

Aula 10

Derivando funções exponenciais e logarítmicas

Nesta aula estaremos deduzindo as derivadas das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$.

O que faz do número e uma constante tão especial? A resposta está no seguinte teorema

Teorema 10.1

1. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$. Ou seja, a derivada da função exponencial de base e coincide com a própria função.
2. Se $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Demonstração. Seja $f(x) = e^x$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x\end{aligned}$$

Para justificar o último passo na dedução acima, nos resta demonstrar:

Proposição 10.1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Demonstração. Faremos o cálculo do limite através de uma interessante mudança de variável.

Fazendo $e^h - 1 = z$, temos $e^h = 1 + z$, e então $h = \log_e(1 + z)$

Assim sendo, $h \rightarrow 0$ se e somente se $z \rightarrow 0$, e então

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log_e(1 + z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_e(1 + z)}{z}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\log_e \left[(1 + z)^{1/z} \right]} = \frac{1}{\log_e e} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

■

Portanto, sendo $f(x) = e^x$, temos $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = e^x$.

Para calcular a derivada de a^x , fazemos

$$a^x = e^{\log_e a^x} = e^{x \log_e a} = e^{x \ln a} = e^{(\ln a)x}$$

Pela regra da cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$, logo

$$(a^x)' = [e^{(\ln a)x}]' = e^{(\ln a)x} \cdot ((\ln a)x)' = e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

■

Quanto a funções logarítmicas, temos o seguinte

Teorema 10.2

$$\begin{array}{ll} 1. (\ln x)' = \frac{1}{x} & 2. (\ln |x|)' = \frac{1}{x} \\ 3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & 4. (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} \end{array}$$

Demonstração. Se $y = \ln x$, então $y = \log_e x$, e portanto $x = e^y$.

Por derivação implícita em relação a x , temos $(x)' = (e^y)'$, logo $1 = e^y \cdot y'$.

Portanto $y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$, ou seja, $(\ln x)' = 1/x$.

Assim sendo, $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.

Para derivar $\ln |x|$, ou $\log_a |x|$, lembremo-nos de que $|x| = x$ quando $x > 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Assim, se $x > 0$, recaímos nos itens 1 e 3.

Se $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{-1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. O item 4 é deduzido analogamente. ■

Proposição 10.2 Sendo α uma constante real, racional ou irracional, e $x > 0$,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Demonstração. Se $y = x^\alpha$ então $\ln y = \ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

Por derivação implícita, em relação a x , temos $(\ln y)' = (\alpha \ln x)'$.

$$\text{Logo, } \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\text{Portanto, } y' = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

No exemplo seguinte, fazemos uso da função $\ln$ para derivar uma função exponencial de base e expoente variáveis.

Exemplo 10.1 (Uma função exponencial de base e expoente variáveis) Calcular a derivada de $f(x) = x^x$.

Solução. Sendo $y = x^x$, temos $\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$.

Derivando ambos os membros em relação a x , temos

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$y' = y \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (1 + \ln x).$$

$$\text{Portanto } (x^x)' = x^x (1 + \ln x).$$

10.1 Problemas

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

$$(a) y = e^{-3x} \quad (b) y = e^{4x+5} \quad (c) y = a^{x^2} \quad (d) y = 7^{x^2+2x}$$

$$(e) y = e^x(1 - x^2) \quad (f) y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \quad (g) y = x^{1/x} \quad (h) y = x^\pi \pi^x$$

Respostas.

$$(a) -3e^{-3x} \quad (b) 4e^{4x+5} \quad (c) 2xa^{x^2} \ln a \quad (d) 2(x+1)7^{x^2+2x} \ln 7 \quad (e) e^x(1 - 2x - x^2)$$

$$(f) \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \quad (g) x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} \quad (h) \pi x^{\pi-1} \pi^x + x^\pi \pi^x \ln \pi$$

2. Calcule as derivadas das seguintes funções.

$$(a) y = \ln |ax + b| \quad (b) y = \log_a(x^2 + 1) \quad (c) y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$(d) y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad (e) y = \ln |x^2 + 2x| \quad (f) y = \log_{10}(3x^2 + 2)^5$$

$$(g) y = x \ln x \quad (h) y = (\ln x)^3 \quad (i) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + \lambda}) \quad (\lambda \neq 0)$$

$$(j) y = \log_{10}(\ln x) \quad (k) y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Respostas. } (a) \frac{a}{ax+b} \quad (b) \frac{2x}{(x^2+1) \ln a} \quad (c) \frac{1}{1+e^x} \quad (d) \frac{4x}{1-x^4} \quad (e) \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$(f) \frac{30x}{(3x^2+2) \ln 10} \quad (g) 1 + \ln x \quad (h) \frac{3(\ln x)^2}{x} \quad (i) \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}} \quad (j) \frac{1}{x \ln x \ln 10} \quad (k) \frac{1}{a^2-x^2}$$

3. Calcule y' , calculando $\ln y$, expandindo o segundo membro, utilizando propriedades de logaritmos, e então derivando implicitamente.

(a) $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$ (b) $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ (c) $y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $y = \sqrt{(3x^2+2)}\sqrt{6x-7}$

Respostas. (a) $\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} \right)$ (b) $-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

(c) $\frac{1+3x^2-2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ (d) $\left(\frac{3x}{3x^2+2} + \frac{3}{2(6x-7)} \right) \sqrt{(3x^2+2)}\sqrt{6x-7}$

4. Calcule dy/dx , se $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação

(a) $3y - x^2 + \ln(xy) = 2$ (b) $x \ln y - y \ln x = 1$ (c) $e^{xy} - x^3 + 3y^2 = 11$

Respostas. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2-1)y}{x(3y+1)}$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-xy \ln y}{x^2-xy \ln x}$ (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+6y}$

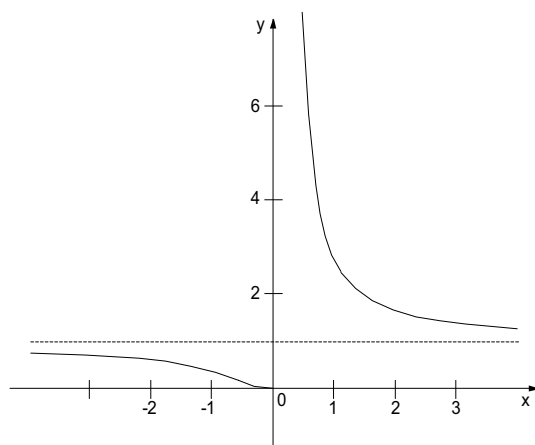
5. Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + \ln(2x-5)$ no ponto dessa curva de abscissa 3. Resposta. $y = 8x - 15$

6. Mostre que a função $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ é solução da equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.

7. A posição s de um ponto móvel P sobre um eixo horizontal s é dada por $s(t) = t^2 - 4 \ln(1+t)$, $t \geq 0$, sendo s dado em centímetros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P em um instante t qualquer. Determine os intervalos de tempo em que o ponto P se move (a) para a esquerda, isto é, em direção contrária à do eixo s , e (b) para a direita. Resposta. $v(t) = \frac{2(t^2+t-2)}{t+1}$, $a(t) = 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$. (a) $0 \leq t < 1$, (b) $t > 1$.

8. Esboce o gráfico de $f(x) = e^{1/x}$, analisando a função f através de derivadas e cálculos de limites apropriados.

Resposta.



A reta $x = 0$ (eixo y) é assíntota vertical do gráfico (somente para $x > 0$).

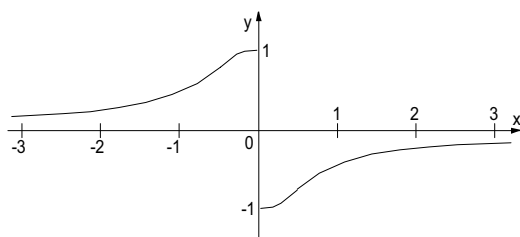
A reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico.

$$f'(x) = -e^{1/x} / x^2$$

$$f''(x) = e^{1/x} (2x + 1) / x^4$$

9. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{2}{1+e^{1/x}} - 1$, analisando a função f através de derivadas e cálculos de limites apropriados.

Resposta.



É útil saber que f é uma função *ímpar*, ou seja, $f(-x) = -f(x)$, para cada $x \neq 0$ (verifique).

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2(1 + e^{1/x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2e^{1/x}[e^{1/x}(2x - 1) + 2x + 1]}{(1 + e^{1/x})^3 x^4}$$

Dado numérico. Raízes de f'' : $\approx \pm 0,4$.

Sendo f uma função ímpar, temos que f' é uma função *par* ($f'(-x) = f'(x)$), e f'' é também função ímpar (veja problema 9, aula 3).

10. (a) Qual número real é maior, $(0, 1)^{0,1}$ ou $(0, 2)^{0,2}$?

- (b) Qual é o menor valor de x^x , sendo x real e positivo?

Respostas. (a) $(0, 1)^{0,1} > (0, 2)^{0,2}$ (b) $(1/e)^{1/e}$. *Sugestão para ambos os itens.* Verifique os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^x$.

11. Mostre que $\pi^e < e^\pi$, sem o uso de máquinas de calcular.

Sugestão. Considere $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Mostre que f é crescente no intervalo $]0, e]$ e decrescente no intervalo $[e, +\infty[$. Use então o fato de que $\pi > e$.