Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Prova Final de cálculo II

Curitiba, 19 Outubro de 2012

1. **Invertendo a Ordem de Integração:** Dado a seguinte integral $I = \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$
   - (i) Esboce a região de integração.
   - (ii) Escreva uma integral dupla equivalente com a ordem de integração invertida
   - (iii) calcule a integral

2. **Área por Integração Dupla**
   - (iv) Esboce a região limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$, depois
   - (v) Expresse a área da região como uma integral dupla iterada, finalmente
   - (vi) Calcule a integral.

3. **Volume sob uma Superfície z=f(x,y)**
   - (vii) Esboce a superfície $z = 4x^2 + y^2$ e a região triangular $\mathcal{R}$ do plano xy de vertices $(0,0,0), (1,0,0)$ e $(1,2,0)$.
   - (viii) Expresse a volume do sólido como uma integral multipla (dupla ou tripla, em coordenadas cartesianas, cilindricas ou esfericas)

   Olho:

   - (ix) Encontre o volume do sólido abaixo do gráfico de $z = 4x^2 + y^2$ e acima da região triangular $\mathcal{R}$ do plano xy de vertices $(0,0,0), (1,0,0)$ e $(1,2,0)$.

4. **Volume de um Sólido:**

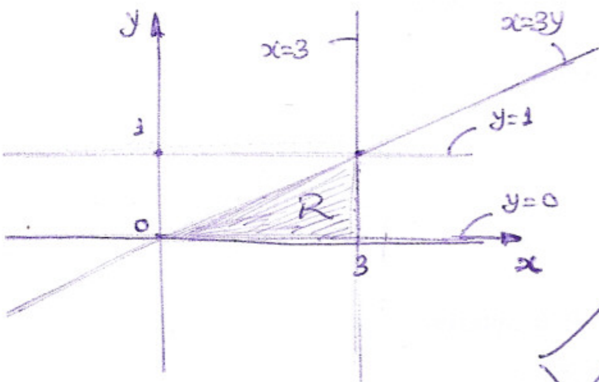
   Determinar o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $y + z = 5$ e $z = 1$
   - (x) Esboce o sólido.
   - (xi) Expresse a volume do sólido como uma integral multipla (dupla ou tripla, em coordenadas cartesianas, cilindricas ou esfericas)
   - (xii) Calcule a integral.

5. **Área da Superfície:** Determinar a área da superfície $\mathcal{S}$. Onde $\mathcal{S}$ é a superfície cortada do plano $2z + y = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
   - (xiii) Parametrização da superfície $\mathcal{S}$.
   - (xiv) Expresse a área da superfície $\mathcal{S}$ como uma integral dupla.
   - (xv) Calcule a integral.

$$I = \int_0 \int_{3y} e^{x^2}\,dx\,dy$$

$\leq y \leq 1 \Rightarrow y=0,\ y=1$

$\leq x \leq 3 \qquad x=3y,\ x=3$



$$I = \int_0^3 \int_{y=0}^{y=\frac{x}{3}} e^{x^2}\,dy\,dx$$

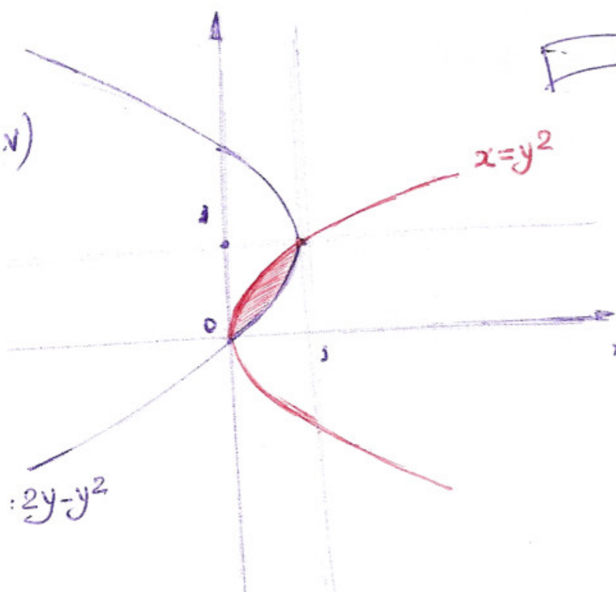
(iii)

$$I = \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^{x^2}\right)_{x=0}^{x=3}$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^9 - 1\right)$$

v)



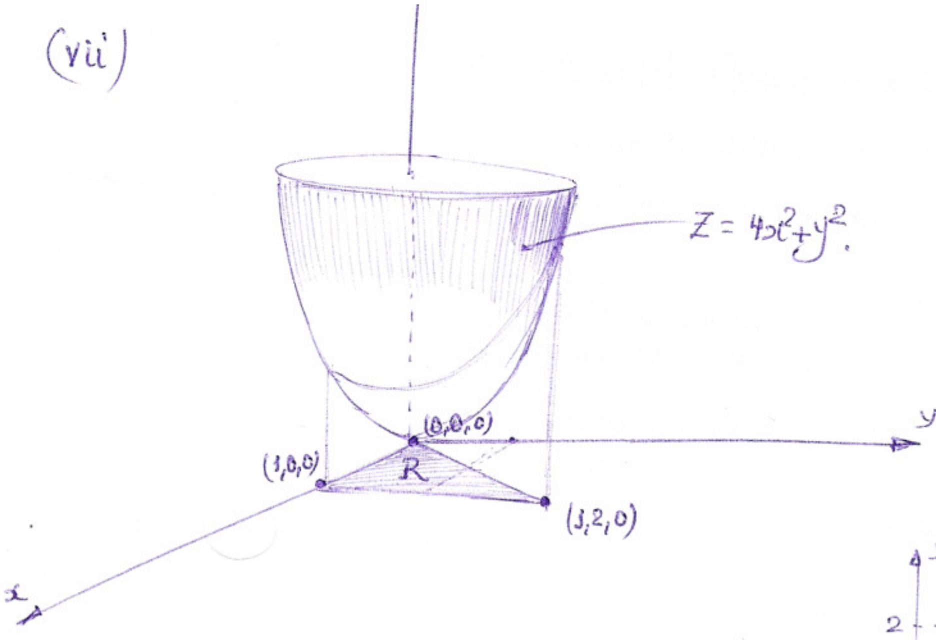
(v)

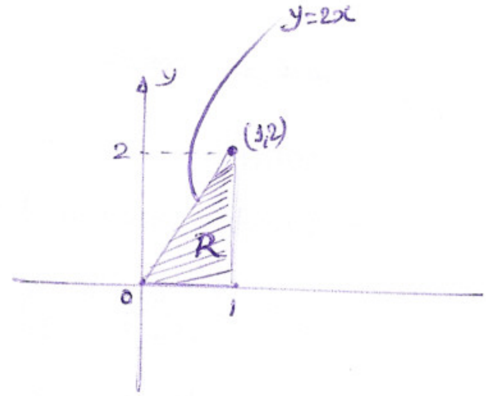
$$\text{Area} = \int_0^1 \int_{x=y^2}^{x=2y-y^2} dy$$

(vi)

$$\text{Area} = \int_0^1 (2y-y^2)-y^2\,dy$$

(vii)





(viii) $$\text{Volume} = \iint_R (4x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$\text{Volume} = \int_0^1 \int_{y=0}^{y=2x} (4x^2+y^2)\; dy\; dx$$

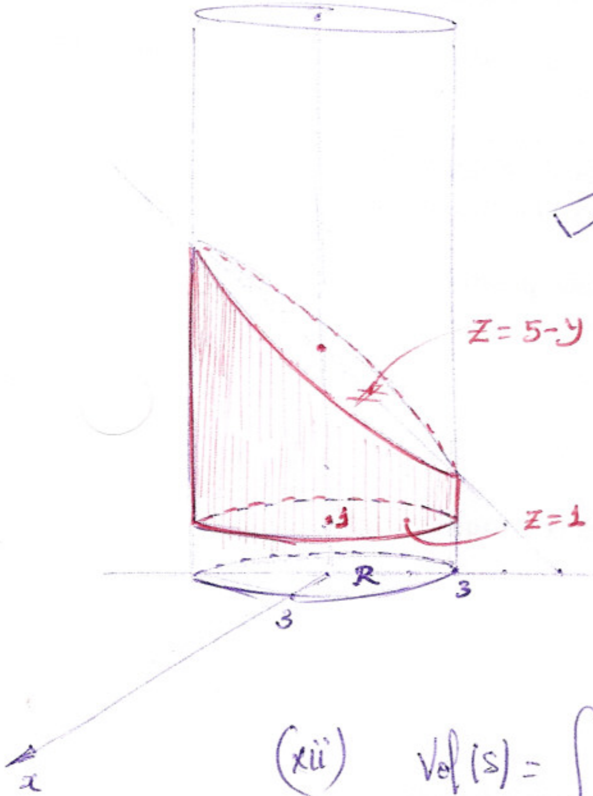
(ix) $$\text{Volume} = \int_0^1 \left(4x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(8x^3 + \frac{8}{3}x^3\right) dx$$

$$= 8 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{32}{\ }$$

(x)



(xi)

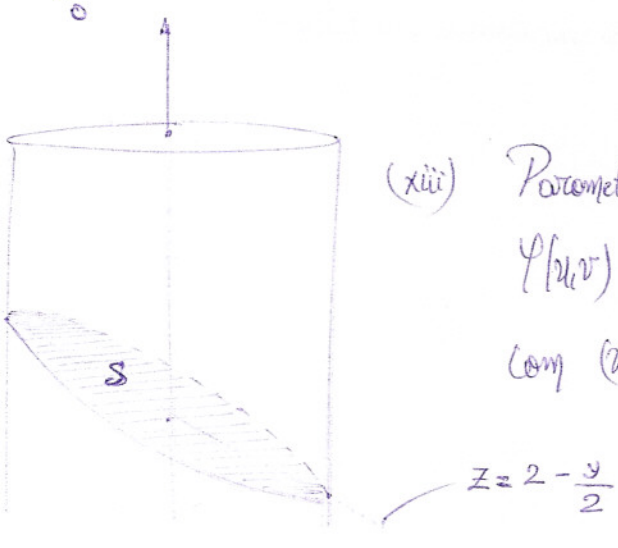
$$\text{Vol}(S) = \iint_R (5-y) - 1 \; dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (4-y)\, dx\, dy$$

(xii) $$\text{Vol}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4 - r\,\text{sen}\,\theta)\, r \; dr\, d\theta$$

$$\text{Vol}(S) = \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}\text{sen}\,\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$\text{Vol}(S) = \int_0^{2\pi} (18 - 9\,\text{sen}\,\theta)\, d\theta = 36\pi + 9\,(\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = \underline{36\pi}$$



(xiii) Parametrização de S:

$\varphi(u,v) = \left(u, v, 2 - \frac{v}{2}\right)$

com (u,v) satisfazendo: $u^2 + v^2 \leq$

iv) $\frac{\partial\psi}{\partial u} = (1,0,0)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial\psi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$\frac{\partial\psi}{\partial v} = (0,1,\frac{-1}{2})$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\| = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

v) $$\text{Area}(S) = \iint_{u^2+v^2\leq 1} \frac{\sqrt{5}}{2}\, du\,dv$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$$