

OBSERVAÇÕES

- (i) Em geral, uma ED linear de qualquer ordem é dita homogênea quando $g(x) = 0$ em (6) da Seção 1.1. Por exemplo, a ED linear de segunda ordem $y'' - 2y' + 6y = 0$ é homogênea. Como pode ser visto neste exemplo e no caso especial (3) desta seção, a solução trivial $y = 0$ é sempre uma solução de uma ED linear homogênea.
- (ii) Ocasionalmente, uma equação diferencial de primeira ordem não é linear em uma variável, mas o é na outra. Por exemplo, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$$

não é linear na variável y . Mas sua recíproca

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^2$$

é linear na variável x . Observe que, usando o fator integrante $e^{\int (-1)dy} = e^{-y}$ e integrando por partes, obtemos uma solução implícita para a segunda equação: $x = -y^2 - 2y - 2 + ce^y$. Esta equação é uma solução implícita da primeira equação.

- (iii) Os matemáticos “adotaram” como suas determinadas palavras da engenharia, as quais consideraram apropriadamente descritivas. A palavra *transiente*, usada anteriormente, é um desses termos. Em discussões futuras, as palavras *entrada* e *saída* vão ser empregadas ocasionalmente. A função f em (2) é chamada de **entrada** ou **função forçante**; a solução da equação diferencial para uma dada *entrada* é chamada de **saída** ou **resposta**.
- (iv) O termo **funções especiais** mencionado em conjunto com a função de erro também se aplica à **função integral do seno** e à **integral do seno de Fresnel** introduzido nos problemas 49 e 50 nos Exercícios 2.3. “Funções especiais” é, na verdade, um ramo bem definido da matemática. Mais funções especiais são estudadas na Seção 6.3.

EXERCÍCIOS 2.3

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-2.

Nos problemas 1-24, ache a solução geral da equação diferencial dada. Dê o maior intervalo I sobre o qual a solução geral está definida. Determine se há termos transientes na solução geral.

1. $\frac{dy}{dx} = 5y$

2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

4. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$

5. $y' + 3x^2y = x^2$

6. $y' + 2xy = x^3$

7. $x^2y' + xy = 1$

8. $y' = 2y + x^2 + 5$

9. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$

10. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$

11. $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

12. $(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

13. $x^2y' + x(x+2)y = e^x$

14. $xy' + (1+x)y = e^{-x} \sin 2x$

15. $ydx - 4(x+y^6)dy = 0$

16. $ydx = (ye^y - 2x)dy$

17. $\cos x \frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$

18. $\cos^2 x \sin x \frac{dy}{dx} + (\cos^3 x)y = 1$

19. $(x+1) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$

20. $(x+2)^2 \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

21. $\frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$

22. $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

23. $x \frac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x}$

24. $(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2$

Nos problemas 25-30, resolva o problema de valor inicial dado. Dê o maior intervalo I sobre o qual a solução está definida.

25. $xy' + y = e^x, y(1) = 2$

26. $y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2, y(1) = 5$

27. $L \frac{di}{dt} + Ri = E, i(0) = i_0; L, R, E$ e i_0 constantes

28. $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), T(0) = T_0; k, T_m$ e T_0 constantes

29. $(x+1) \frac{dy}{dx} + y = \ln x, y(1) = 10$

30. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, y(0) = -1$

Nos problemas 31-34, proceda como no Exemplo 6 para resolver o problema de valor inicial dado. Use um software gráfico para representar a função contínua $y(x)$.

31. $\frac{dy}{dx} + 2y = f(x), f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}, y(0) = 0$

32. $\frac{dy}{dx} + y = f(x), f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}, y(0) = 1$

33. $\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x), f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, y(0) = 2$

34. $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = f(x),$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}, y(0) = 0$$

35. Proceda de forma análoga ao Exemplo 6 para resolver o problema de valor inicial $y' + P(x)y = 4x, y(0) = 3$, onde

$$P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2/x, & x > 1 \end{cases}$$

Use um software para traçar a função contínua $y(x)$.

36. Considere o problema de valor inicial $y' + e^x y = f(x), y(0) = 1$. Expresse a solução do PVI para $x > 0$ como uma integral não elementar quando $f(x) = 1$. Qual é a solução quando $f(x) = 0$? E quando $f(x) = e^x$?

37. Expresse a solução do problema de valor inicial $y' - 2xy = 1, y(1) = 1$ em termos de $\operatorname{erf}(x)$.

PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

38. Releia o segundo parágrafo após o Exemplo 2. Construa uma equação diferencial linear de primeira ordem para a qual todas as soluções não constantes se aproximam da assíntota horizontal $y = 4$ quando $x \rightarrow \infty$.

39. Releia o Exemplo 3 e discuta, com base no Teorema 1.2.1, a existência e unicidade de uma solução do problema de valor inicial que consiste em $xy' - 4y = x^6 e^x$ e na condição inicial dada.

a) $y(0) = 0$

b) $y(0) = y_0, y_0 > 0$

c) $y(x_0) = y_0, x_0 > 0, y_0 > 0$

40. Releia o Exemplo 4 e então encontre a solução geral da equação diferencial no intervalo $(-3, 3)$.

41. Releia a discussão imediatamente após o Exemplo 5. Construa uma equação diferencial linear de primeira ordem para a qual todas as soluções são assintóticas à reta $y = 3x - 5$ quando $x \rightarrow \infty$.

42. Releia o Exemplo 6 e discuta por que é tecnicamente incorreto dizer que a função em (13) é uma "solução" do PVI no intervalo $[0, \infty)$.

43. a) Construa uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma $xy' + a_0(x)y = g(x)$ para a qual $y_c = c/x^3$ e $y_p = x^3$. Dê um intervalo no qual $y = x^3 + c/x^3$ seja a solução geral da ED.