

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = c \quad \text{ou} \quad \frac{x+y}{1-xy} = c.$$

À medida que você percorrer as várias seções que se seguem, tenha em mente que as famílias de soluções podem ser equivalentes no sentido de que uma família pode ser obtida da outra renomeando-se a constante ou aplicando-se álgebra e trigonometria. Veja os problemas 27 e 28 nos Exercícios 2.2.

EXERCÍCIOS 2.2

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-2.

Nos problemas 1-22, resolva, por separação de variáveis, as equações diferenciais dadas.

1. $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$

2. $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$

3. $dx + e^{3x} dy = 0$

4. $-dy - (y-1)^2 dx = 0$

5. $x \frac{dy}{dx} = 4y$

6. $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

7. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

8. $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

9. $y \ln x \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$

10. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

11. $\operatorname{cosec} y \, dx + \sec^2 x \, dy = 0$

12. $\sin 3x \, dx + 2y \cos^3 3x \, dy = 0$

13. $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$

14. $x(1+y^2)^{1/2} dx = y(1+x^2)^{1/2} dy$

15. $\frac{dS}{dr} = kS$

16. $\frac{dQ}{dt} = k(Q-70)$

17. $\frac{dP}{dt} = P - P^2$

18. $\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

21. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$

22. $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = y^2$

Nos problemas 23-28, encontre uma solução explícita para o problema de valor inicial dado.

23. $\frac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), x(\pi/4) = 1$

24. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, y(2) = 2$

25. $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy, y(-1) = -1$

26. $\frac{dy}{dt} + 2y = 1, y(0) = \frac{5}{2}$

27. $\sqrt{1-y^2} dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0, y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

28. $(1+x^4) dy + x(1+4y^2) dx = 0, y(1) = 0$

Nos problemas 29 e 30, faça como no Exemplo 5 e encontre uma solução explícita para o problema de valor inicial dado.

29. $\frac{dy}{dx} = ye^{-x^2}, y(4) = 1$

30. $\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x^2, y(-2) = \frac{1}{3}$

31. a) Ache uma solução para o problema de valor inicial que consista na equação diferencial dada no Exemplo 3 e nas condições iniciais $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$ e $y(\frac{1}{4}) = 1$.

b) Ache a solução da equação diferencial dada no Exemplo 4 quando, na solução do lado esquerdo, $\ln c_1$ for usado como constante de integração e $4 \ln c_1$ for substituído por $\ln c$. Resolva então o mesmo problema de valor inicial dado no item (a).

32. Ache uma solução de $x \frac{dy}{dx} = y^2 - y$ que passe pelos pontos indicados.

- a) (0, 1) b) (0, 0) c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ d) $(2, \frac{1}{4})$

33. Ache uma solução singular para o Problema 21. Faça o mesmo com o Problema 22.

34. Mostre que uma solução implícita de

$$2x \sin^2 y \, dx - (x^2 + 10) \cos y \, dy = 0$$

é dada por $\ln(x^2 + 10) + \operatorname{cosec} y = c$. Ache as soluções constantes, se houver, que foram perdidas na solução da equação diferencial.

Frequentemente, uma pequena mudança nas condições iniciais ou na própria equação corresponde a uma mudança radical na forma das soluções. Nos problemas 35-38, ache uma solução explícita do problema de valor inicial dado. Use um software gráfico para traçar o gráfico de cada solução. Compare cada curva integral em uma vizinhança de (0, 1).

35. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1$

36. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1,01$

37. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2 + 0,01, \quad y(0) = 1$

38. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2 - 0,01, \quad y(0) = 1$

39. Toda equação de primeira ordem autônoma $dy/dx = f(y)$ é separável. Ache soluções explícitas $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$ da equação diferencial $dy/dx = y - y^3$ que satisfaça, respectivamente, as condições iniciais $y_1(0) = 2, y_2(0) = \frac{1}{2}, y_3(0) = -\frac{1}{2}$ e $y_4(0) = -2$. Use um software gráfico para traçar cada solução. Compare esses gráficos com os que foram preditos no Problema 19 dos Exercícios 2.1. Dê o intervalo exato de definição para cada solução.

40. a) A equação diferencial de primeira ordem autônoma $dy/dx = 1/(y - 3)$ não tem pontos críticos; não obstante, coloque três na reta de fase e obtenha um retrato de fase da equação. Compute d^2y/dx^2 para determinar onde as curvas in-

tegrais são côncavas para cima e côncavas para baixo (veja os problemas 35 e 36 nos Exercícios 2.1). Use o retrato de fase e a concavidade para esboçar, à mão, algumas curvas integrais típicas.

b) Ache soluções explícitas, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ e $y_4(x)$, da equação diferencial no item (a), que satisfaçam, respectivamente, as condições iniciais $y_1(0) = 4, y_2(0) = 2, y_3(1) = 2$ e $y_4(-1) = 4$. Faça o gráfico de cada solução e compare-o com os esboços do item (a). Dê o intervalo exato de definição de cada solução.

41. a) Ache uma solução explícita do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{2y}, \quad y(-2) = -1.$$

b) Use um software gráfico para traçar o gráfico da solução do item (a). Use o gráfico para estimar o intervalo I de definição da solução.

c) Determine o intervalo exato I de definição por meio de métodos analíticos.

42. Repita os itens (a) a (c) do Problema 41 para o problema de valor inicial que consiste na equação diferencial dada no Problema 7 e na condição inicial $y(0) = 0$.

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

43. a) Explique por que o intervalo de definição da solução explícita $y = \phi_2(x)$ do problema de valor inicial dado no Exemplo 2 é o intervalo aberto $(-5, 5)$.

b) Alguma solução da equação diferencial pode cruzar o eixo x ? Você acha que $x^2 + y^2 = 1$ é uma solução implícita do problema de valor inicial $dy/dx = -x/y, y(1) = 0$?

44. a) Se $a > 0$, discuta as diferenças, se houver, entre as soluções dos problemas de valor inicial que consistem na equação diferencial $dy/dx = x/y$ e em cada uma das condições iniciais $y(a) = a, y(a) = -a, y(-a) = a$ e $y(-a) = -a$.

b) O problema de valor inicial $dy/dx = x/y, y(0) = 0$ tem uma solução?

c) Resolva $dy/dx = x/y, y(1) = 2$ e dê o intervalo exato I de definição de sua solução.

45. Nos problemas 39 e 40, vimos que toda equação diferencial de primeira ordem autônoma $dy/dx = f(y)$ é separável. Esse fato ajuda na solução do problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + y^2} \sin^2 y, y(0) = \frac{1}{2}$. Discuta. Esboce à mão uma curva integral plausível do problema.