Observe que não obtivemos a solução geral da equação diferencial não linear original do Exemplo 2, uma vez que $y = 0$ é uma solução singular da equação.

REDUÇÃO A VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \tag{5}$$

pode sempre ser reduzida a uma equação com variáveis separáveis por meio da substituição $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$. O Exemplo 3 ilustra a técnica.

EXEMPLO 3 Um problema de valor inicial

Resolva $\dfrac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7$, $y(0) = 0$.

SOLUÇÃO

Se fizermos $u = -2x + y$, então $du/dx = -2 + dy/dx$. Assim, a equação diferencial é transformada em

$$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$

A última equação é separável. Usando frações parciais

$$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right]du = dx$$

e posteriormente integrando, obtemos

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1 \quad \text{ou} \quad \frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c_1} = ce^{6x}. \qquad \leftarrow \text{substitua } e^{6c_1} \text{ por } c$$

Resolvendo a última equação para u e então substituindo outra vez, obtemos a solução

$$u = \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}} \quad \text{ou} \quad y = 2x + \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}}. \tag{6}$$

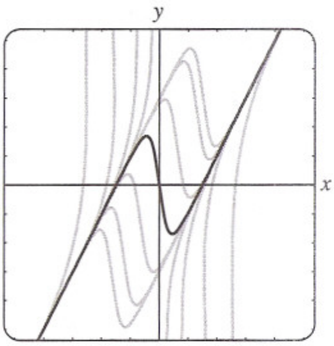

FIGURA 2.5.1 Algumas soluções de $y' = (-2x + y)^2 - 7$.

Finalmente, aplicando a condição inicial $y(0) = 0$ à última equação em (6), obtemos $c = -1$. A Figura 2.5.1, obtida com a ajuda de um software, mostra o gráfico da solução particular

$$y = 2x + \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - e^{6x}}$$

em preto, com alguns gráficos de outros membros da família de soluções (6). ■

EXERCÍCIOS 2.5

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-3.

Cada ED nos problemas 1-14 é homogênea.

Nos problemas 1-10, resolva a equação diferencial dada por meio de uma substituição apropriada.

1. $(x - y)dx + x\,dy = 0$
2. $(x + y)dx + x\,dy = 0$
3. $x\,dx + (y - 2x)dy = 0$
4. $y\,dx = 2(x + y)dy$
5. $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$
6. $(y^2 + yx)dx + x^2dy = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

9. $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0$

Nos problemas 11-14, resolva o problema de valor inicial dado.

11. $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$

12. $(x^2 + 2y^2)\dfrac{dx}{dy} = xy, \quad y(-1) = 1$

13. $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0, \quad y(1) = 0$

14. $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0, \quad y(1) = e$

Cada ED nos problemas 15-22 é uma equação de Bernoulli.

Nos problemas 15-20, resolva a equação diferencial dada por meio de uma substituição apropriada.

15. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

16. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

18. $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)y = xy^2$

19. $t^2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = ty$

20. $3(1 + t^2)\dfrac{dy}{dt} = 2ty(y^3 - 1)$

Nos problemas 21 e 22, resolva o problema de valor inicial dado.

21. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$

22. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$

Cada ED nos problemas 23-30 é da forma dada em (5).

Nos problemas 23-28, resolva a equação diferencial dada por meio de uma substituição apropriada.

23. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2(x + y)$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

28. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$

Nos problemas 29 e 30, resolva o problema de valor inicial dado.

29. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y), \quad y(0) = \pi/4$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \quad y(-1) = -1$

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

31. Explique por que é sempre possível expressar qualquer equação diferencial homogênea $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ na forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Você pode começar provando que

$$M(x, y) = x^\alpha M(1, y/x) \quad \text{e} \quad N(x, y) = x^\alpha N(1, y/x).$$

32. Coloque a equação diferencial homogênea

$$(5x^2 - 2y^2)dx - xy\,dy = 0$$

na forma descrita no Problema 31.

33. a) Determine duas soluções singulares da ED no Problema 10.

b) Se a condição inicial y(5) = 0 é como descrita no Problema 10, então qual é o maior intervalo I no qual a solução é definida? Use um software para traçar o gráfico da curva solução para o PVI.

34. No Exemplo 3, a solução $y(x)$ torna-se ilimitada quando $x \to \pm\infty$. Não obstante, $y(x)$ é assintótica a uma curva quando $x \to -\infty$ e a uma curva diferente quando $x \to \infty$. Quais são as equações dessas curvas?

35. A equação diferencial $dy/dx = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ é conhecida como **equação de Ricatti**.

a) Uma equação de Ricatti pode ser resolvida por meio de duas substituições em sequência *desde que* conheçamos uma solução particular y_1 da