \text{ pois } 2^{2,3219} \approx 4,9999.$$

$\log_2 5$ não é um número racional, pois se $\log_2 5 = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros positivos, então $2^{m/n} = 5$. Daí, $2^m = (2^{m/n})^n = 5^n$, o que é impossível pois 2^m é par e 5^n é ímpar.

Listamos aqui, sem dedução, algumas propriedades elementares dos logaritmos:

Sendo x e y reais positivos, z real, e $a > 0, a \neq 1$,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^z = z \cdot \log_a x$$

$$\log_a x^{1/z} = \frac{\log_a x}{z} \quad (\text{se } z \neq 0)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad (\text{se } b > 0, b \neq 1) \quad (\text{mudança de base})$$

Assim, por exemplo, a passagem dos logaritmos decimais (base 10) para os logaritmos de base 2 é dada por

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \frac{\log x}{\log 2}$$

Sendo a função $f(x) = a^x$ contínua e crescente quando $a > 0$, e decrescente quando $0 < a < 1$, temos que $\log_a x$ é definida para todo $x > 0$.

Por exemplo, $f(x) = 2^x$ é crescente, $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$. Pela continuidade de f , a imagem do intervalo $[2, 3]$, pela função f , é o intervalo $[4, 8]$. Existe então $x_0 \in [2, 3]$ tal que $2^{x_0} = 5$. Assim, $\log_2 5 = x_0$. Portanto, realmente existe o número real $\log_2 5$.

Além disso, se $a > 0$, $\log_a$ é crescente, e se $0 < a < 1$, $\log_a$ é decrescente.

Na figura 9.2, temos esboços dos gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Admitiremos que $f(x) = \log_a x$ é contínua no seu domínio $]0, +\infty[$, ou seja,

$$\text{se } x_0 > 0 \text{ então } \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

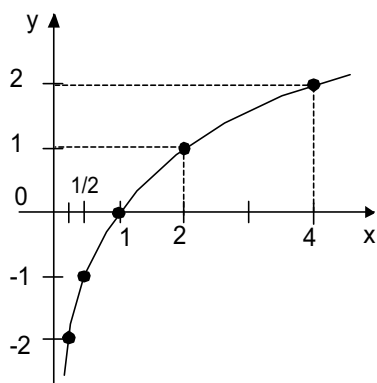
Além disso, temos ainda (confira isto observando os gráficos da figura 9.2).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \log_a(0^+) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

bem como também (confira observando os gráficos da figura 9.2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

(a)



(b)

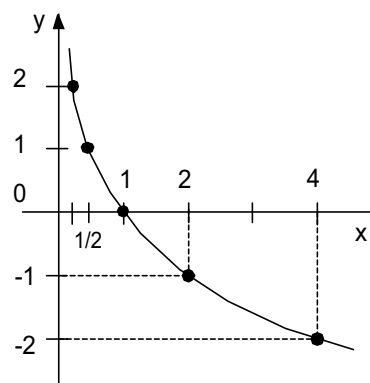


Figura 9.2. Gráficos de (a) $y = \log_2 x$, (b) $y = \log_{1/2} x$.

9.4 O número e

Na matemática universitária, há duas constantes numéricas muito importantes. São elas o número π , $\pi \approx 3,14159$, e o número e , $e \approx 2,71828$.

O número e é definido como sendo o limite

$$e = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Pode ser demonstrado que o número e é irracional.

Observe a tabela de valores (aproximados) de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para $n = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$, dada abaixo.

Tabela 9.1.

n	$1/n$	$1 + \frac{1}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	$2^1 = 2$
10	0,1	1,1	$(1,1)^{10} \approx 2,59374$
100	0,01	1,01	$(1,01)^{100} \approx 2,70481$
1000	0,001	1,001	$(1,001)^{1000} \approx 2,71692$
10000	0,0001	1,0001	$(1,0001)^{10000} \approx 2,71815$
100000	0,00001	1,00001	$(1,00001)^{100000} \approx 2,71828$

Note que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$.

Assim, podemos enganosamente intuir que, quando n é muito grande, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 1^n = 1$ (mesmo calculadoras de boa qualidade podem nos induzir a este erro). Neste caso, nossa intuição é falha, pois pode ser demonstrado que o número $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cresce à medida em que n cresce, sendo $a_1 = 2$, e $2 < a_n < 3$ para cada $n \geq 2$. Na tabela 9.1, ilustramos o fato de que

quando n é muito grande, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$

Assim sendo, temos um novo símbolo de indeterminação: $1^{\pm\infty}$.

Vamos admitir, sem demonstração, que também, para x real

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Neste caso, podemos deduzir:

Proposição 9.1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demonstração. De fato, fazendo a mudança de variável

$$x = -(y + 1)$$

temos $y = -x - 1$, e portanto $x \rightarrow -\infty$ se e somente se $y \rightarrow +\infty$.

Assim, sendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{-(y+1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right) \\ &= e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

■

Como consequência, temos também

Proposição 9.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Demonstração. Mostraremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Pondo $\alpha = 1/x$, temos que $x \rightarrow 0^+$ se e somente se $\alpha \rightarrow +\infty$. Daí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Além disso, $x \rightarrow 0^-$ se e somente se $\alpha \rightarrow -\infty$. Daí, pela proposição 9.1,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

■

Se $x > 0$, chama-se *logaritmo natural* ou *logaritmo neperiano* de x ao logaritmo

$$\ln x = \log_e x$$

Como $e \approx 2,71828 > 1$, a função $f(x) = \ln x$ é crescente e seu gráfico tem, qualitativamente, a forma do gráfico de $g(x) = \log_2 x$, figura 9.2 a.

A passagem dos logaritmos naturais para os logaritmos decimais (base 10) é dada por

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

9.5 Problemas

1. Calcule os seguintes limites. Lembre-se que $1^{\pm\infty}$ é um símbolo de indeterminação.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Sugestão. Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $1 + \frac{2}{x} = 1 + \frac{1}{y}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

Sugestão. Para contornar a indeterminação $1^{+\infty}$, faça $\frac{x}{1+x} = 1 + \frac{1}{y}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$ (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{2x}$

Respostas. (a) e^2 (b) $1/e$ (c) e (d) $+\infty$ (e) 0 (f) $1/\sqrt[3]{e^2}$

2. Mostre que, sendo $a > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$.

Sugestão: Trate o caso $a = 1$ em separado. Para $a \neq 1$, faça a mudança de variável $a^h - 1 = z$, e então $h = \ln(z + 1)/\ln a$.

3. Usando o resultado do problema anterior, calcule

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (a^{1/n} - 1)$ (sendo $a > 0$, $a \neq 1$)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}$

Sugestão. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{e^{ax} - 1}{ax}\right) = a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

Sugestão. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{e^{bx} - 1}$

Respostas. (a) $\ln a$ (b) a (c) $a - b$ (d) a/b

4. Sendo $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, calcule os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Resposta. $+\infty$ e 0 , respectivamente.

5. Sendo $g(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-a}}}$, calcule os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$.

Resposta. 0 e 1 , respectivamente.