OBSERVAÇÕES

(i) Quando estiver testando uma equação para verificar se é exata ou não, verifique se ela é precisamente da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Às vezes, uma equação diferencial está escrita como $G(x, y)dx = H(x, y)dy$. Nesse caso, primeiramente reescrevemos a equação como $G(x, y)dx - H(x, y)dy = 0$ e então identificamos $M(x, y) = G(x, y)$ e $N(x, y) = -H(x, y)$ antes de usar (4).

(ii) Em alguns textos sobre equações diferenciais, o estudo de equações exatas precede o de EDs lineares. Nesse caso, o método para encontrar os fatores integrantes que acabamos de discutir pode ser usado para obter um fator integrante para $y' + P(x)y = f(x)$. Reescrevendo a última equação na forma diferencial $(P(x)y - f(x))dx + dy = 0$, vemos que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = P(x).$$

De (13) chegamos ao fator integrante já familiar $e^{\int P(x)dx}$, usado na Seção 2.3.

EXERCÍCIOS 2.4

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-3.

Nos problemas 1-20, determine se a equação diferencial dada é exata. Se for, resolva-a.

1. $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$

2. $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$

3. $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$

5. $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$

6. $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$

7. $(x^2 - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$

8. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)dy$

9. $(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)dx = (3xy^2 + 2y \cos x)dy$

10. $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$

11. $(y \ln y - e^{-xy})dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$

12. $(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$

13. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

14. $\left(1 - \frac{3}{y} + x\right)\frac{dy}{dx} + y = \frac{3}{x} - 1$

15. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1 + 9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

17. $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)dx + \cos x \cos y\, dy = 0$

18. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})dy$

19. $(4t^3y - 15t^2 - y)dt + (t^4 + 3y^2 - t)dy = 0$

20. $\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2 + y^2}\right)dt + \left(ye^y + \frac{t}{t^2 + y^2}\right)dy = 0$

Nos problemas 21-26, resolva os problemas de valor inicial dados.

21. $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0, \quad y(1) = 1$

22. $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0, \quad y(0) = 1$

23. $(4y + 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0, \quad y(-1) = 2$

24. $\left(\frac{3y^2 - t^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{t}{2y^4} = 0, \quad y(1) = 1$

25. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)dy = 0,$
$y(0) = e$

26. $\left(\frac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right)\frac{dy}{dx} = y(y + \operatorname{sen} x),$
$y(0) = 1$

Nos problemas 27 e 28, ache o valor de k tal que a equação diferencial dada seja exata.

27. $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$

28. $(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)dy = 0$

Nos problemas 29 e 30, verifique que a equação diferencial dada não é exata. Multiplique a equação diferencial pelo fator integrante $\mu(x, y)$ indicado e verifique que a nova equação é exata. Resolva-a.

29. $(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)dx + 2x \cos x\, dy = 0$;
$\mu(x, y) = xy$

30. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$;
$\mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

Nos problemas 31-36, resolva a equação diferencial dada encontrando, como no Exemplo 4, um fator integrante apropriado.

31. $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$

32. $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$

33. $6xy\, dx + (4y + 9x^2)dy = 0$

34. $\cos x dx + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right) \operatorname{sen} x\, dy = 0$

35. $(10 - 6y + e^{-3x})dx - 2dy = 0$

36. $(y^2 + xy^3)dx + (5y^2 - xy + y^3 \operatorname{sen} y)dy = 0$

Nos problemas 37 e 38, resolva o problema de valor inicial dado encontrando, como no Exemplo 4, um fator integrante apropriado.

37. $x\, dx + (x^2y + 4y)dy = 0$, $y(4) = 0$

38. $(x^2 + y^2 - 5)dx = (y + xy)dy$, $y(0) = 1$

39. a) Mostre que uma família de soluções a um parâmetro da equação

$$(4xy + 3x^2)dx + (2y + 2x^2)dy = 0$$

é $x^3 + 2x^2y + y^2 = c$.

b) Mostre que as condições iniciais $y(0) = -2$ e $y(1) = 1$ determinam a mesma solução implícita.

c) Ache soluções explícitas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação diferencial do item (a) tal que $y_1(0) = -2$ e $y_2(1) = 1$. Use um software para traçar os gráficos de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

40. Considere o conceito de fator integrante, introduzido nos problemas 29-38. As duas equações $Mdx + Ndy = 0$ e $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$ são necessariamente equivalentes no sentido de que uma solução de uma é também uma solução da outra? Discuta.

41. Releia o Exemplo 3 e então discuta por que podemos concluir que o intervalo de definição da solução explícita do PVI (a curva preta na Figura 2.4.1) é $(-1, 1)$.

42. Discuta como as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ podem ser encontradas de forma que cada equação diferencial seja exata. Leve a cabo suas ideias.

a) $M(x, y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$

b) $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \dfrac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)dy = 0$

43. As equações diferenciais são resolvidas algumas vezes por meio de uma ideia engenhosa. Eis um pequeno exercício de engenhosidade: embora a equação diferencial

$$(x - \sqrt{x^2 + y^2})dx + y\, dy = 0$$

não seja exata, mostre como o rearranjo

$$(x\, dx + y\, dy)/\sqrt{x^2 + y^2} = dx$$

e a observação de que

$$\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = x\, dx + y\, dy$$

podem levar a uma solução.

44. Falso ou verdadeiro: toda equação separável de primeira ordem $dy/dx = g(x)h(y)$ é exata.

MODELO MATEMÁTICO

45. **Corrente em queda** Uma porção de uma corrente uniforme de 8 pés de comprimento é ligeiramente enrolada ao redor de uma estaca na borda de uma plataforma horizontal elevada, e o restante da corrente fica em repouso ao longo da borda da plataforma. Veja a Figura 2.4.2. Suponha que o comprimento da corrente não enrolada é de 3 pés, pesando 2 lb/pé, e que o sentido positivo é descendente. Iniciando em $t = 0$ segundos, o peso da porção que pende faz com que a corrente na plataforma passe a se desenrolar suavemente até cair no chão. Se $x(t)$ denota o comprimento da corrente pendendo sobre a mesa no momento $t > 0$, então sua velocidade é $v = dx/dt$. Quando todas as forças