(iv) Pode parecer pouco importante supor que $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ possa ser resolvida para $y^{(n)}$, mas devemos ter cuidado neste caso. Há exceções e certamente há alguns problemas ligados a essa hipótese. Veja os problemas 52 e 53 nos Exercícios 1.1.

(v) Você pode encontrar as palavras "soluções em forma fechada" em textos de ED ou em cursos sobre equações diferenciais. Traduzindo, essa frase em geral se refere a soluções explícitas que são expressas em termos de *funções elementares* (ou familiares): combinações finitas de potências inteiras de x, raízes, funções exponenciais e logarítmicas e funções trigonométricas diretas e inversas.

(vi) Se *toda* solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ em um intervalo I puder ser obtida de uma família a n parâmetros $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ por meio de uma escolha apropriada dos parâmetros $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que a família é a **solução geral** da equação diferencial. Na resolução de equações diferenciais lineares devemos impor restrições relativamente simples aos coeficientes da equação; com essas restrições, podemos nos assegurar não somente de que há uma solução em um intervalo, mas também de que uma família de soluções produz todas as soluções possíveis. EDOs não lineares, com exceção de algumas de primeira ordem, em geral são difíceis ou impossíveis de ser resolvidas em termos de funções elementares. Além disso, obter uma família de soluções para uma equação não linear não significa que essa família contém todas as soluções. Do ponto de vista prático, então, a designação "solução geral" aplica-se tão somente às EDOs. O leitor não deve preocupar-se com esse conceito neste momento, mas manter as palavras "solução geral" em mente para que este assunto seja novamente abordado na Seção 2.3 e no Capítulo 4.

EXERCÍCIOS 1.1

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-1.

Nos problemas 1-8 afirma-se a ordem de uma dada equação diferencial ordinária. Determine se a equação é linear ou não linear através de (6).

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

4. $\dfrac{d^2u}{dr^2} = +\dfrac{du}{dr} + u = \cos(r + u)$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

7. $(\operatorname{sen}\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$

8. $\ddot{x} - \left(1 - \dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$

Nos problemas 9 e 10 determine se a equação diferencial de primeira ordem dada é linear na variável dependente indicada através da primeira equação diferencial dada em (7).

9. $(y^2 - 1)dx + xdy = 0$; em y; em x

10. $udv + (v + uv - ue^u)du = 0$; em v; em u

Nos problemas 11-14, verifique que a função indicada é uma solução explícita da equação diferencial dada. Admita um intervalo de definição apropriado I.

11. $2y' + y = 0; \quad y = e^{-x/2}$

12. $\dfrac{dy}{dx} + 20y = 24; \quad y = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20t}$

13. $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos 2x$

14. $y'' + y = \operatorname{tg} x; \quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

Nos problemas 15-18 verifica-se que a função indicada $y = \phi(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem dada. Faça como apresentado no Exemplo 2, considerando ϕ simplesmente como uma *função*, apresente seu domínio. Depois, considerando ϕ como a *solução* da equação diferencial, determine ao menos um intervalo I da definição.

15. $(y - x)y' = y - x + 8; \quad y = x + 4\sqrt{x + 2}$

16. $y' = 25 + y^2; \quad y = 5\operatorname{tg} 5x$

17. $y' = 2xy^2; \quad y = 1/(4 - x^2)$

18. $2y' = y^3 \cos x; \quad y = (1 - \operatorname{sen} x)^{-1/2}$

Nos problemas 19 e 20, verifique que a expressão indicada é uma solução implícita da equação diferencial dada. Encontre pelo menos uma solução explícita $y = \phi(x)$ em cada caso. Use um programa de criação de gráficos para obter os gráficos das soluções explícitas. Encontre o intervalo de definição I de cada solução ϕ.

19. $\dfrac{dX}{dt} = (X - 1)(1 - 2X); \quad \ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t$

20. $2xy\,dx + (x^2 - y)dy = 0; \quad -2x^2y + y^2 = 1$

Nos problemas 21-24, verifique que a família de funções indicada é uma solução da equação diferencial dada. Admita um intervalo de definição I apropriado para cada solução.

21. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - P); \quad P = \dfrac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$

22. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

24. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2;$

$y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$

25. Verifique que a função definida por partes

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

é a solução de $xy' - 2y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

26. No Exemplo 3, vimos que $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ são soluções da equação diferencial $dy/dx = -x/y$ no intervalo $(-5, 5)$. Explique por que a função definida por partes

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

não é uma solução da equação diferencial no intervalo $(-5, 5)$.

Nos problemas 27-30 encontre os valores de m de forma que a função $y = e^{mx}$ seja a solução da equação diferencial dada.

27. $y' + 2y = 0$

28. $5y' = 2y$

29. $y'' - 5y' + 6y = 0$

30. $2y'' + 7y' - 4y = 0$

Nos problemas 31 e 32 encontre os valores de m de forma que a função $y = x^m$ seja solução da equação diferencial dada.

31. $xy'' + 2y' = 0$

32. $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

Nos problemas 33-36, use o conceito de que $y = c$, $-\infty < x < \infty$ é uma função constante se e somente se $y' = 0$ para determinar se a dada equação diferencial possui soluções constantes.

33. $3xy' + 5y = 10$

34. $y' = y^2 + 2y - 3$

35. $(y - 1)y' = 1$

36. $y'' + 4y' + 6y = 10$

Nos problemas 37 e 38, observe que o par de funções dado é uma solução do sistema de equações diferenciais dado no intervalo $(-\infty, \infty)$.

37. $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t},$

$y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

38. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}e^t,$

$y = -\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^t$