

quando (x_0, y_0) for um ponto interior de R . Porém, se as condições dadas na hipótese do Teorema 1.2.1 não forem satisfeitas, qualquer coisa pode ocorrer: o Problema (2) *pode* ainda ter uma solução, e essa solução *pode* ser única, ou (2) pode ter várias soluções ou ainda não ter nenhuma solução. Uma releitura do Exemplo 5 revela que as hipóteses do Teorema 1.2.1 não estão satisfeitas sobre a reta $y = 0$ para a equação diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$. Portanto, não é surpreendente, como vimos no Exemplo 4 desta seção, que haja duas soluções definidas em um intervalo comum $-h < x < h$ satisfazendo $y(0) = 0$. Entretanto, as hipóteses do Teorema 1.2.1 não se aplicam à reta $y = 1$ para a equação diferencial $dy/dx = |y - 1|$. Não obstante, pode ser provado que a solução do problema de valor inicial $dy/dx = |y - 1|$, $y(0) = 1$ é única. Você pode conjecturar qual é essa solução?

(ii) Encorajamos você a ler, pensar sobre, trabalhar e por fim ter em mente o Problema 43 nos Exercícios 1.2.

EXERCÍCIOS 1.2

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-1.

Nos problemas 1 e 2, leve em conta que $y = 1/(1 + c_1 e^{-x})$ é uma família a um parâmetro de soluções da ED de primeira ordem $y' = y - y^2$. Encontre a solução para o problema de valor inicial que consiste na equação diferencial e na condição inicial dada igual do enunciado abaixo.

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$

2. $y(-1) = 2$

Nos problemas 3-6, $y = 1/(x^2 + c)$ é uma família a um parâmetro de soluções da ED de primeira ordem $y' + 2xy^2 = 0$. [Encontre a solução de primeira ordem PVI consistindo nessa equação diferencial e na condição inicial dada.] Indique o maior intervalo I para o qual a solução é definida.

3. $y(2) = \frac{1}{3}$

5. $y(0) = 1$

4. $y(-2) = \frac{1}{2}$

6. $y\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

Nos problemas 7-10, use o fato de que $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ é uma família a dois parâmetros de soluções de $x'' + x = 0$. Encontre uma solução para a PVI de segunda ordem consistindo nesta equação diferencial e nas condições iniciais dadas.

7. $x(0) = -1$, $x'(0) = 8$

8. $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = 1/2$, $x'(\pi/6) = 0$

10. $x(\pi/4) = \sqrt{2}$, $x'(\pi/4) = 2\sqrt{2}$

Nos problemas 11-14, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ é uma família a dois parâmetros de soluções da ED de segunda ordem $y'' - y = 0$. Encontre uma solução para o problema de

valor inicial que consiste na equação diferencial e nas condições iniciais dadas.

11. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

12. $y(1) = 0$, $y'(1) = e$

13. $y(-1) = 5$, $y'(-1) = -5$

14. $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Nos problemas 15 e 16 determine, por inspeção, pelo menos duas soluções do PVI de primeira ordem dado.

15. $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$

16. $xy' = 2y$, $y(0) = 0$

Nos problemas 17-24, determine uma região do plano xy na qual a equação diferencial dada tenha uma única solução cujo gráfico passe pelo ponto (x_0, y_0) nessa região.

17. $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

18. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

19. $x \frac{dy}{dx} = y$

20. $\frac{dy}{dx} - y = x$

21. $(4 - y^2)y' = x^2$

22. $(1 + y^3)y' = x^2$

23. $(x^2 + y^2)y' = y^2$

24. $(y - x)y' = y + x$

Nos problemas 25-28, determine se o Teorema 1.2.1 garante que a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ tem uma única solução que passa pelo ponto dado.

25. (1, 4)

27. (2, -3)

26. (5, 3)

28. (-1, 1)

29. a) Determine, por inspeção, uma família a um parâmetro de soluções da equação diferencial $xy' = y$. Verifique que cada membro da família é uma solução do problema de valor inicial $xy' = y$, $y(0) = 0$.

b) Explique o item (a) determinando uma região R no plano xy para a qual a equação diferencial $xy' = y$ teria uma única solução que passasse por um ponto (x_0, y_0) em R .

c) Verifique que a função definida por partes

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisfaz a condição $y(0) = 0$. Determine se essa função é também uma solução do problema de valor inicial dado no item (a).

30. a) Verifique que $y = \tan(x + c)$ é uma família a um parâmetro de soluções da equação diferencial $y' = 1 + y^2$.

b) Uma vez que $f(x, y) = 1 + y^2$ e $\partial f / \partial y = 2y$ são contínuas, a região R do Teorema 1.2.1 pode ser tomada como o plano xy . Use a família de soluções do item (a) para encontrar uma solução explícita do problema de valor inicial de primeira ordem $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Mesmo estando $x_0 = 0$ no intervalo $-2 < x < 2$, explique por que a solução não está definida nesse intervalo.

c) Determine o maior intervalo I de definição da solução do problema de valor inicial do item (b).

31. a) Verifique que $y = -1/(x + c)$ é uma família a um parâmetro de soluções da equação diferencial $y' = y^2$.

b) Uma vez que $f(x, y) = y^2$ e $\partial f / \partial y = 2y$ são contínuas, a região R no Teorema 1.2.1 pode ser tomada como todo o plano xy . Ache uma solução da família no item (a) que satisfaça $y(0) = 1$. Então, ache uma solução da família no item (a) que satisfaça $y(0) = -1$. Determine o maior intervalo I de definição da solução de cada problema de valor inicial.

c) Determine o maior intervalo I de definição para o problema de valor inicial $y' = y^2$, $y(0) = 0$.

32. a) Mostre que uma solução da família na parte (a) do Problema 31 que satisfaz $y' = y^2$, $y(1) = 1$, é $y = 1/(2 - x)$.

b) Mostre que uma solução da família na parte (a) do Problema 31 que satisfaz $y' = y^2$, $y(3) = -1$, é $y = 1/(2 - x)$.

c) As soluções das partes (a) e (b) são as mesmas?

33. a) Verifique que $3x^2 - y^2 = c$ é uma família de soluções da equação diferencial $y \, dy/dx = 3x$.

b) Esboce à mão o gráfico da solução implícita de $3x^2 - y^2 = 3$. Ache todas as soluções explícitas $y = \phi(x)$ da ED do item (a) definidas por essa relação. Dê o intervalo I de definição de cada solução explícita.

c) O ponto $(-2, 3)$ está sobre o gráfico de $3x^2 - y^2 = 3$, mas qual das soluções explícitas no item (b) satisfaz $y(-2) = 3$?

34. a) Use a família de soluções do item (a) do Problema 33 para encontrar uma solução implícita do problema de valor inicial $y \, dy/dx = 3x$, $y(2) = -4$. Então, esboce à mão o gráfico da solução explícita desse problema e dê o seu intervalo I de definição.

b) Existe alguma solução explícita de $y \, dy/dx = 3x$ que passe pela origem?

Nos problemas 35-38 o gráfico de um membro da família de soluções de uma equação diferencial de segunda ordem $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$ é dada. Encontre a curva integral com pelo menos um par das condições iniciais indicadas.

a) $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$

d) $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

b) $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -4$

e) $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

c) $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

f) $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$

35.

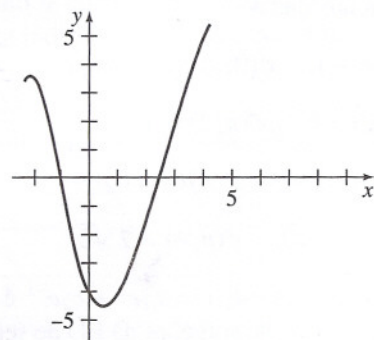


FIGURA 1.2.7 Gráfico para o Problema 35.

36.

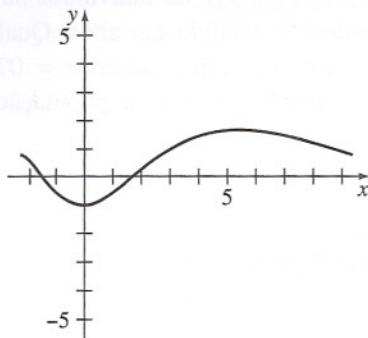


FIGURA 1.2.8 Gráfico para o Problema 36.

37.

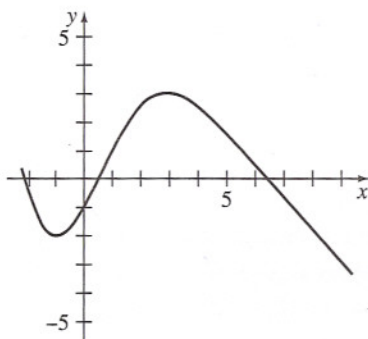


FIGURA 1.2.9 Gráfico para o Problema 37.

38.

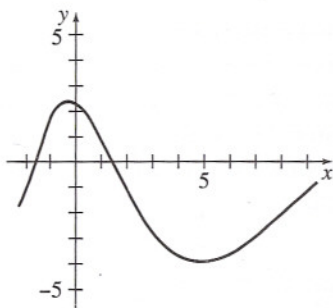


FIGURA 1.2.10 Gráfico para o Problema 38.

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

Nos problemas 39 e 40 use o Problema 51 no Exercício 1.1 e (2) e (3) desta seção.

39. Encontre uma solução para a função $y = f(x)$ para a qual o gráfico em cada ponto (x, y) tenha a inclinação dada por $8e^{2x} + 6x$ e tenha a intersecção em $y(0, 9)$.
40. Encontre uma função $y = f(x)$ para a qual a segunda derivada seja $y'' = 12x - 2$ em cada ponto (x, y) em seu gráfico e $y = -x + 5$ seja tangente ao gráfico no ponto correspondente a $x = 1$.
41. Considere o problema de valor inicial $y' = x - 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Determine qual das duas curvas mostradas na Figura 1.2.11 é a única curva integral plausível. Explique o seu raciocínio.

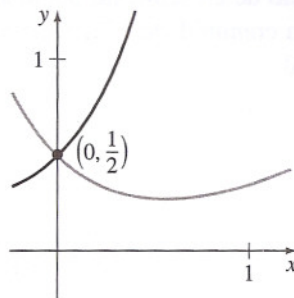


FIGURA 1.2.11 Gráfico para o Problema 41.

42. Determine um valor plausível de x_0 para o qual o gráfico da solução do problema de valor inicial $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ seja tangente ao eixo x em $(x_0, 0)$. Explique seu raciocínio.
43. Suponha que a equação diferencial de primeira ordem $dy/dx = f(x, y)$ tenha uma família a um parâmetro de soluções e que $f(x, y)$ satisfaça as hipóteses do Teorema 1.2.1 em alguma região retangular R do plano xy . Discuta por que duas curvas integrais diferentes não podem se interceptar ou ser tangentes uma à outra em um ponto (x_0, y_0) em R .
44. As funções

$$y(x) = \frac{1}{16}x^4, \quad -\infty < x < \infty \quad \text{e}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

possuem o mesmo domínio mas são claramente diferentes. Veja as figuras 1.2.12(a) e 1.2.12(b), respectivamente. Mostre que ambas as funções são soluções do problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Resolva a aparente contradição entre esse fato e a última sentença no Exemplo 5.

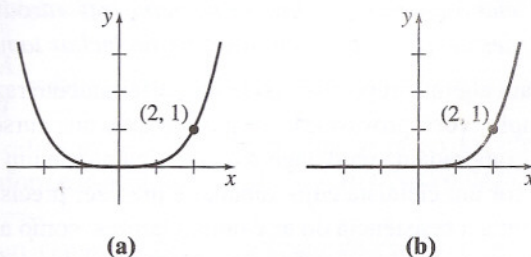


FIGURA 1.2.12 Duas soluções do PVI no Problema 44.

MODELO MATEMÁTICO

45. **Crescimento populacional.** Iniciando na próxima seção, veremos que equações diferenciais podem ser usadas para descrever ou *modelar* diversos sistemas físicos. Neste problema supomos que o