Aula 18

Ampliando o repertório de técnicas de integração

18.1 Completando quadrados

Da nossa tabela ampliada de integrais imediatas, tabela 15.1, página 135, temos as integrais da tabela 18.1 abaixo.

Tabela 18.1. ($a > 0$, $\lambda \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$$

Voltaremos nossa atenção agora ao cálculo das integrais

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \qquad I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \qquad I_4 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

nas quais, a, b, c, A e B são números reais, e $a \neq 0$.

Veremos que, para calcular cada uma das integrais I_1, I_2, I_3, e I_4, tudo (ou quase tudo) que temos a fazer é *completar um quadrado* em $ax^2 + bx + c$, e então usar a pequena tabela de integrais 18.1.

Lembramos que *completar um quadrado em* ax^2+bx+c é escrever este trinômio do segundo grau na forma $a(x+m)^2+n$.

Primeiramente, *colocamos o coeficiente* a *em evidência*:

$$\boxed{ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}$$

Completamos então o quadrado em $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$:

$$\boxed{x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}$$

Fazemos então, para o cálculo de uma das integrais I_1, I_2, I_3, e I_4, a substituição

$$\boxed{u = x+\frac{\beta}{2}, \quad du = dx}$$

e teremos

$$\boxed{x^2+\beta x+\gamma = u^2 \pm k^2}$$

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(u^2 \pm k^2)}$$

Agora, a menos de alguns pequenos ajustes, recairemos em integrais da tabela 18.1.

Exemplo 18.1 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$.

Solução. Começamos fazendo

$$\begin{aligned}2x^2+3x+1 &= 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right]\\ &= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right] = 2\left[u^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\end{aligned}$$

sendo $u = x+3/4$.

Como $du = dx$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2+3x+1} &= \int \frac{du}{2\left[u^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{1}{4}\right)^2-u^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{\frac{1}{4}+u}{\frac{1}{4}-u}\right|+C \qquad \text{(tabela 18.1)}\\ &= -\ln\left|\frac{1+4u}{1-4u}\right|+C = -\ln\left|\frac{1+4x+3}{1-(4x+3)}\right|+C\\ &= -\ln\left|\frac{4x+4}{4x+2}\right|+C = -\ln\left|\frac{2x+2}{2x+1}\right|+C = \ln\left|\frac{2x+1}{2x+2}\right|+C\end{aligned}$$

Exemplo 18.2 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

Solução. Começamos fazendo

$$\begin{aligned}
1-x-x^2 &= -(x^2+x-1) = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1\right]\\
&= -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right] = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\\
&= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Sendo, $u = x+1/2$, $du = dx$, e $x = u-1/2$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx &= \int \frac{x-1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}dx\\
&= \int \frac{u-3/2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-u^2}}du\\
&= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-u^2}}du-\frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-u^2}}du\\
&= I-\frac{1}{2}J
\end{aligned}$$

sendo $I = \displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2-u^2}}du$, e $J = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}/2)^2-u^2}}du.$

Para o cálculo de I, fazemos $w = (\sqrt{5}/2)^2-u^2$, e então $dw = -2u\,du$, e temos

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-u^2}}du = \int \frac{-\frac{1}{2}dw}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w}+C\\
&= -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-u^2} = -\sqrt{1-x-x^2}+C
\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$
\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - u^2}} du = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{\sqrt{5}/2} + C \\
&= \operatorname{arc\,sen} \frac{2u}{\sqrt{5}} + C = \operatorname{arc\,sen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx &= I - \frac{1}{2} J \\
&= -\sqrt{1-x-x^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}
$$

18.2 Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas

18.2.1 Integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, m e n inteiros não negativos

Primeiro caso: m ou n é um inteiro ímpar

Consideremos $J = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$.

Sendo m e n inteiros não negativos, no caso em que o expoente m é ímpar, teremos $m = 2k + 1$, e então

$$
\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx
\end{aligned}
$$

Agora fazemos $\cos x = t$, e então $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$, obtendo

$$
J = \int (1-t^2)^k t^n (-dt) = -\int (1-t^2)^k t^n \, dt
$$

que é uma integral de um polinômio em t.

Se m é par, mas n é ímpar, transformamos a integral J em uma integral de um polinômio, por um procedimento análogo.

Exemplo 18.3 *Calcular* $J = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx$.

Solução.

$$
\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cos^4 x \cos x \, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^6 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\
&= \int t^6 (1 - t^2)^2 \, dt, \quad \text{sendo } t = \operatorname{sen} x, \; dt = \cos x \, dx.
\end{aligned}
$$

Teremos então

$$
\begin{aligned}
J &= \int t^6 (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) \, dt \\
&= \frac{t^7}{7} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} - \frac{2 \operatorname{sen}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{sen}^{11} x}{11} + C
\end{aligned}
$$

Segundo caso: m **e** n **são ambos pares**

Neste caso, abaixamos os graus das potências de funções trigonométricas, mediante as relações

$$
\boxed{\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}} \tag{18.1}
$$

ou seja, fazemos

$$
\begin{aligned}
J &= \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2\ell} x \, dx \\
&= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos^2 x)^\ell \, dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^\ell dx
\end{aligned}
$$

Exemplo 18.4 *Calcular* $I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$.

Solução.$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$

Fazendo uso das relações trigonométricas 18.1, temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\
&= \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

Calculando separadamente as quatro integrais, temos:

$I_1 = \int dx = x$ (juntaremos adiante todas as constantes em uma só)

$I_2 = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

$$I_3 = \int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx \qquad (\cos^2 a = \tfrac{1+\cos 2a}{2})$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x$$

$$I_4 = \int \cos^3 2x\,dx \qquad \text{(potência de cosseno, de expoente ímpar!)}$$
$$= \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx$$
$$= \int (1-t^2)\cdot\frac{dt}{2} \qquad (t = \operatorname{sen} 2x,\ \ dt = 2\cos 2x\,dx, \text{ logo } \cos 2x\,dx = \tfrac{dt}{2})$$
$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}$$

Finalmente,

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$

18.3 Fórmulas de redução (ou de recorrência)

As *fórmulas de redução*, ou *fórmulas de recorrência*, freqüentemente encontradas em tábuas de integrais, são em geral obtidas através de integração por partes.

Nos exemplos abaixo, deduziremos duas delas e ilustraremos como são usadas.

Exemplo 18.5 *Sendo $n \geq 2$, deduzir a fórmula de redução*

$$\boxed{\int \sec^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\int \sec^{n-2} x\,dx} \qquad (18.2)$$

Solução. Seja $I_n = \int \sec^n x\, dx$. Temos

$$I_n = \int \sec^n x\, dx = \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_{u} \underbrace{\sec^2 x}_{dv}\, dx = uv - \int v\, du$$

Sendo $u = \sec^{n-2} x\, dx$, temos

$$\begin{aligned} du &= (n-2)\sec^{n-3} x \cdot (\sec x)' dx = (n-2)\sec^{n-3} x \cdot \sec x \operatorname{tg} x\, dx \\ &= (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x\, dx \end{aligned}$$

Sendo $dv = \sec^2 x\, dx$, tomamos $v = \operatorname{tg} x$. Daí

$$\begin{aligned} I_n = uv - \int v\, du \\ &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - \int \operatorname{tg} x \cdot (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x\, dx \\ &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\, dx \end{aligned}$$

Agora, sendo $J = \int \sec^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\, dx$, temos

$$\begin{aligned} J &= \int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1) dx = \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x) dx \\ &= \int \sec^n x\, dx - \int \sec^{n-2} x\, dx = I_n - I_{n-2} \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} I_n &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)J \\ &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2)(I_n - I_{n-2}) \end{aligned}$$

de onde

$$[1 + (n-2)]I_n = \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x + (n-2)I_{n-2}$$

e portanto

$$I_n = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

ou seja,

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$$

Exemplo 18.6 *Empregando a fórmula de redução 18.2, calcule as integrais $\int \sec^3 x\, dx$, $\int \sec^4 x\, dx$, e $\int \sec^5 x\, dx$.*

Aplicando a fórmula 18.2, que acabamos de deduzir acima, temos, quando $n = 3$,

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula 18.2, para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sec^2 x\,dx \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C\end{aligned}$$

Para $n = 5$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x\,dx = I_5 &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_3 \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{tg} x \sec x}{2} + \frac{1}{2} I_1\right) \\ &= \frac{\operatorname{tg} x \sec^3 x}{4} + \frac{3 \operatorname{tg} x \sec x}{8} + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

Exemplo 18.7 *Deduza a fórmula de recorrência*

$$\boxed{\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx}$$

e então, usando-a, calcule $\int \cos^4 x\,dx$ *e* $\int \cos^7 x\,dx$.

Solução.

$$\int \cos^n x\,dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du$$

Sendo $u = \cos^{n-1} x$, temos $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x\,dx$.

Sendo $dv = \cos x\,dx$, podemos tomar $v = \operatorname{sen} x$. Então

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x\,dx \\ &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x)\,dx \\ &= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\,dx - \int \cos^n x\,dx\right)\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \cos^n x\,dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx$$

Daí,

$$n\int \cos^n x\,dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

e então

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Deixamos para o leitor a aplicação desta fórmula, para obter

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x\cos^3 x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{3x}{8} + C$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{sen} x\cos^6 x + \frac{6}{35}\operatorname{sen} x\cos^4 x + \frac{8}{35}\operatorname{sen} x\cos^2 x + \frac{16}{35}\operatorname{sen} x + C$$

18.4 Problemas

Integrais que requerem completamento de quadrados

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + C$.
2. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$.
3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. *Resposta.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$.
4. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\,dx$. *Resposta.* $\ln|3x^2-7x+11| + C$.
5. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$. *Resposta.* $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12(3x^2+5x)}| + C$.
8. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4}\operatorname{arc\,sen}\frac{2x-1}{2} + C$.
9. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. *Resposta.* $2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$.

Integrais envolvendo funções trigonométricas

1. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.
2. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$. *Resposta.* $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$.
3. $\int \cos^4 x\operatorname{sen}^3 x\,dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$.
4. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. *Resposta.* $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$.

   Sugestão. Use o mesmo procedimento descrito à pagina 162, para o cálculo da integral $\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$, quando m ou n é um expoente ímpar.
5. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$.
6. $\int \cos^6 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{16}\left(5x + 4\operatorname{sen} 2x - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + C$.

7. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{128}\left(3x - \operatorname{sen} 4x + \frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right) + C$.
   Sugestão. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

8. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.
   Sugestão. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)$.

9. $\int \sec^3 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$.
   Sugestão. $\int \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{\sec x}_{u} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv}$. Depois, use a identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$. Alternativamente, podemos fazer
   $\int \sec^3 x\, dx = \int \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}$, e então $u = \operatorname{sen} x$.

10. $\int \sec^4 x\, dx$. *Resposta.* $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.
    Sugestão. $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x$.

11. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\, dx$. *Resposta.* $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x + 3\cos^{-1/3} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C$.
    Sugestão. Use a identidade $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ (temos também $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$).
    Faça $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, com $\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} u$ e então $dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$.

13. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{1+\cos^2 x}$. *Resposta.* $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - x + C$.
    Sugestão. Como $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, deduzimos $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ e
    $\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Faça $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arc\,tg} t$.

14. $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx$ ($a \neq b$). *Resposta.* $-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$.
    Sugestão. Considere as fórmulas abaixo, e some-as membro a membro.

$$\operatorname{sen}(a+b)x = \operatorname{sen} ax \cos bx + \operatorname{sen} bx \cos ax$$
$$\operatorname{sen}(a-b)x = \operatorname{sen} ax \cos bx - \operatorname{sen} bx \cos ax$$

15. $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx$ ($a \neq b$). *Resposta.* $\frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C$
    Sugestão. Desenvolva $\cos(a+b)x$ e $\cos(a-b)x$, e subtraia, membro a membro, uma fórmula da outra.

Fórmulas de redução

1. Deduza a fórmula de recorrência

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

e então, usando-a, calcule

(a) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$.

(b) $\int \operatorname{tg}^6 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + C$

Sugestão. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx$.

2. Deduza as fórmulas de recorrência

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx$