EXERCÍCIOS 4.1

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-5.

4.1.1 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL E PROBLEMAS DE CONTORNO

Nos problemas 1-4, a família dada de funções é a solução geral da equação diferencial no intervalo indicado. Ache um membro da família que seja uma solução do problema de valor inicial.

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$;
$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

2. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$, $(-\infty, \infty)$;
$y'' - 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

3. $y = c_1x + c_2x\ln x$, $(0, \infty)$;
$x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -1$

4. $y = c_1 + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$;
$y''' + y' = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = -1$

5. Considerando que $y = c_1 + c_2x^2$ é uma família de soluções a dois parâmetros de $xy'' - y' = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, mostre que não existe nenhum membro da família que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; isto é, não podem ser encontradas as constantes c_1 e c_2. Explique por que isso não viola o Teorema 4.1.1.

6. Ache dois membros da família de soluções do Problema 5 que satisfaçam as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

7. Dado que $x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t$ é a solução geral de $x'' + \omega^2x = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, mostre que uma solução que satisfaça as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x_1$ é dada por

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{x_1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t.$$

8. Use a solução geral de $x'' + \omega^2x = 0$ dada no Problema 7 para mostrar que uma solução satisfazendo as condições $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x_1$ é a solução dada no Problema 7, deslocada por t_0 unidades:

$$x(t) = x_0\cos\omega(t - t_0) + \frac{x_1}{\omega}\operatorname{sen}\omega(t - t_0).$$

Nos problemas 9 e 10, encontre um intervalo centrado em $x = 0$ para o qual o problema de valor inicial dado tem uma única solução.

9. $(x - 2)y'' + 3y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' + (\operatorname{tg} x)y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11. a) Use a família do Problema 1 para encontrar uma solução de $y'' - y = 0$ que satisfaça as condições de contorno $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

b) A ED na parte (a) tem a solução geral alternativa $y = c_3\cosh x + c_4\operatorname{senh} x$ para $(-\infty, \infty)$. Use essa família para encontrar uma solução que satisfaça as condições de contorno na parte (a).

c) Mostre que as soluções nas partes (a) e (b) são equivalentes.

12. Use a família do Problema 5 para encontrar uma solução de $xy'' - y' = 0$ que satisfaça as condições de contorno $y(0) = 1$ e $y'(1) = 6$.

Nos problemas 13 e 14, a família a dois parâmetros é uma solução da equação diferencial indicada no intervalo $(-\infty, \infty)$. Verifique se pode ser encontrado um membro da família que satisfaça as condições de contorno.

13. $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\operatorname{sen} x; \quad y'' - 2y' + 2y = 0$

a) $y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$

b) $y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1$

c) $y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

d) $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

14. $y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3; \; x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$

a) $y(-1) = 0, \quad y(1) = 4$

b) $y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

c) $y(0) = 3, \quad y(1) = 0$

d) $y(1) = 3, \quad y(2) = 15.$

4.1.2 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Nos problemas 15-22, determine se o conjunto de funções dado é linearmente independente no intervalo $(-\infty, \infty)$.

15. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = 4x - 3x^2$

16. $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = e^x$

17. $f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

18. $f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = \cos^2 x$

19. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = x + 3$

20. $f_1(x) = 2 + x, \quad f_2(x) = 2 + |x|$

21. $f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$

22. $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \operatorname{senh} x$

Nos problemas 23-30, verifique se as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial no intervalo indicado. Construa a solução geral.

23. $y'' - y' - 12y = 0; \quad e^{-3x}, e^{4x}, (-\infty, \infty)$

24. $y'' - 4y = 0; \quad \cosh 2x, \operatorname{senh} 2x, (-\infty, \infty)$

25. $y'' - 2y' + 5y = 0; \quad e^x \cos 2x, e^x \operatorname{sen} 2x, (-\infty, \infty)$

26. $4y'' - 4y' + y = 0; \quad e^{x/2}, xe^{x/2}, (-\infty, \infty)$

27. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0; \quad x^3, x^4, (0, \infty)$

28. $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad \cos(\ln x), \operatorname{sen}(\ln x), (0, \infty)$

29. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0;$
$x, x^{-2}, x^{-2} \ln x, (0, \infty)$

30. $y^{(4)} + y'' = 0; \quad 1, x, \cos x, \operatorname{sen} x, (-\infty, \infty)$

4.1.2 EQUAÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS

Nos problemas 31-34, verifique se a família de funções a dois parâmetros dada é a solução geral da equação diferencial não homogênea no intervalo indicado.

31. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x;$
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x, (-\infty, \infty)$

32. $y'' + y = \sec x;$
$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x),$
$(-\pi/2, \pi/2)$

33. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12;$
$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2, (-\infty, \infty)$

34. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x;$
$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x, (0, \infty)$

35. a) Verifique que $y_{p_1} = 3e^{2x}$ e $y_{p_2} = x^2 + 3x$ são, respectivamente, soluções particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$
e
$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$$

b) Use o item (a) para encontrar soluções particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$$
e
$$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}.$$

36. a) Por inspeção, ache uma solução particular de

$$y'' + 2y = 10.$$

b) Por inspeção, ache uma solução particular de

$$y'' + 2y = -4x.$$

c) Ache uma solução particular de

$$y'' + 2y = -4x + 10.$$

d) Ache uma solução particular de

$$y'' + 2y = 8x + 5.$$

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

37. Seja $n = 1, 2, 3. \ldots$ Discuta como as observações $D^nx^{n-1} = 0$ e $D^nx^n = n!$ podem ser usadas para encontrar as soluções gerais das equações diferenciais dadas.

a) $y'' = 0$
b) $y''' = 0$
c) $y^{(4)} = 0$
d) $y'' = 2$
e) $y''' = 6$
f) $y^{(4)} = 24$

38. Suponha que $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ sejam duas soluções de uma equação diferencial linear homogênea. Explique por que $y_3 = \cosh x$ e $y_4 = \operatorname{senh} x$ são também soluções da equação.

39. a) Verifique que $y_1 = x^3$ e $y_2 = |x|^3$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Mostre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo número real x. Esse resultado viola o Teorema 4.1.3? Explique.

c) Verifique que $Y_1 = x^3$ e $Y_2 = x^2$ também são soluções linearmente independentes da equação diferencial do item (a) no intervalo $(-\infty, \infty)$.

d) Ache uma solução da equação diferencial que satisfaça $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.