6.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 456.

Nos Problemas 1-22, resolva a equação diferencial dada.

1. $x^2y'' - 2y = 0$

2. $4x^2y'' + y = 0$

3. $xy'' + y' = 0$

4. $xy'' - y' = 0$

5. $x^2y'' + y' + 4y = 0$

6. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$

7. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

8. $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$

9. $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

10. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$

11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

12. $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$

13. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

14. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$

15. $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$

16. $2x^2y'' + xy' + y = 0$

17. $x^3y''' - 6y = 0$

18. $x^3y''' + xy' - y = 0$

19. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$

20. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

21. $x\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$

22. $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 9x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

Nos Problemas 23-26, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

23. $x^2y'' + 3xy' = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 4$

24. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0, \quad y(2) = 32, \quad y'(2) = 0$

25. $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

26. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 3$

Nos Problemas 27 e 28, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas. [*Sugestão:* Faça $t = -x$.]

27. $4x^2y'' + y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 4$

28. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(-2) = 8, \quad y'(-2) = 0$

Resolva os Problemas 29-34, usando variação dos parâmetros.

29. $xy'' + y' = x$

30. $xy'' - 4y' = x^4$

31. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$

32. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4 - e^x$

33. $x^2y'' - xy' + y = 2x$

34. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$

Nos Problemas 35-40, resolva a equação diferencial dada fazendo a substituição $x = e^t$.

35. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10x\dfrac{dy}{dx} + 8y = x^2$

36. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$

37. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$

38. $2x^2y'' - 3xy' - 3y = 1 + 2x + x^2$

39. $x^2y'' + 9xy' - 20y = 5/x^3$

40. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 3 + \ln x^3$

41. Considere duas esferas concêntricas de raios $r = a$ e $r = b$, $a < b$, como mostrado na Figura 6.2. A temperatura $u(r)$ na região compreendida entre as esferas é determinada pelo problema de valor de fronteira

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1.$$

em que u_0 e u_1 são constantes. Resolva essa equação.

42. A temperatura no anel circular mostrado na Figura 6.3 é determinada pelo problema de valor de fronteira

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1.$$

em que u_0 e u_1 são constantes. Mostre que

$$u(r) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

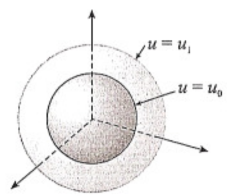


Figura 6.2

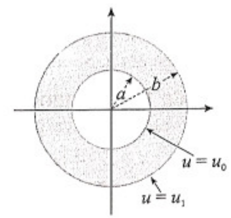


Figura 6.3

Nos Problemas 43-45, resolva a equação diferencial dada.

43. $(x - 1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2(x - 1)\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ [*Sugestão:* Faça $t = x - 1$].

44. $(3x + 4)^2y'' + 10(3x + 4)y' + 9y = 0$

45. $(x + 2)^2y'' + (x + 2)y' + y = 0$

6.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 456 e 457.

Nos Problemas 1-10, encontre o intervalo de convergência das séries de potências dadas.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (x-4)^k$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} k! 2^k x^k$

10. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$

Nos Problemas 11-20, encontre os quatro primeiros termos de uma série de potências em x para a função dada. Calcule a série à mão ou use um **SAC** como ensinado.

11. $e^{n} \operatorname{sen} x$

12. $e^{-x} \cos x$

13. $\operatorname{sen} x \cos x$

14. $e^x \ln(1-x)$

15. $\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right)^2$

16. $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \ldots\right)^2$

17. $\operatorname{tg} x$

18. $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$

19. $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \ldots}$

20. $\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \ldots\right)^2}$

Nos Problemas 21-30, resolva cada equação diferencial da maneira dos capítulos anteriores e então compare os resultados com as soluções obtidas através de séries de potências $y = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

21. $y' + y = 0$

22. $y' = 2y$

23. $y' - x^2 y = 0$

24. $y' + x^3 y = 0$

25. $(1-x)y' - y = 0$

26. $(1+x)y' - 2y = 0$

27. $y'' + y = 0$

28. $y'' - y = 0$

29. $y'' = y'$

30. $2y'' + y' = 0$

6.3 SOLUÇÕES EM TORNO DE PONTOS ORDINÁRIOS (NÃO-SINGULARES)

Suponha que a equação diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

seja escrita da seguinte forma,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

Definimos.

DEFINIÇÃO 6.1 Pontos Singulares e Ordinários

Dizemos que um ponto x_0 é um **ponto ordinário** ou não-singular da equação diferencial (1) se $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas* em x_0. Um ponto que não é um ordinário é considerado como um **ponto singular** da equação.

EXEMPLO 1

Todo ponto x é um ponto ordinário da equação

$$y'' + (e^x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0.$$

Em particular, $x = 0$ é um ponto ordinário, pois

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

convergem para todo valor de x. ■

EXEMPLO 2

A equação diferencial $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$ possui um ponto ordinário em $x = 0$, pois pode ser mostrado que $Q(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ tem o desenvolvimento em série de potências

$$Q(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \cdots$$

* Veja as páginas 287-288.

e assim por diante. Como c_0 e c_1 são arbitrárias, encontramos

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \ldots\right] \quad \text{e} \quad y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \ldots\right].$$

Como a equação diferencial não tem pontos singulares, ambas as séries convergem para todos os valores de x. ■

6.3 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão página 457.

Nos Problemas 1-14, para cada equação diferencial, encontre duas soluções em série de potências linearmente independentes em torno do ponto ordinário $x = 0$.

1. $y'' = xy$

2. $y'' + x^2y = 0$

3. $y'' - 2xy' + y = 0$

4. $y'' - xy' + 2y = 0$

5. $y'' + x^2y' + xy = 0$

6. $y'' - 2xy' + 2y = 0$

7. $(x - 1)y'' + y' = 0$

8. $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$

9. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$

10. $(x^2 + 1)y'' - 6xy = 0$

11. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

12. $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

13. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$

14. $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$

Nos Problemas 15-18, use o método de série de potências para resolver a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

15. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 6$

16. $(x + 1)y'' - (2 - x)y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

17. $y'' - 2xy' + 8y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

18. $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Nos Problemas 19-22, use o procedimento ilustrado no Exemplo 9 para encontrar duas soluções, em série de potências, para a equação diferencial dada em torno do ponto ordinário $x = 0$.

19. $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$

20. $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
[*Sugestão:* Veja Exemplo 2.]

21. $y'' + e^{-x}y = 0$

22. $y'' + e^{x}y' - y = 0$

Nos Problemas 23 e 24, use o método de série de potências para resolver a equação não-homogênea.

23. $y'' - xy = 1$

24. $y'' - 4xy' - 4y = e^x$

25. A equação diferencial $y'' - 2xy + 2ny = 0$ é conhecida como **equação de Hermite**.* Quando $n \geq 0$ é um inteiro, a equação de Hermite apresenta uma solução polinomial. Os polinômios de Hermite têm alguma importância no estudo de mecânica quântica. Obtenha as soluções polinomiais correspondentes a $n = 1$ e $n = 2$.

26. Na análise de uma coluna fina e uniforme de altura L que se curva sob a ação do próprio peso, encontramos o seguinte problema de valor de contorno:

$$\theta'' + \frac{\delta g}{EI}(L - x)\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(L) = 0.$$

Aqui, E é o método de Young, I é o momento de inércia da seção transversal, δ, a densidade linear, x a distância medida ao longo da coluna e $\theta(x)$, a deflexão angular da coluna em relação à vertical em um ponto $P(x)$. Veja a Figura 6.5. Obtenha uma solução em série de potências para a equação diferencial que satisfaça a condição $\theta'(L) = 0$. Por conveniência, defina $\lambda^2 = \delta gL/EI$ e faça a mudança de variável $t = L - x$.

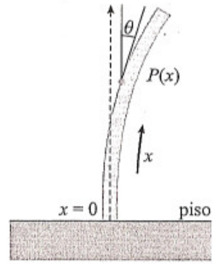


Figura 6.5

6.4 SOLUÇÕES EM TORNO DE PONTOS SINGULARES

6.4.1 *Pontos Singulares Regulares: Método de Frobenius – Caso I*

Vimos na seção precedente que não há problema algum para encontrar uma solução em série de potências para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

em torno de um ponto ordinário $x = x_0$. Porém, se $x = x_0$ for um ponto singular, nem sempre é possível encontrar uma solução na forma de uma série de potências. Mas podemos tentar encontrar uma solução na forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r}$, em que r é uma constante a ser determinada.

---

* Denominação dada em homenagem ao matemático francês **Charles Hermite** (1822-1901).

ou
$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\,\mathscr{L}\{t^{n-1}\}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Agora, $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$, assim, por iteração, segue-se que

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s}\,\mathscr{L}\{1\} = \frac{2}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2}{s}\,\mathscr{L}\{t\} = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2!}{s^3}$$

$$\mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\,\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{3!}{s^4}.$$

Embora uma prova rigorosa requeira indução matemática, parece razoável concluir, a partir desses resultados, a fórmula geral

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\,\mathscr{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\left[\frac{(n-1)!}{s^n}\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

As justificativas para as partes (f) e (g) do Teorema 7.2 serão deixadas para você. Veja os Problemas 33 e 34.

EXEMPLO 8

Calcule $\mathscr{L}\{\text{sen}^2 t\}$.

Solução Com a ajuda de uma identidade trigonométrica, linearidade e das partes (a) e (e) do Teorema 7.2, obtemos

$$\mathscr{L}\{\text{sen}^2 t\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}\{\cos 2t\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \times \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{2}{s(s^2 + 4)}. \qquad \blacksquare$$

7.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 460 e 461.

Nos Problemas 1-18, use a Definição 7.1 para calcular $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\, t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi/2 \\ \cos t, & t \ge \pi/2 \end{cases}$

7.

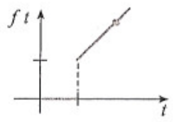


Figura 7.6

8.

Figura 7.7

9.

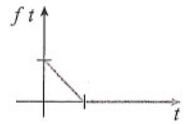


Figura 7.8

10.

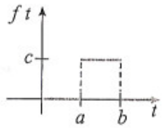


Figura 7.9

11. $f(t) = e^{t+7}$

12. $f(t) = e^{-2t-5}$

13. $f(t) = te^{4t}$

14. $f(t) = t^2e^{3t}$

15. $f(t) = e^{-t}\,\text{sen}\, t$

16. $f(t) = e^{t}\cos t$

17. $f(t) = t\cos t$

18. $f(t) = t\,\text{sen}\, t$

Nos Problemas 19-42, use o Teorema 7.2 para calcular $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

19. $f(t) = 2t^4$

20. $f(t) = t^5$

21. $f(t) = 4t - 10$

22. $f(t) = 7t + 3$

23. $f(t) = t^2 + 6t - 3$

24. $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

25. $f(t) = (t + 1)^3$

26. $f(t) = (2t - 1)^3$

27. $f(t) = 1 + e^{4t}$

28. $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

29. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

30. $f(t) = (e^{t} - e^{-t})^2$

31. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$

32. $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$

33. $f(t) = \operatorname{senh} kt$

34. $f(t) = \cosh kt$

35. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$

36. $f(t) = e^{-t} \cosh t$

37. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$

38. $f(t) = \cos^2 t$

39. $f(t) = \cos t \cos 2t$ [*Sugestão*: Examine $\cos(t_1 \pm t_2)$.]

40. $f(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t$

41. $f(t) = \operatorname{sen} t \cos 2t$ [*Sugestão*: Examine $\operatorname{sen}(t_1 \pm t_2)$.]

42. $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$ [*Sugestão*: $\operatorname{sen}^3 t = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}^2 t$.]

43. A **função gama** é definida pela integral

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha - 1} e^{-t}\, dt, \qquad \alpha > 0.$$

Veja o Apêndice I. Mostre que $\mathscr{L}\{t^\alpha\} = \dfrac{\gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha + 1}}$, $\alpha > -1$.

Nos Problemas 44-46, use o resultado do Problema 43 para calcular $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

44. $f(t) = t^{-1/2}$

45. $f(t) = t^{1/2}$

46. $f(t) = t^{3/2}$

47. Mostre que a função $f(t) = 1/t^2$ não possui transformada de Laplace.

$$\left[\text{Sugetão: } \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st} f(t)\, dt + \int_1^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \text{ Use a definiçãode integral imprópria para mostrar que } \int_0^1 e^{-st} f(t)\, dt \text{ não existe.}\right]$$

48. Mostre que, se as funções f e g forem de ordem exponencial para $t > T$, então o produto fg também será de ordem exponencial para $t > T$.

7.2 TRANSFORMADA INVERSA

Na seção precedente, estávamos trabalhando com o problema de encontrar a transformada de uma da função, isto é, transformar uma função $f(t)$ em outra função $F(s)$ por meio da integral. Denotamos isso simbolicamente por $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Agora, trabalharemos com o problema inverso, ou seja, dada uma função $F(s)$, tentaremos encontrar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Dizemos então que $f(t)$ é a **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ e escrevemos

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

O análogo do Teorema 7.2 para a transformada inversa é o seguinte:

TEOREMA 7.3 Algumas Transformadas Inversas

(a) $d1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$

(b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

(c) $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s - a}\right\}$

(d) $\operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 + k^2}\right\}$

(e) $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + k^2}\right\}0$

(f) $\operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 - k^2}\right\}$

(g) $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^{2sup} + k^2}\right\}$

$\mathscr{L}^{-1}$, uma Transformada Linear

A transformada de Laplace inversa é uma transformada linear;* isto é, para constantes α e β,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\},$$

em que F e G são as transformadas de algumas funções f e g.

A transformada de Laplace inversa de uma função $F(s)$ pode não ser única. Veja os Problemas 35 e 36. Para nossos propósitos, isso não é tão ruim quanto parece. Se f_1 e f_2 são contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então, se $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$, pode-se mostrar que f_1 e f_2 são essencialmente iguais; isto é, elas podem ser diferentes somente nos pontos de descontinuidade.

* A transformada de Laplace inversa é na verdade uma outra integral. Porém, o cálculo dessas integrais demanda o uso de variáveis complexas, o que está além do escopo deste texto.

$$= -M \left.\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right|_0^{\infty} = \frac{M}{s-c}$$

para $s > c$. Como $s \to \infty$, temos $|\mathscr{L}\{f(t)\}| \to 0$ e daí $\mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$. □

EXEMPLO 7

As funções $F_1(s) = s^2$ e $F_2(s) = s/(s+1)$ não são transformadas de Laplace de nenhuma função contínua por partes de ordem exponencial, pois

$$F_1(s) \not\to 0 \quad \text{e} \quad F_2(s) \not\to 0$$

quando $s \to \infty$. Dizemos que $\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}$ e $\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\}$ não existem. ■

Observação Há uma outra maneira de determinar os coeficientes em uma decomposição em frações parciais no caso especial quando $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ for um quociente de polinômios $P(s)/Q(s)$ em que $Q(s)$ é um produto de fatores lineares *distintos*:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_n)}.$$

Vamos ilustrar isso com um exemplo específico. Da teoria de frações parciais, sabemos que existem únicas constantes A, B e C tais que

$$\frac{s^2+4s-1}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}. \tag{1}$$

Multiplicamos ambos os lados dessa última expressão por, digamos, $s - 1$. Simplificamos e então fazemos $s = 1$. Como os coeficientes de B e C são nulos, obtemos

$$\left.\frac{s^2+4s-1}{(s-2)(s+3)}\right|_{s=1} = A \quad \text{ou} \quad A = -1.$$

Agora, para obter B e C repetimos o processo com os fatores $s - 2$ e $s + 3$, respectivamente:

$$\left.\frac{s^2+4s-1}{(s-1)\boxed{(s-2)}(s+3)}\right|_{s=2} = B \quad \text{ou} \quad B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{s^2+4s-1}{(s-1)(s-2)\boxed{(s+3)}}\right|_{s=3} = C \quad \text{ou} \quad C = -\frac{1}{5}.$$

Você deve verificar por outros meios que

$$\frac{s^2+4s-1}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{-1}{s-1} + \frac{11/5}{s-2} + \frac{-1/5}{s+3}.$$

Esse processo é uma versão simplificada de um resultado conhecido como **teorema de Heaviside**.*

7.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 462.

Nos Problemas 1-34, use o Teorema 7.3 para encontrar a transformada inversa pedida.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} - \frac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} + \frac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$

12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

---

* **Oliver Heaviside** (1850-1925) Muitos resultados que apresentamos neste capítulo foram imaginados e delineados pelo engenheiro eletrônico inglês Oliver Heaviside em seu tratado *Electromagnetic Theory* de 1899. Heaviside usou originalmente aransformada de Laplace como meio para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes provenientes de sua investigação de problemas relacionados com linhas de transmissão. Como muitos de seus resultados carecem de prova formal, o cálculo operacional de Heaviside, como veio a ser chamado o procedimento, inicialmente foi visto com desprezo pelos matemáticos. Heaviside, por sua vez, chamava essa "instituição" matemática de "estúpida". Quando Heaviside, usando seus métodos simbólicos, foi capaz de obter respostas para problemas que os matemáticos não conseguiam resolver, o desprezo transformou-se em censura e seus artigos não foram mais publicados em periódicos matemáticos. Heaviside foi também o descobridor de uma camada de máxima densidade de elétrons, na atmosfera chamada de camada de Heaviside, que reflete ondas de rádio de volta para a terra. Viveu os últimos anos de sua vida recluso e na pobreza, esquecido pela comunidade científica. Morreu em uma casa sem aquecimento em 1925.

Como é de sua natureza, os matemáticos se apossaram de suas idéias, deram a elas um sólido fundamento matemático e então generalizam-nas dentro de uma teoria abstrata.

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 - 16}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{10s}{s^2 - 25}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s - 6}{s^2 + 9}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s - 1}{s^2 + 2}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + 3s}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s + 1}{s^2 - 4s}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 2s - 3}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + s - 20}\right\}$

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{0.9s}{(s - 0,1)(s + 0,2)}\right\}$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s - 3}{(s - \sqrt{3})(s + \sqrt{3})}\right\}$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s - 2(s - 3)(s - 6)}\right\}$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2 + 1}{s(s - 1)(s + 1)(s - 2)}\right\}$

27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s + 4}{(s - 2)(s^2 + 4s + 3)}\right\}$

28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s + 1}{(s^2 - 4s)(s + 5)}\right\}$

29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s + 4)}\right\}$

30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s - 1}{s^2(s^2 + 1)}\right\}$

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2 + 4)(s + 2)}\right\}$

32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4 - 9}\right\}$

33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}\right\}$

34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}\right\}$

A transformada de Laplace inversa pode não ser única. Nos Problemas 35 e 36, calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

35. $f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0,\ t \neq 1,\ t \neq 2 \\ 3, & t = 1 \\ 4, & t = 2 \end{cases}$

36. $f(t) = \begin{cases} e^{3t}, & t \geq 0,\ t \neq 5 \\ 1, & t = 5 \end{cases}$

7.3 TEOREMAS DE TRANSLAÇÃO E DERIVADA DE UMA TRANSFORMADA

Não é conveniente usar a Definição 7.1 cada vez que quisermos encontrar a transformada de Laplace de uma função $f(t)$. Por exemplo, a integração por partes envolvida no cálculo de, digamos, $\mathscr{L}\{e^{t}t^2 \text{ sen } 3t\}$ é extremamente trabalhosa. Na discussão que segue, apresentamos vários teoremas que facilitam o cálculo de transformadas. Isso nos possibilita construir uma lista mais extensiva de transformadas sem a necessidade de usar a definição da transformada de

Laplace. Embora tabelas extensivas possam ser construídas, (veja o Apêndice II), não deixa de ser interessante saber as transformadas de Laplace de funções básicas tais como t^n, e^{at}, sen kt, cos kt, senh kt e cosh kt.

TEOREMA 7.5 Primeiro Teorema de Translação

Se a é um número real, então

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a),$$

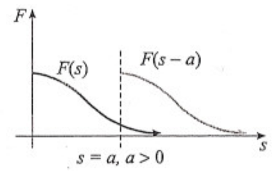
em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$

Prova A prova é imediata, pois pela Definição 7.1,

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s - a). \qquad \square$$

O gráfico de $F(s - a)$ é o gráfico de $F(s)$ deslocado sobre o eixo s para a direita, se $a > 0$, e para esquerda, se $a < 0$. Veja a Figura 7.10

(s – 2)



deslocamento sobre o eixo s

Algumas vezes é útil usar o simbolismo

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}_{s \to s-a}$$

em que $s \to s - a$ significa que substituímos s em $F(s)$ por $s - a$.

E X E M P L O 1

Calcule (a) $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ e (b) $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

Solução Os resultados seguem-se do Teorema 7.5

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]\,dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt$$

$$= -\mathscr{L}\{tf(t)\};$$

assim, $$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Analogamente, $$\mathscr{L}\{t^2f(t)\} = \mathscr{L}\{t \times tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{tf(t)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Os dois resultados precedentes sugerem a fórmula geral para $\mathscr{L}\{t^nf(t)\}$.

TEOREMA 7.7 Derivadas de Transformadas

Para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s),$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

EXEMPLO 12

Calcule **(a)** $\mathscr{L}\{te^{3t}\}$, **(b)** $\mathscr{L}\{t \text{ sen } kt\}$, **(c)** $\mathscr{L}\{t^2 \text{ sen } kt\}$ e **(d)** $\mathscr{L}\{te^{-1}\cos t\}$.

Solução Usaremos os resultados (c), (d) e (e) do Teorema 7.2.

(a) Observe nesse primeiro exemplo que podemos usar também o primeiro teorema de translação. Para aplicar o Teorema 7.7, verificamos que $n = 1$ e $f(t) = e^{3t}$:

$$\mathscr{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

(b) $$\mathscr{L}\{t \text{ sen } kt\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\text{sen } kt\}$$
$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)$$
$$= \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

(c) Fazendo $n = 2$ no Teorema 7.7, essa transformada pode ser escrita como

$$\mathscr{L}\{t^2 \text{ sen } kt\} = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{\text{sen } kt\}$$

e daí, calculando as duas derivadas, obtemos o resultado. Alternativamente, podemos usar o resultado obtido na parte (b). Como $t^2 \text{ sen } kt = t(t \text{ sen } kt)$, então

$$\mathscr{L}\{t^2 \text{ sen } kt\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{t \text{ sen } kt\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}\right). \quad \Leftarrow \boxed{\text{pela parte (b)}}$$

Derivando e simplificando, temos

$$\mathscr{L}\{t^2 \text{ sen } kt\} = \frac{6ks^2 - 2k^3}{(s^2+k^2)^3}.$$

(d) $$\mathscr{L}\{te^{-t}\cos t\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{-t}\cos t\}$$
$$= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\cos t\}_{s \to s+1} \quad \Leftarrow \boxed{\text{primeiro teorema de translação}}$$
$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)$$
$$= \frac{(s+1)^2 - 1}{[(s+1)^2+1]^2}$$

■

7.3 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 462 e 463.

Nos Problemas 1-44, encontre $F(s)$ ou $f(t)$ como indicado.

1. $\mathscr{L}\{te^{10t}\}$
2. $\mathscr{L}\{te^{-6t}\}$
3. $\mathscr{L}\{t^3e^{-2t}\}$
4. $\mathscr{L}\{t^{10}e^{-7t}\}$
5. $\mathscr{L}\{e^t \text{ sen } 3t\}$
6. $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$
7. $\mathscr{L}\{e^{5t} \text{ senh } 3t\}$
8. $\mathscr{L}\left\{\frac{\cosh t}{e^t}\right\}$
9. $\mathscr{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$
10. $\mathscr{L}\{e^{2t}(t-1)^2\}$

11. $\mathscr{L}\{e^{-t}\operatorname{sen}^2 t\}$

12. $\mathscr{L}\{e^{t}\cos^2 3t\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^4}\right\}$

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+5}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s-2)^3}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$

23. $\mathscr{L}\{(t-1)\,\mathscr{U}(t-1)\}$

24. $\mathscr{L}\{e^{2-t}\,\mathscr{U}(t-2)\}$

25. $\mathscr{L}\{t\,\mathscr{U}(t-2)\}$

26. $\mathscr{L}\{(3t+1)\,\mathscr{U}(t-3)\}$

27. $\mathscr{L}\{\cos 2t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$

28. $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen} t\,\mathscr{U}\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

29. $\mathscr{L}\{(t-1)^3 e^{t-1}\,\mathscr{U}(t-1)\}$

30. $\mathscr{L}\{te^{t-5}\,\mathscr{U}(t-5)\}$

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$

33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$

35. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$

36. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

37. $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$

38. $\mathscr{L}\{t\operatorname{senh} 3t\}$

39. $\mathscr{L}\{t^2\operatorname{senh} t\}$

40. $\mathscr{L}\{t^2\cos t\}$

41. $\mathscr{L}\{te^{2t}\operatorname{sen} 6t\}$

42. $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$

43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

44. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$

Nos Problemas 45-50, identifique o gráfico das funções de (a)–(f). O gráfico de $f(t)$ está representado na Figura 7.18.

(a) $f(t) - f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$

(b) $f(t-b)\,\mathscr{U}(t-b)$

(c) $f(t)\,\mathscr{U}(t-a)$

(d) $f(t) - f(t)\,\mathscr{U}(t-b)$

(e) $f(t)\,\mathscr{U}(t-a) - f(t)\,\mathscr{U}(t-b)$

(f) $f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a) - f(t-a)\,\mathscr{U}(t-b)$

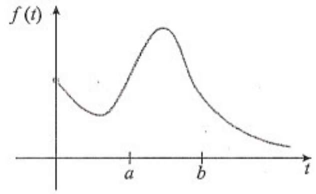


Figura 7.18

45.

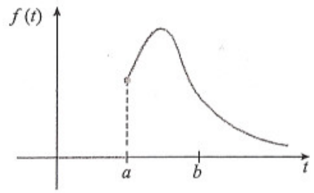


Figura 7.19

46.

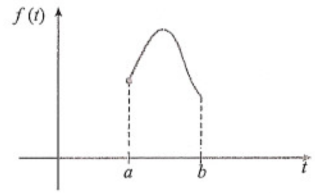


Figura 7.20

47.

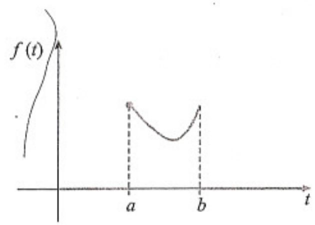


Figura 7.21

48.

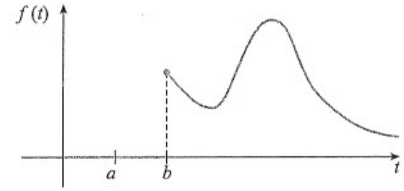


Figura 7.22

49.

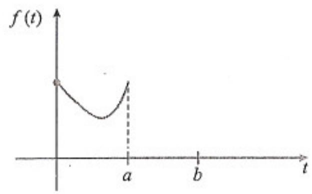


Figura 7.23

50.

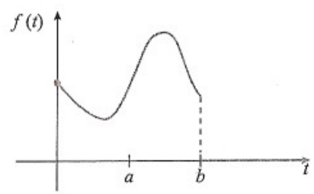


Figura 7.24

Nos Problemas 51-58, escreva cada função em termos de funções degrau unitário. Encontre a transformada de Laplace da função dada.

51. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & t \ge 3 \end{cases}$

52. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases}$

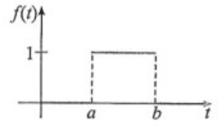
53. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$

54. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \dfrac{3\pi}{2} \\ \text{sen } t, & t \ge \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

55. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

56. $f(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

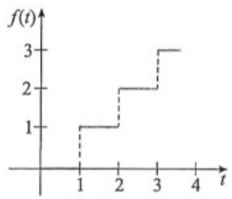
57.



pulso retangular

Figura 7.23

58.



função escada

Figura 7.24

Nos Problemas 59 e 60, esboce o gráfico da função dada.

59. $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s^2}\right\}$

60. $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s} - \dfrac{3e^{-s}}{s^2} + \dfrac{5e^{-2s}}{s^2}\right\}$

Nos Problemas 61-64, use o Teorema 7.7 com $n = 1$

$$f(t) = -\frac{1}{t}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

para encontrar a transformada de Laplace inversa dada.

61. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s-3}{s+1}\right\}$

62. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right\}$

63. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1}\,\dfrac{s}{2}\right\}$

64. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} - \text{cotg}^{-1}\,\dfrac{4}{s}\right\}$

7.4 TRANSFORMADA DE DERIVADAS, INTEGRAIS E FUNÇÕES PERIÓDICAS

Nosso objetivo é usar a transformada de Laplace para resolver certos tipos de equações diferenciais. Para isso, precisamos calcular quantidades como $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ e $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$. Por exemplo, se f' for contínua para $t \ge 0$, então a integração por partes proporciona

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt \\ &= e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

ou

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{1}$$

Aqui, estamos supondo que $e^{-st}f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Analogamente,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f''(t)\,dt \\ &= e^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt \\ &= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\} \\ &= s\,[sF(s) - f(0)] - f'(0)\end{aligned}$$

ou

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

Os resultados em (1) e (2) são casos especiais do próximo teorema, que fornece a transformada de Laplace da n-ésima derivada de f. A prova será omitida.

TEOREMA 7.8 Transformada de uma Derivada

Se $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas em $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

E X E M P L O 1 0

Uma viga de comprimento L está fixa em ambos os extremos (engastada). Veja a Figura 7.42. Nesse caso, a deflexão $y(x)$ satisfaz (9) e as condições

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(L) = 0.$$

As duas primeiras condições indicam que não há deflexão vertical nas extremidades; as outras duas significam que a linha de deflexão é horizontal nos extremos. Encontre a deflexão da viga quando uma carga constante w0 está uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento, isto é, quando $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

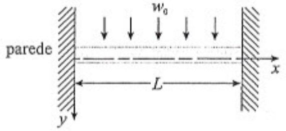


Figura 7.42

Solução A transformada de Laplace da equação (9) é

$$EI(s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)) = \frac{w_0}{s}$$

$$s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EIs}.$$

Se $c_1 = y''(0)$ e $c_2 = y'''(0)$, então

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EIs^5}$$

e conseqüentemente

$$y(x) = \frac{c_1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} + \frac{c_2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \frac{w_0}{4!EI}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

$$= \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Pelas condições dadas, $y(L) = 0$ e $y'(L) = 0$, a última equação conduz ao sistema

$$\frac{c_1}{2}L^2 + \frac{c_2}{6}L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$c_1L + \frac{c_2}{2}L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$

Resolvendo, encontramos $c_1 = w_0L^2/12EI$ e $c_2 = -w_0L/2EI$. Logo, a deflexão é dada por

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4 = \frac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2. \quad ■$$

7.5 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 464 e 465.

Uma tabela das transformadas de algumas funções básicas aparece no Apêndice II.

Nos Problemas 1-26, use a transformada de Laplace para resolver a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas. Quando apropriado, escreva f em termos de funções degrau unitário.

1. $\frac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$

2. $\frac{dy}{dt} + 2y = t, \quad y(0) = -1$

3. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$

4. $y' - y = \text{sen}\, t, \quad y(0) = 0$

5. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

6. $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$

7. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

8. $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

9. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$

11. $y'' + y = \text{sen}\, t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

12. $y'' + 16y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

13. $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

14. $y'' - 2y' = e^t \,\text{senh}\, t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

15. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

16. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \text{sen}\, 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

17. $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$

18. $y^{(4)} - y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

19. $y' + y = f(t)$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$

20. $y' + y = f(t)$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$

21. $y' + 2y = f(t)$, em que $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$

22. $y'' + 4y = f(t)$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$