

# Aula 14

## Taxas relacionadas. Diferenciais

### 14.1 Taxas relacionadas

Na linguagem do cálculo diferencial, se uma variável  $u$  é função da variável  $v$ , a taxa de variação (instantânea) de  $u$ , em relação a  $v$ , é a derivada  $\frac{du}{dv}$ .

Em vários problemas de cálculo, duas ou mais grandezas variáveis estão relacionadas entre si por uma equação. Por exemplo, na equação  $v_1/v_2 = (\text{sen } \theta_1)/(\text{sen } \theta_2)$ , temos quatro variáveis,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , relacionadas entre si.

Se temos variáveis, digamos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , relacionadas entre si por uma equação, podemos ainda ter as três como funções de uma única variável  $s$ . Por derivação implícita, ou às vezes, por derivação em cadeia, podemos relacionar as várias derivadas  $\frac{du}{ds}$ ,  $\frac{dv}{ds}$  e  $\frac{dw}{ds}$ , ou ainda, por exemplo,  $\frac{du}{dv}$ ,  $\frac{dv}{dw}$ , etc. Problemas em que duas ou mais grandezas variáveis estão inter-relacionadas, e nos quais são levadas em conta as taxas de variações instantâneas, de algumas grandezas em relação a outras, são chamados, na literatura do cálculo, de problemas de *taxas relacionadas*.

**Exemplo 14.1** *Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura  $H$  e raio do topo circular igual a  $R$ . Encontrando-se inicialmente vazio, o tanque começa a encher-se de água, a uma vazão constante de  $k$  litros por minuto. Exprima a velocidade com que sobe o nível da água ( $dh/dt$ ), em função da profundidade  $h$ . Com que velocidade a água sobe no instante em que  $h = 0$ ?*

*Solução.* O volume da água quando esta tem profundidade  $h$  é dado por  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , sendo  $r$  o raio da superfície (circular) da água. Veja figura 14.1.

Sendo  $R$  o raio do topo da caixa, e  $H$  sua altura, por razões de semelhança de triângulos, temos  $r/R = h/H$ , daí  $r = Rh/H$ .

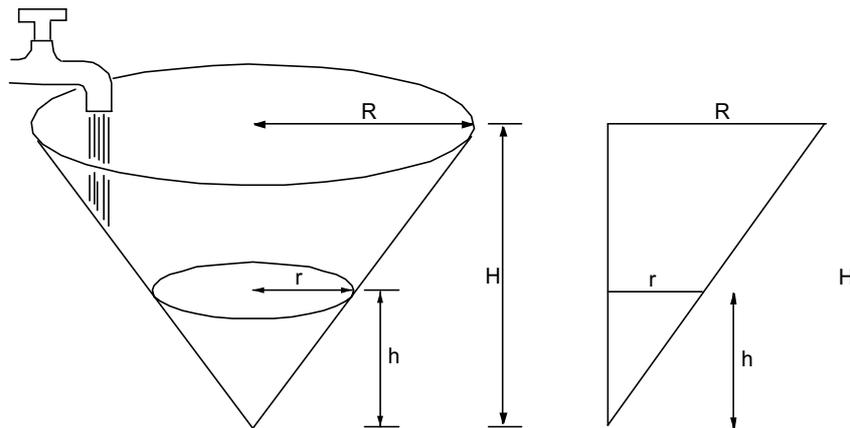


Figura 14.1.

Assim sendo, obtemos

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h = \frac{\pi R^2}{3H^2}h^3$$

A taxa de variação do volume de água no tempo, isto é, sua *vazão*, é constante, ou seja  $\frac{dV}{dt} = k$  (litros por minuto).

Por derivação em cadeia, temos  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ . Como  $\frac{dV}{dt} = k$ , temos então

$$k = \frac{\pi R^2}{H^2}h^2 \cdot \frac{dh}{dt}, \text{ ou seja, } \frac{dh}{dt} = \frac{kH^2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{h^2}$$

Assim, estabelemos que a velocidade de subida do nível da água é inversamente proporcional ao quadrado de sua profundidade.

Quando  $h = 0$ , temos,  $\frac{dh}{dt} = +\infty$ . Na prática, este resultado nos diz que nossa modelagem matemática não nos permite determinar a velocidade de subida da água no instante em que o tanque começa a encher-se.

**Exemplo 14.2** Uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de 2 cm/seg. Com que velocidade cai o topo da escada, no momento em que a base da escada está a 3 m da parede?

*Solução.* Na figura 14.2 temos um diagrama geométrico para o problema, em que denotamos por  $x$  e  $y$  as distâncias da base e do topo da escada à base da parede, respectivamente.

$$\text{Temos } \frac{dx}{dt} = 2 \text{ (cm/seg).}$$

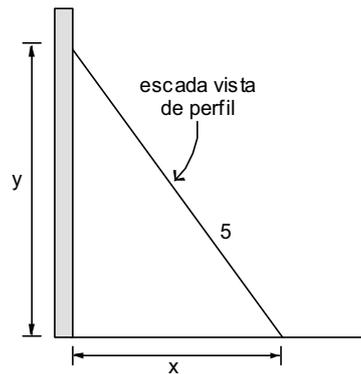


Figura 14.2.

Pelo teorema de Pitágoras,  $x^2 + y^2 = 25$ , daí, derivando implicitamente em relação a  $t$ , temos  $2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$ , ou seja,

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -x \cdot \frac{dx}{dt}$$

Quando  $x = 3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$ , temos  $y = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$ , e então  $\frac{dy}{dt} = -1,5 \text{ cm/seg}$ .

Nesse instante, a velocidade com que o topo da escada cai é  $1,5 \text{ cm/seg}$ .

## 14.2 Diferenciais

Quando uma função  $f(x)$  é derivável em um ponto  $x_0$ , temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Assim, se chamamos

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon$$

teremos  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ .

Assim, sendo  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , temos  $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ .

Como  $\varepsilon \approx 0$  quando  $|\Delta x|$  é suficientemente pequeno, temos, para um tal  $\Delta x$ , a aproximação

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Chama-se *diferencial de  $f$  em  $x_0$*  a expressão simbólica

$$df(x_0) = f'(x_0) dx$$

O produto  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  é o valor da diferencial de  $f$  no ponto  $x_0$ ,  $df(x_0)$ , quando  $dx = \Delta x$ .

A expressão  $dx$ , *diferencial da variável  $x$* , pode assumir qualquer valor real. A importância da diferencial é que quando  $dx = \Delta x$  e este é suficientemente pequeno, temos

$$\Delta f \approx df$$

ou, mais explicitamente,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

e em geral, é mais fácil calcular  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  do que  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Nos primórdios do cálculo, matemáticos diziam que  $dx$  seria uma variação “infinitesimal” de  $x$ , atribuída a  $x_0$ , e que  $df(x_0)$  seria a variação infinitesimal, sofrida por  $f(x_0)$ , correspondente à variação  $dx$  atribuída a  $x_0$ . Esses matemáticos chegavam a escrever “ $f(x + dx) - f(x) = f'(x) dx$ ”.

Ainda hoje, muitos textos de cálculo para ciências físicas, referem-se a “um elemento de comprimento  $dx$ ,” “um elemento de carga elétrica  $dq$ ,” “um elemento de massa  $dm$ ,” “um elemento de área  $dA$ ,” etc., quando querem referir-se a quantidades “infinitesimais” dessas grandezas.

Na figura 14.3 temos uma interpretação geométrica da diferencial de uma função  $f$  em um ponto  $x_0$ , quando  $dx$  assume um certo valor  $\Delta x$ .

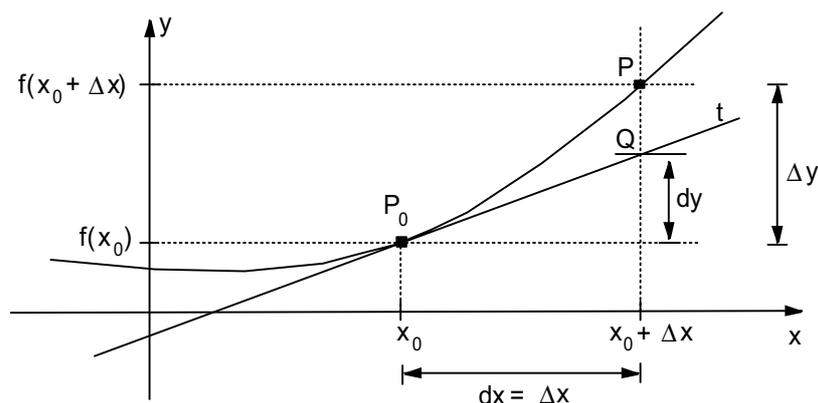


Figura 14.3. Note que, quanto menor  $\Delta x$ , melhor a aproximação  $dy \approx \Delta y$ . Na figura,  $t$  é a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ . As coordenadas do ponto  $Q$ , sobre a reta  $t$ , são  $x_0 + \Delta x$  e  $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$  (verifique).

Sumarizando, quando  $x$  sofre uma variação  $\Delta x$ ,

1.  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  é a variação sofrida por  $f(x)$ ;
2.  $dy = f'(x)\Delta x$  é a diferencial de  $f$ , em  $x$ , para  $dx = \Delta x$ ;
3.  $\Delta y \approx dy$ , se  $\Delta x$  é suficientemente pequeno.

Convencionam-se dizer ainda que

4.  $\frac{\Delta x}{x}$  é a *variação relativa* de  $x$ , correspondente à variação  $\Delta x$ ;
5.  $\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$  é a variação relativa de  $y = f(x)$ , correspondente à variação  $\Delta x$ , sofrida por  $x$ .

**Exemplo 14.3** Mostre que se  $h$  é suficientemente pequeno, vale a aproximação

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a} \quad (a > 0)$$

Com tal fórmula, calcule valores aproximados de  $\sqrt{24}$  e  $\sqrt{104}$ . Compare com resultados obtidos em uma calculadora.

*Solução.* Sendo  $y = f(x) = \sqrt{x}$ , usamos a aproximação  $\Delta y \approx dy$ .

$$\text{Temos } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ e } dy = f'(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Tomando  $x = a^2$  e  $dx = \Delta x = h$ , teremos

$$\sqrt{a^2 + h} - \sqrt{a^2} \approx \frac{h}{2a}, \text{ e portanto}$$

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}$$

Temos então

$$\sqrt{24} = \sqrt{5^2 + (-1)} \approx 5 + \frac{-1}{2 \cdot 5} = 4,9, \text{ e}$$

$$\sqrt{104} = \sqrt{10^2 + 4} \approx 10 + \frac{4}{2 \cdot 10} = 10,2.$$

Por uma calculadora, obteríamos  $\sqrt{24} \approx 4,898979$  e  $\sqrt{104} \approx 10,198039$ .

Dizemos que um número real  $x$  está representado em notação científica quando escrevemos  $x$  na forma  $x = a \cdot 10^n$ , com  $1 \leq |a| < 10$  e  $n$  inteiro (positivo ou negativo). Assim, por exemplo, em notação científica temos os números  $2,46 \cdot 10^{-5}$  e  $4,584 \cdot 10^{11}$ , enquanto que, convertendo à notação científica os números  $-0,023 \cdot 10^8$  e  $452,36 \cdot 10^3$ , teremos

$$-0,023 \cdot 10^8 = -2,3 \cdot 10^6, \text{ e } 452,36 \cdot 10^3 = 4,5236 \cdot 10^5.$$

**Exemplo 14.4** Estimar, em notação científica, uma aproximação de  $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$ , quando  $n = 10^{28}$ .

*Solução.* (uma calculadora pode não dar conta desta tarefa)

Sendo  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , temos  $df = -\frac{2}{x^3}dx$ .

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = f(n+1) - f(n) = \Delta f, \text{ para } x = n \text{ e } \Delta x = 1.$$

Pela aproximação  $\Delta f \approx df$ , teremos, quando  $n = 10^{28}$ ,

$$\Delta f \approx f'(n)\Delta x = -\frac{2}{n^3} = \frac{-2}{10^{84}} = -2 \cdot 10^{-84}.$$

**Exemplo 14.5** Quando estima-se que a medida de uma grandeza é  $M$  unidades, com possível erro de  $E$  unidades, o erro relativo dessa medição é  $E/M$ . O erro relativo da medição indica o erro médio (cometido na medição) por unidade da grandeza.

O raio  $r$  de uma bolinha de aço é medido, com a medição sujeita a até 1% de erro. Determine o maior erro relativo que pode ocorrer na aferição de seu volume.

*Solução.* O volume de uma bola de raio  $r$  é dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

Sendo  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , temos  $dV = 4\pi r^2 dr$ .

O erro  $\Delta V$ , na aferição do volume, correspondente ao erro  $\Delta r$  na medição do raio, quando  $\Delta r$  é bem pequeno, é aproximadamente  $dV$ . Temos então

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2(\Delta r)}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r}$$

Para  $\frac{\Delta r}{r} = \pm 0,01$  (erro máximo relativo na medição do raio), temos  $\frac{\Delta V}{V} \approx \pm 0,03$ , e portanto 3% é o maior erro possível na medição do volume.

**Observação 14.1** Se o gráfico de  $f$  afasta-se muito rapidamente da reta tangente ao ponto  $(x_0, f(x_0))$ , quando  $x$  afasta-se de  $x_0$ , a aproximação  $\Delta y \approx dy$  pode falhar, quando tomamos um valor de  $\Delta x$  que julgamos suficientemente pequeno, por não sabermos quão "suficientemente pequeno" devemos tomá-lo. Isto pode ocorrer quando a derivada  $f'(x_0)$  tem valor absoluto muito grande.

Como um exemplo, seja  $f(x) = x^{100}$ .

Temos  $f(1,08) = (1,08)^{100} \approx 2199,76$ , por uma calculadora confiável (confira).

No entanto, o uso de diferenciais nos dá  $f(1+\Delta x) \approx f(1) + f'(1)\Delta x = 1 + 100\Delta x$ , e portanto, para  $\Delta x = 0,08$ ,  $f(1,08) \approx 1 + 100 \cdot 0,08 = 9$ .

A razão dessa discrepância é que  $f'(1) = 100$ , o que torna o gráfico de  $f$  com alta inclinação no ponto  $x_0 = 1$ . Nesse caso, somente um valor muito pequeno de  $\Delta x$

torna válida a aproximação  $\Delta f \approx df$ . Por exemplo,  $(1,0005)^{100} \approx 1,0513$ , por uma calculadora, enquanto que,  $(1,0005)^{100} \approx 1,05$ , pela aproximação  $\Delta f \approx df$ .

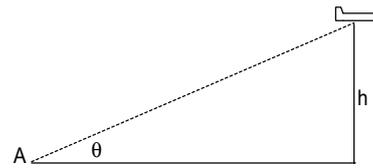
## 14.3 Problemas

### 14.3.1 Problemas sobre taxas relacionadas

- Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura de 5 m e raio da base (isto é, do topo) de 1 m. O tanque se enche da água à taxa de  $2 \text{ m}^3/\text{min}$ . Com que velocidade sobe o nível da água no instante em que ela tem 3 m de profundidade? *Resposta.*  $\frac{50}{9\pi} \text{ m/min} \approx 1,77 \text{ m/min}$ .

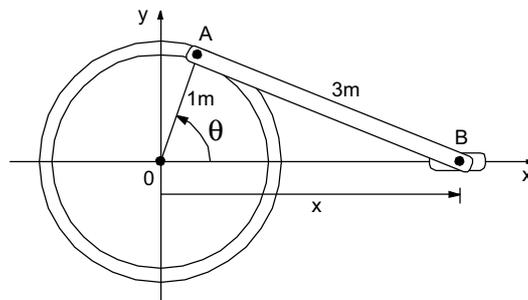
- O gás de um balão esférico escapa à razão de  $2 \text{ dm}^3/\text{min}$ . Mostre que a taxa de variação da superfície  $S$  do balão, em relação ao tempo, é inversamente proporcional ao raio. *Dado.* A superfície de um balão de raio  $r$  tem área  $S = 4\pi r^2$ .

- Considere um avião em vôo horizontal, a uma altura  $h$  em relação ao solo, com velocidade constante  $v$ , afastando-se de um observador  $A$  que se encontra em terra firme. Seja  $\theta$  a elevação angular do avião, em relação ao solo, a partir do observador. Determine, como função de  $\theta$ , a taxa de variação de  $\theta$  em relação ao tempo. *Resposta.*  $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{h} \text{sen } \theta$ .



- Um ponto móvel desloca-se, em um sistema de coordenadas cartesianas, ao longo da circunferência  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r$  constante) com uma velocidade cuja componente em  $x$  é dada por  $\frac{dx}{dt} = y$  (cm/seg). Calcule a componente da velocidade em  $y$ ,  $\frac{dy}{dt}$ . Seja  $\theta$  o deslocamento angular desse ponto móvel, medido a partir do ponto  $(1, 0)$  no sentido anti-horário. Calcule a velocidade angular  $\frac{d\theta}{dt}$ . Em que sentido o ponto se desloca sobre a circunferência, no sentido horário ou no anti-horário? *Respostas.*  $\frac{dy}{dt} = -x$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = -1$  (rad/seg), portanto o ponto se desloca no sentido anti-horário.

- Prende-se a extremidade  $A$  de uma haste de 3 m de comprimento a uma roda de raio 1 m, que gira no sentido anti-horário à taxa de 0,3 radianos por segundo. A outra extremidade da haste está presa a um anel que desliza livremente ao longo de uma outra haste que passa pelo centro da roda. Qual é a velocidade do anel quando  $A$  atinge a altura máxima? *Resposta.*  $-0,3 \text{ m/seg}$ .



6. No exemplo 14.2, uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. Mostre que é fisicamente impossível manter a base da escada escorregando-se, afastando-se da parede a uma velocidade constante, até o momento em que o topo da escada toque o chão. *Sugestão.* Avalie a velocidade com que o topo da escada toca o chão.

### 14.3.2 Problemas sobre diferenciais

1. Se  $w = z^3 - 3z^2 + 2z - 7$ , use a diferencial  $dw$  para obter uma aproximação da variação de  $w$  quando  $z$  varia de 4 a 3,95. *Resposta.*  $\Delta w \approx -1,30$ .
2. Estima-se em 8 polegadas o raio de um disco plano circular, com margem de erro de  $\pm 0,06$  polegadas. Utilizando diferenciais, estime a margem de erro no cálculo da área do disco (uma face). Qual é o erro relativo no cálculo dessa área? *Resposta.*  $\Delta A \approx dA = 3,84\pi$  polegadas quadradas, com erro relativo de 1,5%.
3. Usando diferenciais, deduza a fórmula aproximada  $\sqrt[3]{a^3 + h} \approx a + \frac{h}{3a^2}$ . Utilize-a para calcular aproximações de  $\sqrt[3]{63}$  e  $\sqrt[3]{65}$ . (Compare com os resultados obtidos em uma calculadora eletrônica.) *Respostas.* 3,98 e 4,02.
4. Mostre que aplicando-se uma fina camada de tinta de espessura  $h$ , à superfície de uma bola esférica de área externa  $S$ , o volume da esfera sofre um acréscimo de aproximadamente  $S \cdot h$ .
5. A área  $A$  de um quadrado de lado  $s$  é dada por  $s^2$ . Para um acréscimo  $\Delta s$  de  $s$ , ilustre geometricamente  $dA$  e  $\Delta A - dA$ .

*Resposta.*  $dA$  é a área da região sombreada.

$\Delta A - dA$  é a área do quadrado menor, que aparece no canto superior direito.

