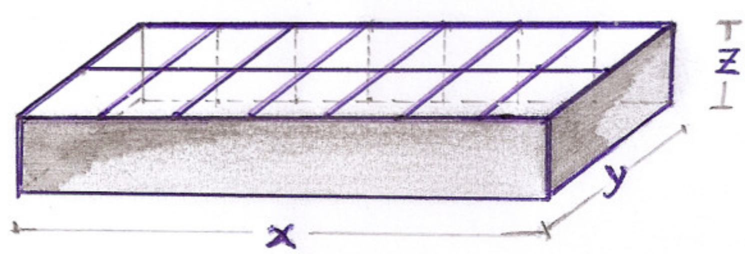
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica
Prof. Juan Carlos Vila Bravo

2^{da} prova de cálculo II
"A vingança dos nerds (dublado)"
Curitiba, 28 Outubro de 2015

1. Determine os valores máximos e minimos locais e os pontos de sela da função:
$$f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$$

2. Determine os valores máximo e mínimo absoluto da função
$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$$
na região fechada e limitada $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

3. Deseja-se fabricar uma forma para 14 cubos de gelo. As dimensões da forma são: comprimento x, largura y e altura z conforme a figura abaixo:



O volume da forma deve ser de 81 cm^3, sabendo que nessas condições existe uma forma de área superficial mínima, determie suas dimensões.

4. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:
$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx.$$
Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

5. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$.

6. Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2}$.

BOA SORTE !

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

Nota: 120

Disciplina: ~~Eng.~~ Calculo II

Curso: Eng. Electronica

Professor: Eu

Aluno: Eu

Turma: Não Sei

Data: 28 / 10 / 2015

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

Pontos Criticos $\Rightarrow$ $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 & \dots (1) \\ -6x + 24y^2 = 0 & \dots (2) \end{cases}$

De (1) temos:

$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{(2)} -6x + 24\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = 0$

$-6x + 6x^4 = 0$

$6x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Pontos criticos $(0,0)$, $(1, \frac{1}{2})$.

$f_x = 3x^2 - 6y$

$f_y = -6x + 24y^2$

$\Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{xy} = f_{yx} = -6 \\ f_{yy} = 48y \end{cases}$

Ponto Critico	$f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = (6x)(48y) - [-6]^2$	$f_{xx} = 6x$	Natureza
$(0,0)$	$-36 < 0$		Ponto sela
$(1, \frac{1}{2})$	$(6)(24) - 36 > 0$	$6 > 0$	Ponto de Minimo local

$\boxed{2}$ $f(x,y) = (x^2+2y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad D: x^2+y^2 \leq 4$

$$\begin{cases} f_x = (2x)\,e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+2y^2)(-2x)\,e^{-(x^2+y^2)} \\ f_y = (4y)\,e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+2y^2)(-2y)\,e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Ponto crítico no interior de D.

$$\begin{cases} 2x - 2x(x^2+2y^2) = 0 \\ 4y - 2y(x^2+2y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2-2y^2) = 0 \\ 2y(2-x^2-2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x=0 \\ 2-x^2-2y^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-x^2-2y^2=0 \\ 2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-x^2-2y^2=0 \\ 2-x^2-2y^2=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ $\qquad (0,1),(0,-1)$ $\qquad (1,0),(-1,0)$ $\qquad \nexists$ solução

Pontos críticos no interior de D $\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$

Pontos críticos na fronteira de D : $\partial D \Rightarrow r(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

$f|_{\partial D} \Rightarrow f(t) = f(r(t))$

$f(t) = (4+4\operatorname{sen}^2 t)\,e^{-4} \Rightarrow f'(t) = 8\operatorname{sen} t\cos t\,e^{-4}$

Ponto crítico na ∂D $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} t\cos t = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2t) = 0$

$\therefore\ 2t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \ldots$

$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$

Pontos críticos na ∂D : $\{(2,0),(0,2),(-2,0),(0,-2)\}$

$f(0,0) = 0$

$f(0,1) = 2e^{-1} = f(0,-1)$

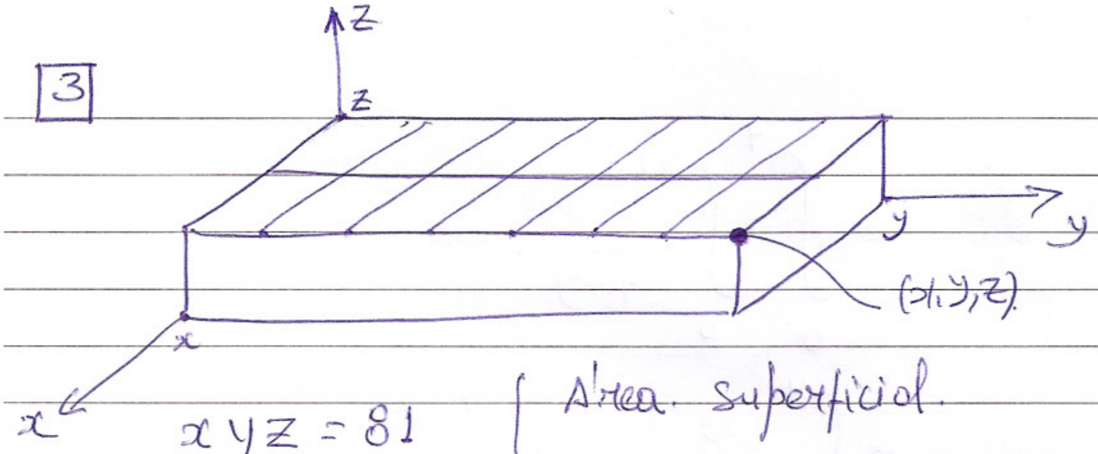
$f(1,0) = e^{-1} = f(-1,0)$

$f(2,0) = f(-2,0) = 4e^{-4}$

$f(0,2) = f(0,-2) = 8e^{-4}$

Rpta: $(0,0)$. Ponto de Mínimo Absoluto.
$(0,1)$ Ponto de Máximo Absoluto.

$\boxed{3}$



$xyz = 81$

Área superficial

$xy + 8xz + 3yz$

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xy + 8xz + 3yz \\ g(x,y,z) = xyz - 81 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 8z = \lambda(yz) & \text{—— ①} \\ x + 3z = \lambda(xz) & \text{—— ②} \\ 8x + 3y = \lambda(xy) & \text{—— ③} \\ xyz = 81 & \text{—— ④} \end{cases}$$

De ①, ② e ③, tem-se:

$$xy + 8xz = xy + 3zy = 8xz + 3yz.$$

Daí tem-se:

$$3y = 8x \qquad \overset{④}{\Longrightarrow} \qquad (x)\left(\frac{8x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right) = 81$$

$$y = 8z$$

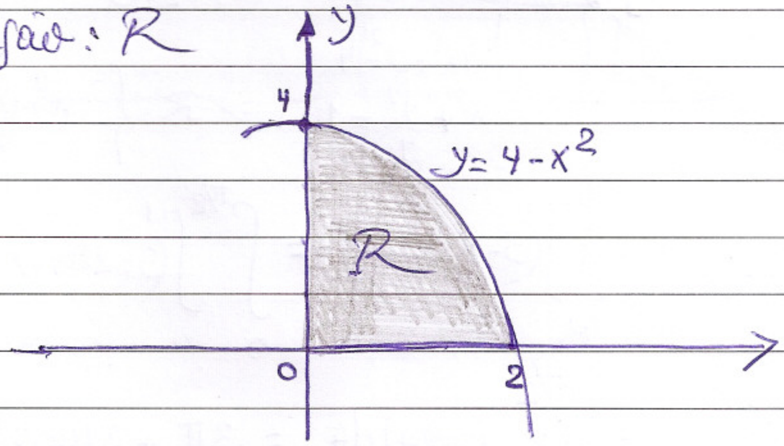
$$x^3 = \frac{9^3}{8} \Rightarrow$$

$$x = \frac{9}{2}, \quad y = 12, \quad z = \frac{3}{2}$$

$\boxed{4}$ Região de integração: R

$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 4 - x^2$



Portanto

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dx \quad dy$$

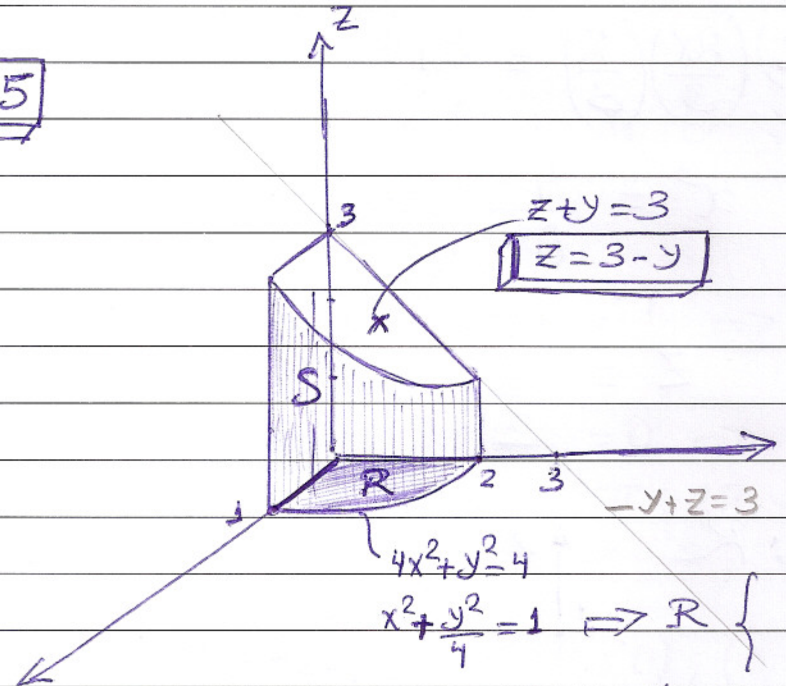
$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left(\frac{4-y}{2}\right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}\, dy$$

$$= \left(\frac{e^{2y}}{4}\right)_0^4 = \frac{e^8 - 1}{4}$$

$\boxed{5}$



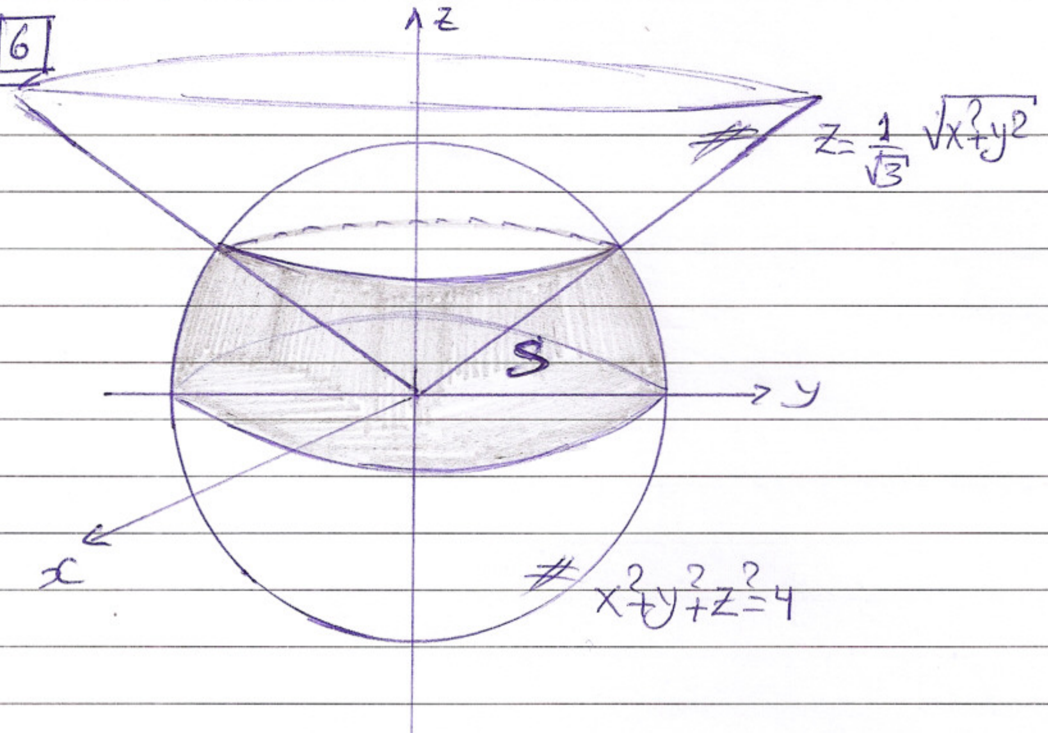
$4x^2+y^2=4$

$x^2+\frac{y^2}{4}=1 \implies R \left\{ x^2+\frac{y^2}{4} \leq 1 \text{ com } x>0,\, y>0 \right\}$

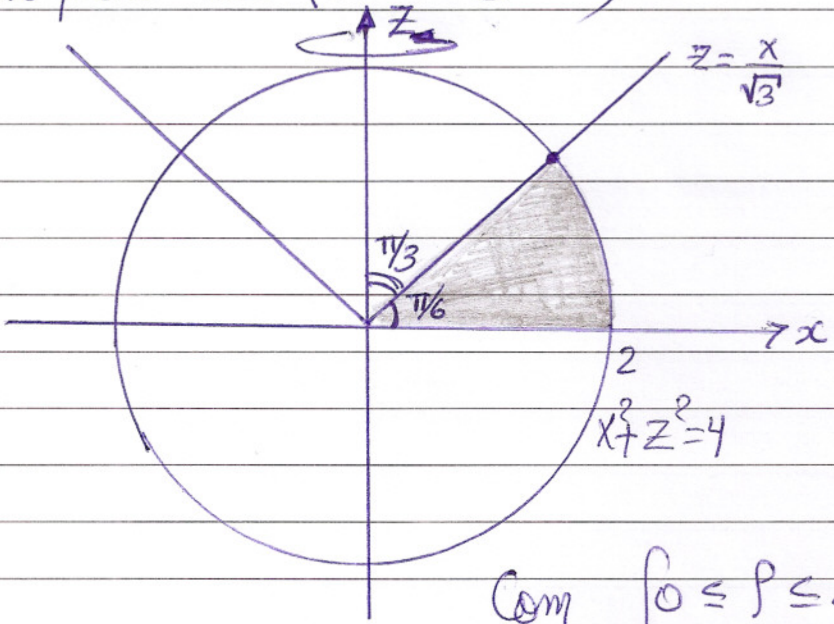
$$\text{Vol}(S) = \iint_R (3-y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (3-2\,\text{sen}\,\theta)(1{\times}2{\times}r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (3-2\,\text{sen}\,\theta)\, d\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\left[\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2} - 2$$

6



No plano XZ (quando $y = 0$)



Coordenadas Esfericas.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned}}$$

$Jac = \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi.$

Com $\begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$Vol(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi \; d\varphi \; d\rho \; d\theta$$

$$= (2\pi)\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\cos\varphi\right)_{\pi/3}^{\pi/2} = -\frac{2\pi}{3}\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} - \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$