SOLUÇÃO

Da forma padrão da equação,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

encontramos de (5) que

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 \int \frac{e^{\int dx/x}}{x^4} dx, & \leftarrow e^{\int dx/x} = e^{\ln x^3} = x^3 \\ &= x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln x. \end{aligned}$$

A solução geral em $(0, \infty)$ é dada por $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$; isto é, $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$. ■

OBSERVAÇÕES

- (i) A dedução e o uso da fórmula (5) foram ilustrados aqui, pois essa fórmula aparece novamente na próxima seção, e nas Seções 4.7 e 6.2. Usamos (5) simplesmente para poupar tempo na obtenção do resultado desejado. Seu professor vai instruí-lo se é necessário memorizar ou saber os princípios de redução de ordem.
- (ii) A redução de ordem pode ser usada para encontrar a solução geral de uma equação não homogênea $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ sempre que uma solução y_1 da equação homogênea associada for conhecida. Veja os problemas 17 a 20 nos Exercícios 4.2.

EXERCÍCIOS 4.2

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-6.

Nos problemas 1-16, a função indicada $y_1(x)$ é uma solução da equação diferencial dada. Use redução de ordem ou a fórmula (5), conforme foi ensinado, para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$.

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{2x}$
2. $y'' + 2y' + y = 0$; $y_1 = xe^{-x}$
3. $y'' + 16y = 0$; $y_1 = \cos 4x$
4. $y'' + 9y = 0$; $y_1 = \sin 3x$
5. $y'' - y = 0$; $y_1 = \cosh x$
6. $y'' - 25y = 0$; $y_1 = e^{5x}$
7. $9y'' - 12y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{2x/3}$
8. $6y'' + y' - y = 0$; $y_1 = e^{x/3}$
9. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$; $y_1 = x^4$
10. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; $y_1 = x^2$
11. $xy'' + y' = 0$; $y_1 = \ln x$
12. $4x^2y'' + y = 0$; $y_1 = x^{1/2} \ln x$

13. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y_1 = x \sin(\ln x)$
14. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$; $y_1 = x^2 \cos(\ln x)$
15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$; $y_1 = x + 1$
16. $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 0$; $y_1 = 1$

Nos problemas 17-20, a função indicada $y_1(x)$ é uma solução da equação homogênea associada. Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ da equação homogênea e uma solução particular da equação não homogênea dada.

17. $y'' - 4y = 2$; $y_1 = e^{-2x}$
18. $y'' + y' = 1$; $y_1 = 1$
19. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$; $y_1 = e^x$
20. $y'' - 4y' + 3y = x$; $y_1 = e^x$

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

21. a) Dê uma demonstração convincente de que a equação de segunda ordem $ay'' + by' + cy = 0$, sendo a , b e c constantes, tem sempre, pelo menos, uma solução do tipo $y_1 = e^{m_1x}$, sendo m_1 uma constante.