

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} prova de cálculo II

Curitiba, 12 de Dezembro de 2005

1. A posição de uma partícula é dada por:

$$r(t) = (\sin t)i + (\cos 2t)j$$

- a) Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b) Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - c) Para quais valores de t , no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, $\frac{dr}{dt}$ é igual a 0.
2. Represente graficamente a curva $r^2 = 4 \cos \theta$
3. No instante $t = 0$, uma partícula está localizada no ponto $A(1, 2, 3)$. Ela percorre uma linha reta até o ponto $B(4, 1, 4)$, tem módulo de velocidade 2 em $C(1, 2, 3)$ e aceleração constante $3i - j + k$. Encontre uma equação para o vetor posição $r(t)$ da partícula no instante t .
4. Encontre o comprimento da curva

$$r(t) = (\sqrt{2}t)i + (\sqrt{2}t)j + (1 - t^2)k$$

de $(0, 0, 1)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

5. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -ti - tj - tk \\ r(0) = 1i + 2j + 3k \end{cases}$$

1^{ra} prova de cálculo II

Curitiba, 25 de Agosto de 2006

1. (1,5 pontos) Determine as representações explícitas em coordenadas polares das seguintes curvas:
- a.- O círculo de raio r centrado no ponto $P(r, 0)$.
 - b.- O círculo de raio r com centro no ponto $P(0, r)$.
 - c.- A parábola $x = y^2$.

2. (1,5 pontos) A posição de uma partícula é dada por: $r(t) = (\sin t)i + (\cos 2t)j$
 - a.- Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b.- Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - c.- Para quais valores de t , no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, $\frac{dr}{dt}$ é igual a 0.
3. (1,5 pontos) A aceleração de uma partícula é dada por $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -(i+j+k)$ Utilizando as condições de contorno $\frac{dr(0)}{dt} = 0$ e $r(0) = 10i + 10j + 10k$ determine:
 - a) O vetor velocidade da partícula;
 - b) O vetor posição da partícula.
4. (2 pontos) determine a curvatura das curvas abaixo nos pontos indicados:
 - a) $y = x^3$ em um ponto arbitrário.
 - b) $xy = 12$ no ponto $P(3, 4)$.
 - c) $x^2 + 4y^2 = 4$ nos pontos $P(0, 1)$ e $Q(2, 0)$.
5. (2 pontos) Determine os valores de a, b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ tenha, no ponto $P(\frac{\pi}{2}, 1)$, tangente e curvatura comuns com a senóide $y = \sin x$.

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 21 de Março de 2007

1. (2 pontos) A posição de uma partícula é dada por: $r(t) = (4 \cos t) \mathbf{i} + (\sqrt{2} \sin t) \mathbf{j}$
 - a.- Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b.- Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - c.- Encontre o ângulo entre os vetores velocidade e aceleração no ponto $P(2\sqrt{2}, 1)$
 - d.- Determine a reta tangente e reta normal no ponto da curva de instante $t = \frac{\pi}{4}$.
2. (1 pontos) Em que instantes no intervalo $0 \leq t \leq \pi$ os vetores velocidade e aceleração do movimento $r(t) = \mathbf{i} + 5 \cos t \mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k}$ são ortogonais. ?
3. (2 pontos) encontre o ponto na curva $r(t) = 12 \sin t \mathbf{i} - 12 \cos t \mathbf{j} + 5t \mathbf{k}$ a uma distância de 13π unidades ao longo da curva a partir do ponto $(0, -12, 0)$, quando $t = 0$, no sentido oposto ao sentido do comprimento de arco crescente.
4. (2 pontos) Uma partícula percorrendo uma linha reta está localizada no ponto $A(1, -1, 2)$ e tem módulo de velocidade 2 no instante $t = 0$. A partícula se move em direção ao ponto $B(3, 0, 3)$ com aceleração constante $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Encontre seu vetor posição $r(t)$ no instante t .
5. (2 pontos) Determine os valores de a, b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ tenha, no ponto $P(\frac{\pi}{2}, 1)$, tangente e curvatura comuns com a senóide $y = \sin x$.

6. (1 pontos) Verifique se existe ou não os seguintes limites:

$$\text{a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + x^2 + y} \qquad \text{b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}.$$

Fórmula para o cálculo da curvatura de uma curva. Quando $y = f(x)$ é a representação explícita da curva:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 7 de Abril de 2008

1. Dois pássaros voam segundo os seguintes vetores posição:

$$\sigma_1(t) = (2t^2, 2 + t^2, 2) \qquad \text{e} \qquad \sigma_2(t) = (1 - t, 1 + t^2, 2)$$

- a) Mostre que eles nunca se chocarão;
 - b) Esboce os caminhos sobre os quais os pássaros se movem. Determine caso, existam os pontos onde estes caminhos se cruzam.
 - c) Calcule as velocidades dos pássaros no instante $t = 2$.
 - d) Calcule a distância percorrida em tempo positivo pelo primeiro pássaro entre os pontos $A(0, 2, 2)$ e $B(2, 3, 2)$.
2. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (1 - t^2, 2t, \cos t)$ onde a reta tangente é perpendicular ao plano $\pi x + y - z + 12 = 0$.
3. Determine os valores de a, b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ tenha, no ponto $P(\frac{\pi}{2}, 1)$, tangente e curvatura comuns com a senóide $y = \sin x$.
4. Seja S a superfície definida por $z = \sqrt{y^2 - 4x^2}$.
- (i) Determine e esboce o domínio da função
 - (ii) Descreva a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k = -1, k = 0$ e $k = 1$.
 - (iii) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz .
5. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}, \qquad (b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x - y)}{x^4 + y^4};$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 21 de Março de 2007

1. Uma partícula desloca-se no plano obedecendo a lei:

$$\sigma : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(t) = (t^2 - t, t).$$

- a)(0,5) Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
- b) (0,5) Encontre os vetores velocidade e aceleração no instante t .
- c)(0,5) Encontre o ângulo entre os vetores velocidade e aceleração no ponto $P(0, 1)$
- d)(1,0) Determine a reta tangente e reta normal no ponto da curva de instante $t = 0$.
2. Considere a função $f(x, y) = \frac{x}{y^2 + x}$
- a)(0,5) Detemine o domínio de f .
- b) (1,5) Esboce as curvas de nível $f(x, y) = k$ para $k = 0$, $k = 1$ e para um valor de k em cada um dos intervalos $] - \infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$. Indique no desenho o k correspondente a cada curva.
- c) (0,5) Existe o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?
3. (1 ponto) No instante $t = 0$, uma partícula está localizada no ponto $A(1, 2, 3)$. Ela percorre uma linha reta até o ponto $B(4, 1, 4)$, tem módulo de velocidade 2 em $A(1, 2, 3)$ e aceleração constante $3i - j + k$. Encontre uma equação para o vetor posição $r(t)$ da partícula no instante t .
4. (2 pontos) Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $r(t) = t i + (\sin t) j$ no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$
5. (2 pontos) Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que as seguintes funções não limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

a) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + x^2 + y}$

b) $g(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y}$.

Fórmula para o cálculo da curvatura de uma curva. Quando $y = f(x)$ é a representação explícita da curva:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

1^{ra} Prova de Cálculo Integral Diferencial II
Curitiba, 7 de Abril de 2008

1. Dois carros R_1 e R_2 percorrem, respectivamente, as estradas $BR - 01$ e $BR - 02$, tendo seus movimentos descritos por :

$$\sigma_1(t) = (t + 2, 2t + 1) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (t^2, 2t^4 - \frac{9}{2}), \quad t \geq 0.$$

Quais afirmações abaixo são verdadeiras:

- a) As duas estradas não se cruzam;
 - b) As duas estradas se cruzam num ponto só;
 - c) as duas estradas se cruzam em dois pontos;
 - d) Os carros baterão;
 - e) Os carros não baterão.
2. O comprimento do caminho percorrido por uma partícula que se move ao longo da curva dada pela equação $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ entre os pontos do plano $(1, 0)$ e $(0, e^{\pi/2})$ é:

- (a) $\sqrt{e^\pi - 1}$
- (b) $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$
- (c) $e^{\pi/2} - 1$
- (d) $\sqrt{2}(1 - e^{\pi/2})$
- (e) Nenhuma das opções acima.

3. Seja S a superfície definida por $z = \sqrt{y^2 - 4x^2}$.

- (i) Determine e esboce o domínio da função
- (ii) Descreva a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k = -1$, $k = 0$ e $k = 1$.
- (iii) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz .

4. Determine os valores de a, b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ tenha, no ponto $P(\frac{\pi}{2}, 1)$, tangente e curvatura comuns com a senóide $y = \sin x$.

5. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3 - 1}{xy - 1}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y};$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 7 de Abril de 2008

1. Dois pássaros voam segundo os seguintes vetores posição:

$$\sigma_1(t) = (2t^2, 2 + t^2, 2) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (1 - t, 1 + t^2, 2)$$

- a) Mostre que eles nunca se chocarão;
- b) Esboce os caminhos sobre os quais os pássaros se movem. Determine caso, existam os pontos onde estes caminhos se cruzam.
- c) Calcule as velocidades dos pássaros no instante $t = 2$.
- d) Calcule a distância percorrida em tempo positivo pelo primeiro pássaro entre os pontos $A(0, 2, 2)$ e $B(2, 3, 2)$.

Figure 1: O conjunto típico Ω

2. COMPRIMENTO DE ARCO

- (a) definição
- (b) Usando a definição dada em (a), calcule o comprimento de :

$$\gamma_1(t) = (1 - \cos t, t - \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

3. GRÁFICOS E CURVAS DE NÍVEL

Seja S a superfície definida por $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

- (i) Determine e esboce o domínio da função
- (ii) Descreva a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k = 0, k = 1$ e $k = 2$.
- (iii) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz .

4. CURVATURA

- (a) definição
- (b) Considere a curva $\sigma_1(t) = (2 \cos t, \sin t)$; $\forall t \in \mathbb{R}$. Determine os pontos do traço de σ_1 onde a curvatura é máxima e os pontos onde é mínima.

5. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4 + y^4};$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 25 de Agosto de 2008

1. Esboce as curvas dadas pelas equações paramétricas abaixo

a) $x = \sin t, \quad y = \cos 2t, \quad t \in [0, 2\pi].$

b) $x = \cos t, \quad y = -3 + (\sin t)^2, \quad t \in [0, \pi].$

2. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$ onde a reta tangente é horizontal e vertical.

3. Calcule o comprimento de: $\gamma_1(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t), \quad t \in [0, \pi];$

4. Determine a curvatura, o raio de curvatura e a equação do círculo de curvatura da parábola $y = x^2 - 2x + 2$ no ponto $(1, 1)$.

5. Uma haste, presa na origem do plano xy , ocupa a posição da reta $y = tx$. A haste intercepta a reta $x = 2$ no ponto A e o círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ no ponto B . Quando t varia, o ponto P , que está localizado sobre a haste de modo que $|OP| = |AB|$, descreve uma curva. Escreva as equações paramétricas desta curva, em função do parâmetro t .

Formulario:

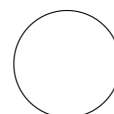
$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b ||\sigma'(t)|| dt \dots \text{Comprimento de arco}$$

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \dots \text{curvatura no ponto } (x, f(x)).$$

$$\rho(x) = \frac{1}{k(x)} \dots \text{raio de curvatura no ponto } (x, f(x)).$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 25 de Agosto de 2008

1. Esboce as curvas dadas pelas equações paramétricas abaixo
 - a) $x = \cos^2 t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$.
 - b) $x = t^2 - 4, \quad y = 1 - t, \quad t \in [-1, 1]$.
2. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$ onde a reta tangente é horizontal e vertical.
3. Calcule o comprimento de: $\gamma_1(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}, \quad t \in [0, \pi/2]$.
4. Determine a curvatura, o raio de curvatura e a equação do círculo de curvatura da parábola $y = x^2 - 6x + 11$ no ponto $(2, 3)$.
5. Uma haste, presa na origem do plano xy , ocupa a posição da reta $y = tx$. A haste intercepta a reta $x = 2$ no ponto A e o círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ no ponto B . Quando t varia, o ponto P , que está



localizado sobre a haste de modo que

$|OP| = |AB|$, descreve uma curva.

Escreva as equações paramétricas desta curva, em função do parâmetro t .

Formulario:

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \dots \text{Comprimento de arco}$$

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \dots \text{curvatura no ponto } (x, f(x)).$$

$$k(t) =$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 23 de Março de 2009

1. Seja $r(t) = (\frac{e^{4t}}{4} - t, e^{2t})$ vetor posição de uma partícula no instante t .
 - (a) Encontre o instante, ou instantes em que os vetores velocidades e aceleração são ortogonais
 - (c) Determine a reta tangente e reta normal no ponto $(\frac{1}{4}, 1)$ da curva.
 - (d) Determine o comprimento da trajetória da partícula para $-2 \leq t \leq 2$.
 - (e) Determine a curvatura no ponto $(\frac{1}{4}, 1)$
2. Encontre o ponto da parábola $y = x^2 + 2x$ onde o raio de curvatura seja mínimo. (justifique sua resposta)

Formulario:

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \dots \text{Comprimento de arco}$$

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \dots \text{curvatura no ponto } (x, f(x)).$$

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}} \dots \text{curvatura no ponto } (x(t), y(t)).$$

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 9 de setembro de 2009

1. A posição de uma partícula é dada por: $r(t) = (\cos^2 t, \sin t)$
 - a) Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b) Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - c) Para quais valores de $t \in [0, 2\pi]$ a velocidade é nula.
2. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$ onde a reta tangente é paralela ao plano $x + 3y + 2z - 10 = 0$.
3. Calcule o comprimento de: $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t)\mathbf{i} + (e^{-t} \sin t)\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.
4. Determine o(s) ponto(s) da curva $y = x^3 - 27x - 5$ onde o raio de curvatura é mínimo.

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 9 de setembro de 2009

1. A posição de uma partícula em movimento é dada por: $r(t) = (\frac{1-t}{1+t}, \frac{2\sqrt{t}}{1+t})$ $t \geq 0$
 - a) Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b) Em que sentido a partícula se move quando t aumenta?
 - c) Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - d) Para quais valores de t a velocidade e aceleração são ortogonais.
2. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t, t^4 - t + 3)$ onde a reta tangente passa pela origem.
3. Calcule o comprimento de: $\gamma(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3})$ $t \in [0, 1]$.
4. Determine o(s) ponto(s) da curva $r(t) = (2t - 3, t^2 - 1)$ onde o raio de curvatura é mínimo.

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 26 Março de 2010

1. Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva. Esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = 5 - 2t \end{cases} \quad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

2. Calcule o comprimento da curva $\mathcal{C} : x(t) = e^t - t, \quad y(t) = 4e^{t/2}$, quando o parâmetro varia no intervalo $[-1, 1]$

3. Determine a equação paramétrica da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} : x(t) = e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-t} \sin t, \quad z(t) = e^{-t},$$

no ponto $(1, 0, 1)$.

4. Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical.

$$(a) \quad x(t) = 10 - t^2, \quad y(t) = t^3 - 12t \qquad (b) \quad x(t) = \cos 2t, \quad y(t) = \sin t$$

5. Determine o(s) ponto(s) da curva $r(t) = (e^t, e^{-t})$ onde a curvatura é máximo.

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 3 de Setembro de 2010

1. (2-ptos) Considere duas partículas em movimento segundo os seguintes vetores posição

$$\sigma_1(t) = (t - 1, t^2 + 1) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (2t - 6, t)$$

sendo que t representa o tempo.

- (a) Os caminhos destas partículas se encontram? Se sim, determine o ponto de encontro.
- (b) As partículas se chocam? Se sim, determine o instante do choque.

2. (2-ptos) Encontre o comprimento da curva $r(t) = (t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t)$ com t percorrendo $[-10, 10]$.
-

3. Dado a curva $\mathcal{C}$ definida por $\sigma(t) = (\sin t, \cos 2t)$ com $t \in [0, \pi]$.

(a)(1-pto) Esboce o traço da curva $\mathcal{C}$.

(b)(1-pto) Determine a equação (paramétrica ou cartesiana) da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c)(2-ptos) Determine a área do triângulo formado por esta reta tangente (reta tangente do item (b)) com os eixos coordenados.

(d)(2-ptos) Em que ponto da curva $\mathcal{C}$ a reta normal é perpendicular à reta de equação:

$$x + y = 2$$

(e)(2-ptos) Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $\mathcal{C}$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 26 de Março de 2012

1. Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (3t, 1 - 9t^2)$ com $t \in \mathbb{R}$.
 2. Se a curva $\mathcal{C}$ é dada por $x = 3t^2 + 1$, $y = 4t$, $z = e^{t-1}$, determine a equação da reta tangente no ponto $P(4, 4, 1)$.
 3. Determine a curvatura da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (\frac{1}{1+t}, \frac{1}{1-t})$ no ponto $(\frac{2}{3}, 2)$.
 4. Determine o comprimento da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ de $t = 0$ até $t = \pi$.
 5. A posição de uma partícula é dada por: $\sigma(t) = (e^{-t})i + (e^{2t})j$ quando $t \geq 0$
 - 5i) Em que pontos da trajetória da partícula a reta tangente é paralela à reta $x + 4y = 2$.
 - 5ii) Determine a curvatura da curva $\sigma(t)$ no ponto $(2, \frac{1}{4})$
-

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 19 de Novembro de 2012

1. Seja $r(t) = (\sqrt{2-t}, \frac{e^t-1}{t}, \ln(t+1))$.
 - (a) Determine o Domínio de r .
 - (b) Determine $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$.
 - (c) Determine $r'(t)$
2. Calcule o comprimento de: $\sigma(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $t \in [0, \pi]$.
3. Em que ponto(s) da curva $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ a tangente a esta curva é paralela ao plano $x + 3y + 2z = 10$.
4. Determine as equações da reta tangente e do círculo osculador da parábola $y = 2 - x^2$ no ponto $(1, 1)$.
5. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3\sin t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

1^{ra} prova de cálculo II
Curitiba, 18 de Setembro de 2013

1. Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (1+t, \sqrt{t})$ e determine o ponto onde a curva $\mathcal{C}$ tem reta tangente paralela à reta $x - 2y + 2 = 0$.
2. Obtenha o valor de x , $x > 0$ onde $y = x^3$ tem curvatura máxima.
3. No instante $t = 0$, uma partícula na origem de um sistema de coordenadas xyz tem uma velocidade de $V_o = i + 2j - k$. A função aceleração da partícula é $A(t) = 2t^2 i + j + \cos(2t) k$.
 - (a) Encontre a função posição da partícula.
 - (b) Encontre a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.
4. Considere a curva suave $\sigma(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t \in (0, \infty)$. Verifique que os pontos $(2, 1, 0)$ e $(4, 4, \ln 2)$ pertencem à curva de σ e calcule o comprimento de arco de σ entre estes pontos.
5. A trajetória de uma partícula é dada por $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, onde t é parametro de tempo. Em $t = \pi$ ela abandona a trajetória e passa a caminhar na direção da tangente. Ache sua posição em $t = 2\pi$.
6. Uma partícula se move com velocidade constante de 10 unidades por segundo, no sentido anti-horário, ao longo da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Ache o vetor aceleração $\vec{A}$ no instante em que a partícula passa pelo ponto $(0, 3)$.

Formulario:

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \dots \text{Comprimento de arco}$$

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \dots \text{curvatura no ponto } (x, f(x)).$$

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}} \dots \text{curvatura no ponto } (x(t), y(t)).$$

$$V(t) = \sigma'(t) \text{ velocidade.}$$

$$v(t) = ||V(t)|| \text{ velocidade escalar}$$

$$A(t) = V'(t) \text{ aceleração.}$$

$$A(t) = a_T(t)T(t) + a_N(t)N(t) = v'(t)T(t) + k(t)(v(t))^2N(t)$$