De (4) da Seção 2.3 podemos escrever uma solução geral de (7):

$$i(t) = \frac{e^{-(R/L)t}}{L} \int e^{(R/L)t} E(t)dt + ce^{-(R/L)t}. \tag{10}$$

Em particular, quando $E(t) = E_0$ for uma constante, (10) vai se tornar

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-(R/L)t}. \tag{11}$$

Observe que, quando $t \to \infty$, o segundo termo da Equação (11) tende a zero. Tal termo é usualmente chamado de **termo transiente**; qualquer termo remanescente é chamado de parte permanente da solução. Nesse caso, E_0/R é também chamada de **corrente permanente ou estacionária**; para grandes valores do tempo t, a corrente no circuito parece ser governada simplesmente pela lei de Ohm ($E = iR$).

OBSERVAÇÕES

A solução $P(t) = P_0e^{0,4055t}$ do problema de valor inicial no Exemplo 1 descreve a população de uma colônia de bactérias em um instante qualquer $t > 0$. Naturalmente, $P(t)$ é uma função contínua que assume *todos* os números reais no intervalo $P_0 \leq P < \infty$. Porém, uma vez que estamos tratando de uma população, o bom senso nos diz que P pode assumir somente valores inteiros positivos. Além disso, não esperamos que a população cresça continuamente – isto é, a todo segundo ou microssegundo e assim por diante – como é previsto por nossa solução; pode haver intervalos de tempo $[t_1, t_2]$ durante os quais não há nenhum crescimento. Talvez, então, o gráfico mostrado na Figura 3.1.7(a) seja uma descrição mais realista de P do que o gráfico de uma função exponencial. Usar uma função contínua para descrever um fenômeno discreto é, muitas vezes, mais uma questão de conveniência do que de precisão. Porém, para alguns propósitos, podemos ficar satisfeitos se nosso modelo descrever o sistema com aproximação razoável quando visto macroscopicamente no tempo, como nas Figuras 3.1.7(b) e (c), em vez de microscopicamente, como na Figura 3.1.7(a).

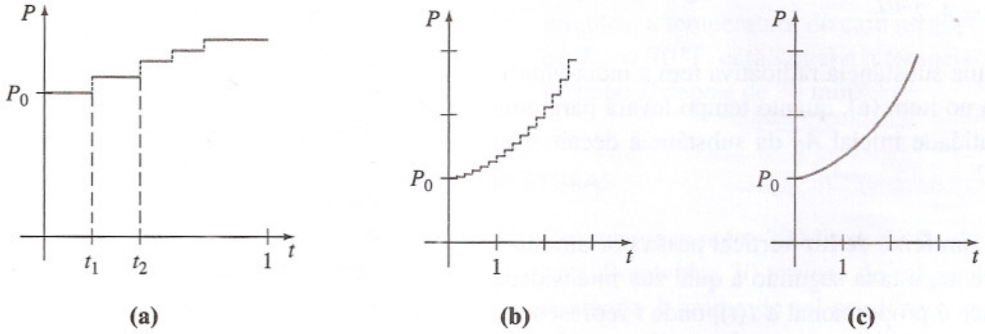

FIGURA 3.1.7 O crescimento populacional é um processo discreto.

EXERCÍCIOS 3.1

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-4.

CRESCIMENTO E DECAIMENTO

1. Sabe-se que a população de uma comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes no instante t. Se a população inicial dobrou em cinco anos, quanto levará para triplicar? E para quadruplicar?

2. Sabe-se que a população da comunidade no Problema 1 é de 10 mil após três anos. Qual era a população inicial P_0? Qual será a população em 10 anos? Qual é o crescimento populacional em $t = 10$?

3. A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população presente em um instante t. A população inicial de 500 indivíduos cresce 15% em 10 anos. Qual será a população em 30 anos? Qual é o crescimento populacional em $t = 30$?

4. A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes no instante t. Após três horas, observou-se a existência de 400 bactérias. Após 10 horas, 2 mil bactérias. Qual era o número inicial de bactérias?

5. O isótopo radioativo de chumbo, Pb-209, decai a uma taxa proporcional à quantidade presente no instante t e tem uma meia-vida de 3,3 horas. Se houver 1 grama de chumbo inicialmente, quanto tempo levará para que 90% do chumbo decaia?

6. Inicialmente, havia 100 miligramas de uma substância radioativa. Após seis horas, a massa decresceu 3%. Supondo que a taxa de decaimento é proporcional à quantidade de substância no instante t, determine a quantidade remanescente após 24 horas.

7. Determine a meia-vida da substância radioativa descrita no Problema 6.

8. a) Considere o problema de valor inicial $dA/dt = kA$, $A(0) = A_0$ como um modelo de decaimento de uma substância radioativa. Mostre que, em geral, a meia-vida T da substância é $T = -(\ln 2)/k$.

b) Mostre que a solução do problema de valor inicial no item (a) pode ser escrita como $A(t) = A_0 2^{-t/T}$.

c) Se uma substância radioativa tem a meia-vida T dada no item (a), quanto tempo levará para uma quantidade inicial A_0 da substância decair para $\frac{1}{8}A_0$?

9. Quando um feixe de luz vertical passa por um meio transparente, a taxa segundo a qual sua intensidade I decresce é proporcional a $I(t)$, onde t representa a espessura do meio (em pés). Em água do mar limpa, a intensidade 3 pés abaixo da superfície é 25% da intensidade inicial I_0 do feixe incidente. Qual é a intensidade do feixe 15 pés abaixo da superfície?

10. Quando juros são compostos continuamente, o valor em dinheiro cresce a uma taxa proporcional à quantia S presente no instante t – isto é, $dS/dt = rS$, onde r é a taxa de juros anual.

a) Determine a quantia acumulada ao fim de cinco anos quando \$ 5.000 for depositado em uma poupança com rendimento de $5\frac{3}{4}\%$ de juros anuais compostos continuamente.

b) Em quantos anos a quantia inicial depositada dobrará?

c) Use uma calculadora para comparar a quantia obtida no item (a) com a quantia $S = 5.000(1 + \frac{1}{4}(0{,}0575))^{5(4)}$ acumulada quando os juros são compostos trimestralmente.

DATAÇÃO POR CARBONO

11. Arqueologistas usaram pedaços de madeira queimada ou carvão encontrados em um sítio para datar pinturas pré-históricas e desenhos nas paredes e no teto de uma caverna em Lascaux, França. Veja a Figura 3.1.8. Use as informações da página 87 para determinar a idade aproximada de um pedaço de madeira queimado, se tivesse sido descoberto que 85,5% do C-14 encontrado em árvores vivas da mesma espécie havia decaído.

FIGURA 3.1.8 Pintura na caverna de Lascaux do Problema 11.

12. O sudário de Turim mostra a imagem, em negativo, do corpo de um homem que aparentemente foi crucificado, e que muitos acreditam ser de Jesus de Nazaré. Veja a Figura 3.1.9. Em 1988, o Vaticano deu a permissão para datar por carbono o sudário. Três laboratórios científicos e independentes analisaram o tecido e concluíram que o sudário tinha aproximadamente 660 anos[3], idade consistente com seu aparecimento histórico. Usando essa idade, determine a porcentagem da quantidade original de C-14 remanescente no tecido em 1988.

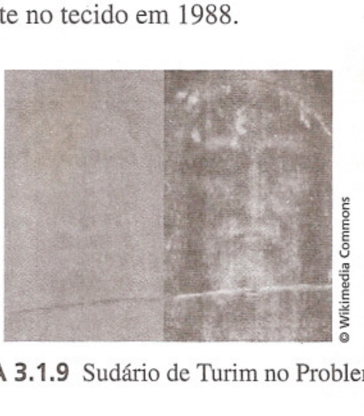

FIGURA 3.1.9 Sudário de Turim no Problema 12.

3. Alguns eruditos discordaram dessa descoberta. Para mais informações sobre esse fascinante mistério, veja a *home page* Shroud of Turin no site http://www.shroud.com.

LEI DO ESFRIAMENTO/AQUECIMENTO DE NEWTON

13. Um termômetro é removido de uma sala onde a temperatura ambiente é de 70 °F e levado para fora, onde a temperatura é de 10 °F. Após meio minuto, o termômetro indica 50 °F. Qual será a leitura no termômetro em $t = 1$ min? Quanto tempo levará para o termômetro atingir 15 °F?

14. Um termômetro é levado para fora de um quarto, onde a temperatura ambiente é 5 °F. Após 1 minuto, o termômetro marca 55 °F, e após 5 minutos, 30 °F. Qual era a temperatura inicial interna do quarto?

15. Uma pequena barra de metal, cuja temperatura inicial é de 20 °C, é colocada em um grande recipiente com água fervendo. Quanto tempo levará para a barra atingir 90 °C se sabemos que sua temperatura aumenta 2° em 1 segundo? Quanto tempo levará para a barra atingir 98 °C?

16. Dois grandes recipientes A e B, de mesmo tamanho, são preenchidos com fluidos diferentes. Os fluidos nos recipientes A e B são mantidos em 0 °C e 100 °C, respectivamente. Uma pequena barra metálica, cuja temperatura inicial é de 100 °C, é colocada dentro do recipiente A. Após 1 minuto a temperatura da barra é de 90 °C. Após 2 minutos, a barra é removida e imediatamente transferida para o outro recipiente. Depois de um minuto no recipiente B a temperatura da barra sobe 10 °C. Quanto tempo, medidos a partir do início de todo o processo, a barra vai levar para chegar a 99,9 °C?

17. Um termômetro marcando 70 °F é colocado em um forno pré-aquecido a uma temperatura constante. Através de uma janela na porta do forno, um observador verifica que o termômetro marca 110 °F após 1/2 min e 145 °F após 1 min. Qual é a temperatura do forno?

18. Em $t = 0$ um tubo de ensaio selado contendo um produto químico é imerso em um banho líquido. A temperatura inicial da substância química no tubo de ensaio é de 80 °F. O banho de líquido tem uma temperatura controlada (medida em graus Fahrenheit) dada por $T_m(t) = 100 - 40e^{-0,1t}$, $t \geq 0$, em que t é medido em minutos.

a) Suponha que $k = -0,1$ em (2). Antes de resolver o PVI, descreva em palavras como você espera que a temperatura $T(t)$ do produto químico dentro do tubo de ensaio se comporte no curto prazo. E no longo prazo?

b) Resolva o problema de valor inicial. Use um software para traçar o gráfico de $T(t)$ em intervalos de tempo de vários comprimentos. Será que os gráficos estão em acordo com suas previsões na parte (a)?

19. Um corpo foi encontrado dentro de uma sala fechada de uma casa onde a temperatura era constante em 70 °F. No instante da descoberta a temperatura do núcleo do corpo foi medido e era 85 °F. Uma hora depois, uma segunda medição mostrou que a temperatura do núcleo do corpo era 80 °F. Suponha que o momento da morte corresponde a $t = 0$ e que a temperatura naquele momento era 98,6 °F. Determine quantas horas se passaram antes da descoberta do corpo. [*Sugestão*: Faça $t_1 > 0$ denotar o instante em que o corpo foi descoberto.]

20. A taxa na qual um corpo esfria depende também da sua área de superfície exposta S. Se S é uma constante, uma modificação de (2) é

$$\frac{dT}{dt} = kS(T - T_m),$$

em que $k < 0$ e T_m é uma constante. Suponha que duas xícaras A e B são enchidas de café ao mesmo tempo. Inicialmente, a temperatura do café é 150 °F. A superfície exposta do café no copo B é o dobro da área da superfície do café na xícara A. Após 30 minutos, a temperatura do café no copo A é 100 °F. Se $T_m = 70$ °F, então qual é a temperatura do café no copo B depois de 30 min?

MISTURAS

21. Um tanque contém 200 litros de fluido no qual foram dissolvidos 30 gramas de sal. Uma salmoura contendo 1 grama de sal por litro é então bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 4 L/min; a solução bem misturada é bombeada para fora à mesma taxa. Ache o número $A(t)$ de gramas de sal no tanque no instante t.

22. Resolva o Problema 21 supondo que seja bombeada água pura para dentro do tanque.

23. Um grande tanque é enchido completamente com 500 galões de água pura. Uma salmoura contendo 2 libras por galão é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 gal/min. A solução bem misturada é bombeada para fora à mesma taxa. Ache a quantidade $A(t)$ de libras de sal no tanque no instante t.

24. No Problema 23, qual é a concentração de $c(t)$ do sal no tanque no instante t? Em $t = 5$ min? Qual é a concentração de sal no tanque depois de um longo período tempo, ou seja, $t \to \infty$? Em que instante a concentração de sal no tanque será igual a metade do valor desta limitação?

25. Resolva o Problema 23 sob a hipótese de que a solução é bombeada para fora a uma taxa de 10 gal/min. Quando o tanque ficará vazio?

26. Determine a quantidade de sal no tanque no instante t no Exemplo 5, se a concentração de sal na entrada é variável e dada por $c_e(t) = 2 + \text{sen}(t/4)$ lb/gal. Sem utilizar gráficos, descreva como a curva da solução do PVI seria. Em seguida, use um software para traçar o gráfico da solução no intervalo [0, 300]. Repita o procedimento para o intervalo [0, 600] e compare o gráfico com o apresentado na Figura 3.1.4(a).

27. Um grande tanque está parcialmente cheio com 100 galões de um fluido no qual foram dissolvidas 10 libras de sal. Uma salmoura contendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galão é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 6 gal/min. A solução bem misturada é então bombeada para fora a uma taxa de 4 gal/min. Ache a quantidade de libras de sal no tanque após 30 minutos.

28. No Exemplo 5, o tamanho do tanque contendo a mistura de sal não foi dado. Suponha, como na discussão do Exemplo 5, que a taxa na qual salmoura é bombeada para o reservatório é de 3 gal/min, mas que a solução misturada é bombeada para fora a uma taxa de 2 gal/min. É claro que, uma vez que a salmoura está se acumulando no tanque a uma taxa de 1 gal/min, qualquer tanque finito deve, mais cedo ou mais tarde, derramar. Suponha agora que o tanque tenha uma tampa aberta e uma capacidade total de 400 galões.

a) Quando o tanque transbordará?

b) No instante em que estiver transbordando, qual será a quantidade de libras de sal no tanque?

c) Suponha que, embora o tanque esteja transbordando, a solução salina continue a ser bombeada para dentro a uma taxa de 3 gal/min e a solução bem misturada continue a ser bombeada para fora a uma taxa de 2 gal/min. Crie um método para determinar a quantidade de libras de sal no tanque no instante $t = 150$ min.

d) Determine a quantidade de libras de sal no tanque quando $t \to \infty$. Sua resposta está de acordo com a sua intuição?

e) Use um software para obter o gráfico de $A(t)$ no intervalo [0, 500).

CIRCUITOS EM SÉRIE

29. Uma força eletromotriz de 30 volts é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,1 henry e a resistência é de 50 ohms. Ache a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$. Determine a corrente quando $t \to \infty$.

30. Resolva a Equação (7) supondo que $E(t) = E_0 \text{ sen } \omega t$ e $i(0) = i_0$.

31. Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito em série RC no qual a resistência é de 200 ohms e a capacitância é 10^{-6} farads. Ache a carga $q(t)$ no capacitor se $q(0) = 0$. Ache a corrente $i(t)$.

32. Uma força eletromotriz de 200 volts é aplicada a um circuito em série RC no qual a resistência é de 1.000 ohms e a capacitância é 5×10^{-6} farads. Ache a carga $q(t)$ no capacitor se $i(0) = 0{,}4$. Determine a carga e a corrente em $t = 0{,}005$ s. Determine a carga quando $t \to \infty$.

33. Uma força eletromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t \le 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

é aplicada em um circuito em série LR no qual a indutância é de 20 henrys e a resistência é de 2 ohms. Ache a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$.

34. Suponha que um circuito em série RC tenha um resistor variável. Se a resistência no instante t for $R = k_1 + k_2 t$, onde k_1 e k_2 são constantes positivas conhecidas, então (9) torna-se

$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Se $E(t) = E_0$ e $q(0) = q_0$, onde E_0 e q_0 são constantes, mostre que

$$q(t) = E_0 C + (q_0 - E_0 C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 t}\right)^{1/Ck_2}.$$

MODELOS LINEARES VARIADOS

35. **Resistência do ar** Em (14) da Seção 1.3 vimos que uma equação diferencial governando a velocidade v de uma massa em queda sujeita à resistência do ar proporcional à velocidade instantânea é

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade. O sentido positivo é para baixo.

a) Resolva a equação sujeita à condição inicial $v(0) = v_0$.

b) Use a solução do item (a) para determinar a velocidade limite ou terminal da massa. Vimos como a velocidade terminal é determinada sem resolver a ED no Problema 40, nos Exercícios 2.1.

c) Se a distância s, medida do ponto onde a massa foi abandonada até o solo, estiver relacionada com a velocidade por $ds/dt = v(t)$, ache uma expressão explícita para $s(t)$, se $s(0) = 0$.

36. Quão Alto? – Sem Resistência do Ar Suponha que uma pequena bala de canhão, de 16 libras, seja atirada verticalmente para cima, conforme ilustrado na Figura 3.1.10, a uma velocidade inicial $v_0 = 300$ pés/s. A resposta à questão "qual é a altura atingida pela bala?" depende de se levar ou não em consideração a resistência do ar.

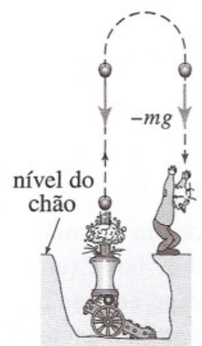

FIGURA 3.1.10 Encontre a altura máxima da bala de canhão no Problema 36.

a) Suponha que a resistência do ar seja ignorada. Se o sentido positivo for para cima, então o modelo governando o movimento da bala é dado por $d^2s/dt^2 = -g$ (Equação (12) da Seção 1.3). Como $ds/dt = v(t)$, a última equação diferencial é o mesmo que $dv/dt = -g$, em que tomamos $g = 32$ pés/s^2. Encontre a velocidade da bala $v(t)$ no instante t.

b) Use o resultado obtido na parte (a) para determinar a altura $s(t)$ da bala medida a partir do solo. Ache a altura máxima atingida pela bala.

37. Quão Alto? – Resistência do Ar Linear Repita o Problema 36, mas agora suponha que a resistência do ar seja proporcional à velocidade instantânea. É claro que a altura máxima atingida pela bala deve ser *menor* que a obtida no item (b) do Problema 36. Mostre isso supondo que a constante de proporcionalidade seja $k = 0{,}0025$. [*Sugestão*: Você terá de modificar ligeiramente a ED do Problema 35.]

38. Paraquedismo Uma paraquedista pesa 125 libras e seu paraquedas e equipamento, juntos, pesam 35 libras. Depois de saltar do avião, a uma altura de 15 mil pés, ela espera 15 segundos e abre o paraquedas. Suponha que a constante de proporcionalidade no modelo do Problema 35 tenha o valor $k = 0{,}5$ durante a queda livre e $k = 10$ depois que o paraquedas é aberto. Suponha que sua velocidade inicial depois de saltar do avião seja zero. Qual é sua velocidade e que distância ela percorreu 20 segundos depois de ter saltado do avião? Veja a Figura 3.1.11. Compare a velocidade após 20 segundos com a velocidade terminal. Quanto tempo leva para ela atingir o solo? [*Sugestão:* Pense em termos de dois PVIs distintos.]

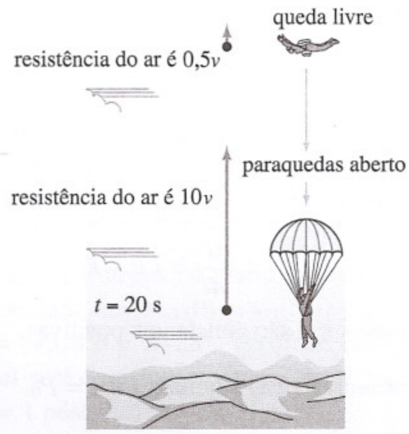

FIGURA 3.1.11 Encontre o tempo para alcançar o chão no Problema 38.

39. Evaporamento da gota de chuva À medida que uma gota de chuva cai, ela se evapora, mantendo sua forma esférica. Supondo ainda que a taxa segundo a qual a gota evapora é proporcional à área de sua superfície e que a resistência do ar é desprezível, a velocidade $v(t)$ da gota de chuva é dada por

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t + r_0}v = g.$$

Aqui, ρ é a densidade da água, r_0 é o raio da gota em $t = 0$, $k < 0$ é a constante de proporcionalidade e o sentido positivo é considerado para baixo.

a) Determine $v(t)$, se a gota cair do repouso.

b) Leia novamente o Problema 34 nos Exercícios 1.3 e mostre que o raio da gota no instante t é $r(t) = (k/\rho)t + r_0$.

c) Se $r_0 = 0{,}01$ pés e se $r = 0{,}007$ pés, dez segundos depois que a gota cai de uma nuvem, determine o tempo no qual a gota se evapora completamente.

40. Flutuação populacional A equação diferencial $dP/dt = (k \cos t)P$, onde k é uma constante positiva, é um modelo matemático para a população $P(t)$ que sofre flutuações sazonais anuais. Resolva a equação sujeita a $P(0) = P_0$. Use um programa para obter o gráfico de solução para diferentes escolhas de P_0.

41. Modelo populacional Em um modelo de variação populacional $P(t)$ de uma comunidade, supõe-se que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt},$$

onde dB/dt e dD/dt são as taxas de natalidade e mortalidade, respectivamente.

a) Resolva a equação, supondo $dB/dt = k_1 P$ e $dD/dt = k_2 P$.

b) Analise os casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ e $k_1 < k_2$.

42. Pesca-constante Determine um modelo que descreva a população de pescado cuja pesca ocorra em uma taxa constante dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP - h,$$

em que k e h são constantes positivas.

a) Resolva a ED sujeita a $P(0) = P_0$.

b) Descreva o comportamento da população $P(t)$ conforme o passar do tempo em três casos: $P_0 > h/k$, $P_0 = h/k$ e $0 < P_0 < h/k$.

c) Use os resultados da parte (b) para determinar se a população de peixes jamais se extingue em um tempo finito, ou seja, se existe um tempo $T > 0$ tal que $P(T) = 0$. Se a população se extingue, em seguida, encontre T.

43. Difusão de uma droga A taxa segundo a qual uma droga se difunde no fluxo sanguíneo é dada por

$$\frac{dx}{dt} = r - kx,$$

onde r e k são constantes positivas. A função $x(t)$ descreve a concentração da droga no fluxo sanguíneo no instante t.

a) Uma vez que a ED é autônoma, use o conceito de retrato de fase da Seção 2.1 para encontrar o valor limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$.

b) Resolva a ED sujeita a $x(0) = 0$. Esboce o gráfico de $x(t)$ e verifique sua predição no item (a). Em que instante a concentração é a metade do valor limite?

44. Memorização Quando o esquecimento é levado em conta, a taxa de memorização de um determinado tópico é dada por

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2 A,$$

onde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $A(t)$ é a quantidade a ser memorizada no tempo t, M é a quantidade total a ser memorizada e $M - A$ é a quantidade que resta para ser memorizada.

a) Uma vez que a ED é autônoma, use o conceito de retrato de fase da Seção 2.1 para encontrar o valor limite de $A(t)$ quando $t \to \infty$. Interprete o resultado.

b) Resolva a equação para determinar $A(t)$, sujeita a $A(0) = 0$. Esboce o gráfico de $A(t)$ e verifique a sua predição no item (a).

45. Marca-passo cardíaco Um marca-passo cardíaco, mostrado na Figura 3.1.12, consiste de uma chave, uma bateria, um capacitor, e o coração como um resistor. Quando a chave S esteja em P, o capacitor se carrega, quando S esteja em Q, o capacitor descarrega, enviando um estímulo elétrico para o coração. No Problema 47 nos Exercícios 2.3 vimos que, durante esse tempo em que o estímulo elétrico é aplicado para o coração, a tensão E através do coração satisfaz a ED linear

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E.$$

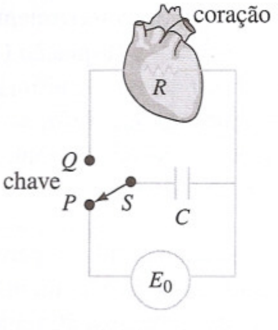

FIGURA 3.1.12 Modelo de um marca-passo no Problema 45.

a) Vamos supor que, durante o intervalo de tempo t_1, $0 < t < t_1$, a chave S esteja na posição P mostrada na Figura 3.1.12 e o capacitor esteja sendo carregado. Quando a chave é movida para a posição Q no instante t_1 o capacitor descarrega, enviando um impulso para o coração durante o intervalo de tempo t_2: $t_1 \le t < t_1 + t_2$.

Assim, durante o processo inicial de carregamento/descarregamento $0 < t < t_1 + t_2$, a tensão para o coração é realmente modelada pela equação diferencial definida por partes

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_1 \\ -\frac{1}{RC}E, & t_1 \le t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

Movendo S entre P e Q, o carregamento e descarregamento em intervalos de tempo t_1 e t_2 é repetido indefinidamente. Suponha $t_1 = 4$ s, $t_2 = 2$ s, $E_0 = 12$ V, e $E(0) = 0$, $E(4) = 12$, $E(6) = 0$, $E(10) = 12$, $E(12) = 0$ e assim por diante. Resolva $E(t)$ para $0 \le t \le 24$.

b) Suponha a título de ilustração que $R = C = 1$. Use uma ferramenta gráfica para determinar a curva para o PVI na parte (a) para $0 \le t \le 24$.

46. Caixa deslizante

a) Uma caixa de massa m desliza por um plano inclinado de ângulo θ com a horizontal, como mostrado na Figura 3.1.13. Encontre uma equação diferencial para a velocidade $v(t)$ da caixa no instante t em cada um dos três casos seguintes:

i) Ausência de atrito e resistência do ar

ii) Com atrito e ausência de resistência do ar

iii) Com atrito e resistência do ar

Nos casos (ii) e (iii), use o fato de que a força de atrito que se opõe ao movimento da caixa é μN, onde μ é o coeficiente de atrito de deslizamento e N é o componente normal do peso da caixa. No caso (iii) assuma que a resistência do ar é proporcional à velocidade instantânea.

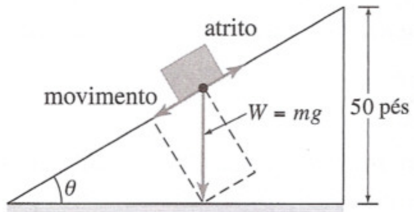

FIGURA 3.1.13 Caixa deslizando sobre um plano inclinado no Problema 46.

b) Na parte (a), suponha que a caixa pesa 96 libras, que o ângulo de inclinação do plano é de $u = 30°$, que o coeficiente de atrito de deslizamento é de $\mu = \sqrt{3}/4$ e que a força de retardamento adicional devido à resistência do ar é numericamente igual a $\frac{1}{4}v$. Resolva a equação diferencial em cada um dos três casos, assumindo que a caixa começa a partir do repouso no ponto mais alto 50 pés acima do solo.

47. Caixa deslizante – continuação

a) No Problema 46, suponha $s(t)$ como a distância medida até o plano inclinado do ponto mais alto. Use $ds/dt = v(t)$ e a solução para cada um dos três casos na parte (b) do Problema 46 para encontrar o tempo que a caixa leva para deslizar o plano inclinado completamente. Um aplicativo para a determinação de raízes de um SAC pode ser útil aqui.

b) No caso onde há atrito ($\mu \neq 0$), mas sem resistência do ar, explique por que a caixa não irá escorregar no plano a partir do *repouso* do ponto mais alto em relação ao solo quando o ângulo de inclinação θ satisfaz $\theta \le \mu$.

c) A caixa escorrega no plano quando $\operatorname{tg}\theta \le m$ e velocidade inicial $v(0) = v_0 > 0$. Suponha que $\mu = \sqrt{3}/4$ e $u = 23°$. Verifique que $\operatorname{tg}\theta \le m$. Qual será o deslocamento da caixa no plano se $v_0 = 1$ pés/s?

d) Sendo $\mu = \sqrt{3}/4$ e $\theta = 23°$, estime a menor velocidade inicial v_0 que a caixa deve ter para, iniciando do ponto mais alto (50 pés acima do chão), escorregar completamente no plano inclinado. Encontre ainda o tempo total deste movimento.

48. Tudo o que sobe...

a) É bem sabido que o modelo no qual a resistência do ar é ignorada (item (a) do Problema 36) prediz que o tempo t_a que uma bala de canhão leva para atingir sua altura máxima é igual ao tempo t_d que a bala leva para cair de sua altura máxima ao solo. Além disso, a magnitude da velocidade de impacto v_i será igual à velocidade inicial v_0 da bala de canhão. Verifique esses resultados.

b) Então, usando o modelo do Problema 37, que leva em conta a resistência do ar, compare os valores de t_a com t_d e o valor da magnitude de v_i com v_0. Um aplicativo para encontrar raízes de um SAC (ou uma calculadora gráfica) pode ser muito útil aqui.