JACIR J. VENTURI

cônicas
e
quádricas

5.ª edição
(atualizada)

Na internet você encontra integralmente
os dois livros do autor:
1) Álgebra Vetorial e Geometria Analítica
2) Cônicas e Quádricas
site: ***www.geometriaanalitica.com.br***
com acesso gratuito.

FICHA CATALOGRÁFICA

VENTURI, Jacir J., 1949 -
Cônicas e Quádricas / Jacir J. Venturi
- 5.ª ed. - Curitiba
243 p.: il.
Inclui Apêndice e Bibliografia.
ISBN 85.85132-48-5

1. Geometria Analítica. 2. Cônicas e Quádricas.
I. Título. CDD 516.3
V 469c 2003

ISBN 85-85132-48-5

Composição/Desenhos: Herica Yamamoto
Capa/Projeto Gráfico: Beatriz Susana
Impressão e Acabamento: Artes Gráficas e Editora Unificado
grafica@unificado.com

Dedico à Eliana,
Fábio, Débora e
Eduardo:
companheiros de
jornada e razão
maior do meu afeto e
crescimento pessoal.

Dedico também
às pessoas que vão
além do seu dever.

Índice

CAPÍTULO 4
A HIPÉRBOLE

CAPÍTULO 5
CÔNICAS

CAPÍTULO 6
EQUAÇÃO DA TANGENTE A UMA CÔNICA

CAPÍTULO 7
QUÁDRICAS

CAPÍTULO 8
QUÁDRICAS

CAPÍTULO 9
SUPERFÍCIE ESFÉRICA

CAPÍTULO 10
SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

CAPÍTULO 11
SUPERFÍCIE CÔNICA

PREFÁCIO

Conta uma fábula **grega** que os deuses do Olimpo estavam preocupados com a evolução do homem. Este estava se desenvolvendo tanto pelo uso de sua inteligência que em breve alcançaria os imortais deuses.

Era preciso agir. O tonitroante e todo-poderoso Zeus, senhor dos deuses e do mundo, vociferou: "Vamos esconder do homem o seu talento, e ele jamais nos alcançará".

Mas onde esconder o talento do homem? Posseidon, deus dos mares, sugeriu as profundezas dos oceanos. Apolo, deus da luz, no topo da montanha. Deméter, deusa da terra, em vales recônditos, Hefesto, deus do fogo, em magmas vulcânicas. Ares, deus da guerra, nas geleiras eternas.

Impávido, Zeus declara: "Nada disso, o melhor esconderijo do homem é o **interior** do próprio homem. Ele jamais há de procurar o que está dentro de si".

Esta fábula não só enaltece a busca do autoconhecimento e do desenvolvimento das próprias potencialidades, mas também retrata a saga intelectual do povo grego. Mesmo aos neófitos, a cultura helenística enseja umextraordinário fascínio.

A investigação sistemática, racional e criativa norteia suas atividades na **Matemática** (Hipócrates, Anaxágoras, Zenão, Demócrito, Hípias, Tales, Hipasus, Pitágoras, Euclides, Arquimedes, Apolônio, Eudoxo, Aristarco, Eratóstenes, Ptolomeu, Hiparco, Diofanto, Papus); na **Filosofia** (Sócrates, Platão, Aristósteles, Anaxímenes, Anaximandro, Protágoras, Zenão, Epicuro); na **História** (Heródoto, Xenofonte, Tucídides); na **Poesia** (Homero, Píndaro, Hesíodo, Safo); no **Teatro** (Ésquilo, Sófocles, Aristófanes, Eurípides); nas **Artes** (Fídias, Míron, Ictínio, Calícrates); na **Medicina** (Hipócrates, Empédocles, Alcméon).

Aos gregos (por nascimento e/ou formação) **Pitágoras**, **Euclides**, **Arquimedes** e **Apolônio** deve-se praticamente todo o desenvolvimento geométrico das **Cônicas**. E muito mais, ensejaram a transição da fase intuitiva e empírica da Matemática dos antigos egípcios e babilônios para a fase de **axiomatização** da Matemática. Mormente, da Geometria, "um mundo de infinita harmonia", conforme assevera o renomado escritor argentino Ernesto Sábato.

No volume anterior, **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**, tratamos de equações lineares, isto é, equações que só possuíam termos do 1.º grau em x, y e z. No presente (e despretensioso) livro-texto, tratar-se-á de equações do 2.º grau, no plano cartesiano. Em especial, a parábola, a elipse, a hipérbole e a circunferência. São curvas obtidas pela interseção de um plano com um cone circular de 2 folhas. Por isso, são chamadas de seções cônicas ou simplesmente **cônicas**.

Tratar-se-á também de superfície quádricas, que ganham uma importância cada vez maior na área computacional (Fractais, por exemplo).

Uma **quádrica** é o conjunto de pontos E^3, cujas coordenadas cartesianas, verificam uma equação do 2.º grau a, no máximo, três variáveis. Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (do 2.º grau) e cones (do 2.º grau) constituem as mais conhecidas superfície quádricas.

Um grande número de ilustrações facilita o entendimento do texto e é imprescindível quando se almeja uma conspícua formação geométrica. Há indicações de aplicabilidade prática, sinopses históricas e sugestões para a resolução de exercícios, no intuito de motivar o aluno naquilo que está estudando. Com o escopo didático, os exercícios estão dispostos emordem crescente de dificuldade.

Deve-se ter em mente que à resolução dos exercícios precede necessariamente um bom conhecimento da teoria. Por vezes, preferiu-se a apresentação intuitiva aos refinamentos teóricos, que viessem obstaculizar a compreensão do novel universitário.

Honraram-nos sobremaneira a análise criteriosa e as sugestões feitas pelo Prof. Leo Barsotti nos manuscritos que antecederam este manual e de quem fomos assistentes por 3 lustros. Nesta convivência, aprendemos a admirá-lo não apenas como profissional exigente e de extraordinário conteúdo mas também como exemplo de coerência e justiça.

Ademais, cumprimos o elementar dever de gratidão pelo desprendimento com que os professores Florinda Miyaóka, Osny A. Dacol, Décio Krause, Ana Maria N. de Oliveira, Luiz Carlos Domênico e Adilson Longen se dispuseram a ler o manuscrito e apresentar sugestões. O mesmo preito de gratidão estendemos à plêiade de colegas e amigos do Depto. deMatemática da UFPR, que nos propiciaram uma convivência de crescimento pessoal e profissional.

Também a nossa profunda e sincera gratidão aos abnegados professores Pe. Oneres Marchiori e Pe. Andreás Wiggers pelos ensinamentos de Matemática, Latim e Grego no Ensino Fundamental e Médio em Lages(SC) e antes de tudo exemplos de altruísmo e dedicação.

Críticas e sugestões hão de surgir. E serão bem-vindas. Resta-nos o consolo de ter envidado esforços para empregar utilmente o nosso tempo.

O autor

CÔNICAS: RESENHA HISTÓRICA

INTRODUÇÃO

"Na maior parte das ciências, assevera Herman Hankel, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que uma geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura." Como na formação de uma estrutura geológica, as descobertas matemáticas se sedimentam e se estratificam ao longo dos séculos. Entretanto não se infira que a Matemática é uma ciência estática e sim emcontínua evolução. As formulações inicialmente tênues e difusas percorrem um espinhoso caminho até atingir a magnitude de seu desenvolvimento.

No presente epítome histórico, vamo-nos ater ao período considerado por muitos historiadores como a **fase áurea** da Matemática da antigüidade. Esse período se inicia com a Escola Pitagórica (séc. VI a.C.), tem seqüência com Euclides e Arquimedes e termina com Apolônio (séc. II a.C.).

Este apanágio, por si só, não justificaria esta resenha histórica no presente livro-texto que trata das **Cônicas**. No entanto, é justamente nesse período que se dá praticamente todo o desenvolvimento geométrico das cônicas. Porém, o enfoque analítico das cônicas só acontece com **Fermat** (1601-1665), uma vez que os matemáticos gregos não possuíam uma notação algébrica adequada.

Credita-se a Fermat:

- o estabelecimento do princípio fundamental de que uma equação do 1.º grau, no plano, representa uma reta e que uma equação do 2.º grau, no plano, representa uma cônica;

- a determinação das equações mais simples da reta, da circunferência, da elipse, da parábola e da hipérbole;

- a aplicação da rotação de eixos para reduzir uma equação do 2.º grau à sua formamaissimples.

PITÁGORAS (560(?) – 500(?) a.C.)

A palavra Matemática (**Mathematike**, em grego) surgiu com Pitágoras, que foi o primeiro a concebê-la como um sistema de pensamento, fulcrado emprovas dedutivas.

Existem, no entanto, indícios de que o chamado **Teorema de**

Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) já era conhecido dos babilônios em 1600 a.C. com escopo empírico. Estes usavam sistemas de notação sexagesimal na medida do tempo e namedida dos ângulos.

Pitágoras nasceu na Ásia Menor, na ilha de Samos. Percorreu por 30 anos o Egito, Babilônia, Síria, Fenícia e quiçá Índia e Pérsia, onde acumulou ecléticos conhecimentos: astronomia, matemática, ciência, filosofia, misticismo e religião. É oportuno lembrar a sua contemporaneidade com Buda, Confúcio e Lao-Tsé.

Retornando a Samos, indispôs-se com o tirano Polícrates e emigrou para o meridião da Itália, na Ilha de Crotona, de dominação grega. Aí fundou a Escola Pitagórica, a quem se concede a glória de ser a "primeira Universidade domundo".

A Escola Pitagórica e suas atividades se viram desde então envoltas por um véu de lendas. Foi uma entidade parcialmente secreta com centenas de alunos que compunham uma irmandade religiosa e intelectual:

- prática de rituais de purificação e crença na doutrina da metempsicose, isto é, na transmigração da alma após a morte, de um corpo para outro. Portanto, advogavam a reencarnação e a imortalidade da alma;

- lealdade entre os seus membros e distribuição comunitária dos bens materiais;

- austeridade, ascetismo e obediência à hierarquia da Escola;

- proibição de beber vinho e comer carne (portanto é falsa a informação que seus discípulos tivessem mandado matar 100 bois quando da demonstração do denominado Teorema de Pitágoras);

- purificação da mente pelo estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia;

- classificação aritmética dos números em pares, ímpares, primos e fatoráveis;

- "criação de um modelo de definições, axiomas, teoremas e provas, segundo o qual a estrutura intrincada da Geometria é obtida de um pequeno número de afirmações explicitamente feitas e da ação de um raciocínio dedutivo rigoroso" (George Simmons);

- grande celeuma instalou-se entre os discípulos de Pitágoras a respeito da irracionalidade do $\sqrt{2}$. Utilizando notação algébrica, a equação $x^2 = 2$ não admitia solução numérica para os pitagóricos, pois estes só admitiam os números racionais. Dada a conotação mística atribuída a $\sqrt{2}$, comenta-se que, quando o infeliz Hipasus de Metapontum propôs uma solução para o impasse, os outros discípulos o expulsaram da Escola e o afogaram nomar;

- na Astronomia, idéias inovadoras, embora nem sempre verdadeiras: a Terra é esférica, os planetas movem-se em diferentes velocidades em suas várias órbitas ao redor da Terra. Pela cuidadosa observação dos astros cristalizou-se a idéia de que há uma ordem que domina o Universo;

- aos pitagóricos deve-se provavelmente a construção do cubo, tetraedro, octoedro, dodecaedro e a bem conhecida "seção áurea";

- na Música, uma descoberta notável de que os intervalos musicais se colocam de modo que admitem expressões através de proporções aritméticas: $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$.

No entanto, Pitágoras deve ser considerado uma figura imprecisa historicamente, já que tudo o que dele sabemos deve-se à tradição oral. Nada deixou escrito, e os primeiros trabalhos sobre o mesmo deve-se a Filolau, quase 100 anos após a morte de Pitágoras. Mas não é fácil negar aos pitagóricos - assevera Carl Boyer - "o papel primordial para o estabelecimento da Matemática como disciplina racional". A despeito de algum exagero, há séculos cunhou-se uma frase: "Se não houvesse o 'teorema Pitágoras', não existiria a Geometria".

A Escola Pitagórica ensejou forte influência na poderosa verve de Euclides e Platão, na antiga era cristã, na Idade Média, na Renascença e até emnossos dias com o Neopitagorismo.

EUCLIDES (c.325 - c.265 a.C.)

Ignora-se o local e ano de nascimento de Euclides. Provavelmente, tenha recebido os primeiros ensinamentos de Matemática dos discípulos de Platão.

Ptolomeu I - general macedônio favorito de Alexandre, o Grande, morto em323a.C.-trouxeEuclidesdeAtenasparaAlexandria. Esta tornara-se a nova capital egípcia no litoral mediterrâneo e centro econômico e intelectual do mundo helenístico. Euclides fundou a Escola de Matemática na renomada Biblioteca de Alexandria, que pode ter alcançado a cifra de 700.000 rolos (papiros e pergaminhos).

Alexandria, a partir de Euclides até o séc. IV d.C., reinou quase absoluta não só como a mais eclética e cosmopolita cidade da antigüidade,mastambémcomoprincipal centro de produçãomatemática.

A mais conspícua obra de Euclides, **Os Elementos** (c. 300 a.C.), constitui um dos mais notáveis compêndios de Matemática de todos os tempos, com mais de mil edições desde o advento da imprensa (a primeira versão impressa de **Os Elementos** apareceu em Veneza em 1482). Tem sido - segundo George Simmons - “considerado como responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia".

Conta-se que o rei Ptolomeu, tenho folheado **Os Elementos**, perguntou esperançosamente a Euclides se não havia um caminho mais suave para aprender Geometria. Lacônico, Euclides teria respondido: "Não há uma estrada real para a Geometria".

Os Elementos são uma compilação metódica e ordenada de 465 proposições reunidas em 13 livros. Sua característica é o rigor das demonstrações, o encadeamento lógico dos teoremas, axiomas e postulados e a clareza na exposição. Sua proposta é uma Geometria dedutiva, despreocupada das limitações práticas, contrastando com a Geometria egípcia, de caráter indutivo e fulcrada em problemas concretos.

Dos 13 livros em que se subdividem **Os Elementos**, os 6 primeiros tratam da Geometria Plana Elementar; os 3 seguintes, da Teoria dos Números, o livro X trata dos Incomensuráveis (números irracionais) e os 3 últimos, da Geometria no Espaço.

O livro XIII de **Os Elementos** aborda exclusivamente as propriedades dos 5 sólidos regulares - denominados **Poliedros de Platão**. Lembramos que um poliedro (do grego poli (muitas) + edro (faces)) é um sólido cuja superfície é constituída de faces poligonais. O poliedro é regular se suas faces forem polígonos regulares. Há apenas 5 poliedros regulares: o tetraedro (4 faces triangulares), o cubo ou hexaedro (6 faces quadradas), o octaedro (8 faces triangulares), o dodecaedro (12 faces pentagonais) e o icosaedro (20 faces triangulares).

Faz-se oportuna a asserção de George Simmons: "A construção de poliedros regulares fornece um clímax soberbo à Geometria de Euclides, e alguns conjecturam que esse foi o propósito primeiro pelo qual **Os Elementos** foram escritos: o de glorificar os Poliedros de Platão". Na proposição 18, a última de **Os Elementos**, Euclides prova que não pode haver umoutro poliedro regular, além dos 5 mencionados.

Euclides foi sinônimo de Geometria e reinou absoluto até o séc. XIX, quando foi parcialmente contestado o seu famoso 5.º postulado, por Riemann, Lobatchewski e Bolyai (criadores das geometrias não-euclidianas).

A bibliografia de Euclides é eclética e valiosa: **Os Dados** (solução de problemas geométricos planos, que complementavam os 6 primeiros volumes de **Os Elementos**); **Da Divisão** (trata da divisão de figuras planas); **Fenômenos** (geometria esférica aplicada à astronomia); **Óptica** (que trata da geometria dos raios refletidos e dos raios refratados); **Introdução Harmônica** (música).

E para desfortuna de milhares de matemáticos, muitas das obras de Euclides se perderam: Lugares de superfície, Pseudaria, Porismas (que pode ter representado algo próximo da nossa atual Geometria Analítica). Precipuamente, lamenta-se o desaparecimento de **AS CÔNICAS** de Euclides, que, conforme referências, deve ter tratado de esfera, cilindro, cone, elipsóide, parabolóide, hiperbolóide, etc.

A Biblioteca de Alexandria estava muito próxima do que se entende hoje por Universidade. E se faz apropriado o depoimento do insigne Carl B. Boyer, em a **História da Matemática**: "A Universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela sua capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra - **Os Elementos**."

ARQUIMEDES (287(?) – 212 a.C.)

A genialidade de Arquimedes como físico-matemático só é comparável com Isaac Newton, no séc. XVIII. Sua produção é completamente original e muito vasta, incluindo Geometria Plana e Sólida, Astronomia, Aritmética, Mecânica e Hidrostática.

Nasceu na ilha grega da Sicília, na cidade de Siracusa. Quando jovem estudou em Alexandria, o templo do saber da época, com os discípulos de Euclides.

Suas invenções engenhosas, suasmáquinas de caráter utilitário e bélico, o memorizaram através dos séculos por historiadores romanos, gregos, bizantinos e árabes.

Arquimedes, no entanto, considerava seus engenhos mecânicos como fator episódico e que, de certa forma, tiravam a dignidade da ciência pura. "Sua mentalidade não era a de um engenheiro, mas sim, a de um matemático".

Alguns de seus feitos são clássicos e conhecidos, mas merecem ser relembrados:

Por descrição de Vitrúvio, conhecemos a história da coroa do rei Herão. Este havia encomendado a um ourives uma coroa de ouro puro. Uma vez pronta, o desconfiado rei Herão solicitou a Arquimedes que analisasse a coroa e dirimisse a dúvida: era a coroa de ouro puro ou feita de uma amálgama com prata?

Quando tomava banho, Arquimedes observou que, à medida que seu corpo mergulhava na banheira, a água transbordava. Foi o **insight** para resolver o problema.

Conta o historiador Vitrúvio que Arquimedes, eufórico, teria saído pelas ruas, completamente nu, gritando "Eureka, eureka", que significa "Achei, achei".

Refeito do vexame, Arquimedes comprovou que houve fraude por parte do ourives. Destarte, tomou dois recipientes cheios de água e num recipiente imergiu um bloco de ouro e noutro recipiente, um bloco de prata. Como ambos os blocos continham o mesmo peso que a coroa, comprovou a fraude, pois constatou que os blocos deslocavam quantidades diferentes de água.

Deste fato decorre o **princípio de Arquimedes**, lei básica da Hidrostática: Todo corpo mergulhado num fluido recebe um impulso de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado.

Paradoxalmente, Arquimedes era muito negligente em termos de asseio pessoal. Lê-se em Plutarco que Arquimedes "era por vezes levado à força para banhar-se ou passar óleo no corpo, que costumava traçar figuras geométricas nas cinzas do fogo, e diagramas no óleo de seu corpo, estando em um estado de preocupação total e de possessão divina, no sentido mais verdadeiro, por seu amor e deleite pela ciência".

Na 2.ª Guerra Púnica, contra a poderosa razia do exército e marinha romanos, comandados pelo Cônsul Marcelo, a sagacidade de Arquimedes criou aparatos devastadores:

- catapultas de grande alcance para lançar blocos de pedra sobre as galeras inimigas;

- gigantescos guindastes que elevavam a proa dos navios romanos, afundando-os pela popa;

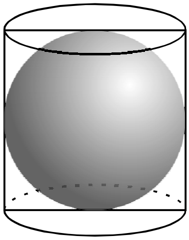
- um enorme espelho que incendiava os navios hostis a distância, uma vez que refletiam os raios solares.

Plutarco conta que se instalou tamanho temor e angústia entre as tropas romanas, que qualquer corda ou pau sobre as muralhas de Siracusa era considerado uma artimanha diabólica de Arquimedes.

Marcelo desistiu de tomar Siracusa por assalto e infligiu um cerco de 3 anos. Em 212 a.C. a cidade rendeu-se.

Adentrando-se às muralhas de Siracusa as hostes romanas promoveram a pilhagem, seguida de uma sangrenta matança. Um soldado aproximou-se de um encanecido senhor de 75 anos, que indiferente à chacina, desenhava diagramas na areia e absorto balbuciou: "Não perturbes os meus círculos". O soldado enraivecido trespassou-o com a espada. Foram as derradeiras palavras de Arquimedes.

Marcelo, que havia dado ordens expressas para que se poupasse a vida de seu arquirival, ficou muito entristecido e providenciou que lhe concedesse um enterro com honras. Mandou erigir um monumento e, satisfazendo o desejo de Arquimedes, foi gravada na lápide de seu túmulo a representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro, pois ele havia descoberto e provado as relações matemáticas (notação hodierna):



$$V_{ci} = \frac{3}{2} V_{esf.}$$

$$S_{ci} = \frac{3}{2} S_{esf.}$$

Outros inventos notáveis ou estudos de Arquimedes:

- Um mecanismo feito de tubos em hélice, fixos a um eixo inclinado com uma manivela para fazê-lo girar. Tem por escopo elevar a água a um plano superior, conhecido como "parafuso de Arquimedes". É um processo rudimentar, mas que ainda é usado ao longo do rio Nilo.

- Descobriu o princípio da alavanca e cunhou o célebre aforisma: "Dê-me um ponto de apoio e levantarei o mundo".

- Conta Plutarco que Arquimedes arrastou uma das galeras do rei Herão tão suave e uniformemente como se navegasse em pleno mar, movendo apenas com sua mão a extremidade de um engenho que consistia em um bloco com polias e cordas.

- Relata Cícero que Arquimedes construiu um empolgante mecanismo hidráulico, com esferas móveis que representavam o Sol, a Lua, os cinco planetas (conhecidos), podendo-se observar as fases e os eclipses da Lua. Enfim, um pequeno planetário.

A grandeza também se manifesta na Matemática:

- No tratado **Sobre as Medidas do Círculo**, Arquimedes, em um círculo dado, inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve a fórmula para o cálculo da área do círculo e, por muitos séculos, o mais acertado valor para π:

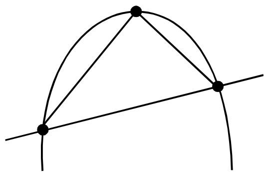
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

OBSERVAÇÃO:

A obtenção da área do círculo através de polígonos ficou conhecida como a "quadratura do círculo". Apenas à guisa de ilustração, o símbolo π não foi usado na antigüidade grega no sentido atual. A introdução do símbolo só aconteceu em 1706, por William Jones, um amigo de Newton.

A letra π é a inicial da palavra grega $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ que significa periferia, circunferência. Sabemos que π = 3,1415926535... é um número irracional. Em 1988, o japonês Yasumasa Kanada conseguiu calcular o π com 200 milhões de casas decimais. O supercomputador da época, usado por Y. Kanada levou apenas 6 horas para fazer os cálculos.

- No tratado a **Quadratura da Parábola**, Arquimedes demonstra que a área contida por um parábola (S_P) e uma reta transversal é $^4/_3$ da área do triângulo (S_Δ) com a mesma base e cujo vértice é o ponto onde a tangente à parábola é paralela à base.



$$S_p = \frac{4}{3} S_\Delta$$

Ainda neste mesmo tratado, o ilustre siracusano foi provavelmente o primeiro a saber e provar que a área da esfera é $4\pi R^2$, em notação atual.

- No livro **O Equilíbrio de Planos**, trata do centro de gravidade de figuras sólidas e planas (triângulo, trapézio, segmento de parábola, etc.).

- No tratado **Dos Conóides e Esferóides**, Arquimedes obtém a área de uma elipse ($S = \pi ab$) e descreve sólidos de revolução gerados por parábolas, elipses e hipérboles em torno de seus eixos (quádricas de revolução).

- O tratado **Sobre Espirais** descreve a curva hoje conhecida como Espiral de Arquimedes (em coordenadas polares tem equação $\rho = k\theta$) e pela primeira vez determina a tangente a uma curva que não seja o círculo.

- De forma inédita, Arquimedes apresenta os 1.^{os} conceitos de limites e cálculo diferencial.

APOLÔNIO DE PERGA (262(?) – 190(?) a.C.)

Parece ter-se considerado um cordial rival de Arquimedes, e muito pouco se sabe de sua vida. Nasceu em Perga, sul da Ásia Menor, em data desconhecida. Supõe-se ter sido educado em Alexandria e por algum tempo ter ensinado em sua "Universidade". Graças ao apoio de Lisímaco, general de Alexandre, transferiu-se para Pérgamo (donde a palavra pergaminho), onde havia uma biblioteca e uma "Universidade" só inferiores às de Alexandria.

Apolônio, e não Euclides, mereceu dos antigos e epíteto de o **Grande Geômetra** e isto pode nos parecer inaceitável. A verdade é que não se pode questionar o mérito de ambos. Euclides tornou-se sinônimo de Geometria por sua amplamente conhecida obra **Os Elementos**, enquanto a maior parte das obras de Apolônio desapareceram.

O que sabemos dessas obras perdidas devemos a Pappus de Alexandria (séc. IV d.C.), que fez uma breve descrição de sua grande produção matemática. Infere-se que os tratados de Apolônio continham uma Matemática bastante avançada e inclusive muito do que conhecemos hoje como Geometria Analítica.

Para gáudio de todos, porém, o tratado **As Cônicas**, sobre seções cônicas, suplantou todas as obras existentes na antigüidade. O tratado **As Cônicas** é composto de 8 livros, sete dos quais sobreviveram.

Faz-se oportuno um superficial epítome de **As Cônicas** (embora haja dificuldade emfazê-lo dada a amplitude e a profundidade da obra):

- as seções cônicas não possuíam uma terminologia apropriada. Foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole. A palavra parábola deve-se provavelmente a Arquimedes;

- pela primeira vez Apolôniomostrou que de umúnico cone podem ser obtidas a elipse, a parábola e a hipérbole, simplesmente variando a inclinação do plano de seção;

- até então o cone utilizado era de uma só folha. Introduzindo o cone duplo (de duas folhas), Apolônio apresenta a hipérbole como uma curva de dois ramos, que nos é familiar;

- as propriedades das curvas não diferem conforme sejam obtidas emcones retos ou oblíquos;

- embora Apolônio não se reportasse a um sistema de eixos (em Geometria Analítica ditos cartesianos), via de regra, utilizava umpardediâmetros conjugados como equivalentes aos eixos oblíquos;

- Apolônio conhecia a hipérbole eqüilátera, a hipérbole referida às assíntotas, pólo, reta polar de umponto externo à cônica;

- o matemático de Perga descreve um profundo estudo sobre tangentes e normais a uma cônica.

Aos que buscam um conhecimento mais profundo do tratado **As Cônicas**, recomendamos a leitura do capítulo 9, de **História da Matemática** por Carl B. Boyer. A propósito, este escreve: "Foi a Matemática Pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1.800 anos mais tarde, os **Principia** de Newton; este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível".

Igualmente é inegável a influência de Apolônio sobre Ptolomeu. Este foi astrônomo e geógrafo e fez observações em Alexandria de 127 a 151 d.C.. Suas obras mais famosas são o **Almajesto** (astronomia) e a **Geografia** (8 volumes).

Ptolomeu introduziu as tabelas trigonométricas, o sistema de latitude e longitude tal como é usado hoje em cartografia, usou métodos de projeção e transformações estereográficas. Catalogou cerca de 8.000 cidades, rios e referenciais importantes. Até a Idade Média, os mapas tinham como protótipos os mapas elaborados por Ptolomeu. E sobre tais mapas se debruçou Colombo muitas vezes antes de empreender sua viagem à América.

Ademais, **As Cônicas** de Apolônio tiveram forte influência nos estudos de Kepler. Em 1609, Kepler edita a **Astronomia Nova**, onde apresenta a principal lei da astronomia: "os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos". A propósito, a palavra foco é devida a Kepler e provém da forma latinizada **focus**, cuja acepção é fogo, lareira.

Outra aplicação prática de **As Cônicas** aparece na obra **Os dois principais sistemas** (1632), de Galileu, em que "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola". Ademais, Galileu se reporta à componente horizontal e à componente vertical de uma parábola.

Enfim, Leibniz se faz oportuno: "Quem entende Arquimedes e Apolônio, admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores".

GEOMETRIA ANALÍTICA: SINOPSE HISTÓRICA

Depreende-se que foi extraordinário o incremento dado à Geometria Plana e Espacial pelos matemáticos helenísticos. Porém, não dispunham de uma notação algébrica adequada. Que nos perdoem pelo exagero da simplificação, mas podemos afirmar que a Álgebra possui uma dupla paternidade: Diofanto e al-Khowarizmi.

Diofanto de Alexandria viveu no séc. III d.C., e sua principal obra foi **Aritmética**, tratado que originalmente era composto de 13 livros, dos quais só os 6 primeiros se preservaram. O principal mérito da **Aritmética** é a utilização de notações, ou seja, de uma linguagem mais sincopada, mais simbólica para a Matemática.

Por seu turno, **al-Khowarizmi** viveu por volta de 800 d.C. na cidade de Bagdá, que emerge como uma nova Alexandria. Sua principal obra **Al-Jabr** deixou marcas indeléveis em toda e Europa. **Al-Jabr** recebeu a forma latinizada Algebrae (Álgebra). As palavras algarismo e algoritmo são provavelmente corruptelas de al-Khowarizmi (algorismi $\Rightarrow$ algarismo $\Rightarrow$ algoritmo).

Em árabe **Al-Jabr** significa, numa tradução mais livre, **deslocação** e parece "referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação".

Os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tiveram notável receptividade na Europa através da obra de al-Khowarizmi. Daí serem denominados algarismos **arábicos**, mas que a bem da verdade são de origem hindu.

Fulcrado nos geômetras gregos e no desenvolvimento da álgebra em toda a Europa, **Pierre de Fermat** conclui em 1629 o manuscrito **Ad locos planos et solidos isagoge** (Introdução aos lugares planos e sólidos). Para a maioria dos historiadores, tal manuscrito representa o marco zero da Geometria Analítica.

É curioso observar que Fermat não era um matemático. Estudou Direto em Toulouse, na França, e aí exerceu o cargo de advogado e conselheiro do parlamento. Fermat tinha a Matemática como um "hobby" e mesmo assim foi considerado por Pascal o maior do seu tempo.

Desafiou a têmpera racional de muitas gerações de matemáticos com o notabilíssimo **Último Teorema de Fermat**. Às margens da **Arithmética** de Diofanto, Fermat escreveu: "Não desenvolvo aqui a demonstração deste teorema por falta de espaço." (ver pág. 33 do nosso livro **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**). Dedicou-se aos pensadores clássicos e à matemática grega e segundo Carl B. Boyer, a obra **As Cônicas** de Apolônio foi uma das obras favoritas de Fermat.

Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) a descoberta das equações da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2.º grau à sua forma mais simples. É cristalina em Fermat a percepção de uma Geometria Analítica a três dimensões: "Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície".

É oportuno observar que a usual denominação **sistema cartesiano** (**Cartesius** é a forma latinizada de Descartes) é anacrônica historicamente, pois sua obra não contém eixos perpendiculares, eixos oblíquos, nem tampouco a equação de uma reta. Por mérito, o sistema cartesiano deveria denominar-se **sistema fermatiano**.

Indubitavelmente, Renê Descartes (1596-1650) é considerado o **pai da filosofia moderna** pela sua obra **Discours de la Méthode**, publicada em 1637. O terceiro apêndice desta obra chama-se **La Géométrie** e é uma aplicação da álgebra aos problemas geométricos, mas quase nada trata do que se entende hoje por Geometria Analítica. Segundo George Simmons "**La Géométrie** foi pouco lida então e menos lida hoje, e bem merecidamente".

O autor

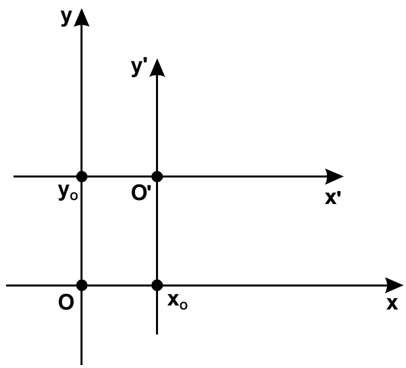
CAPÍTULO 1

Transformações de coordenadas no E^2

Uma vez conhecidas as coordenadas de um ponto ou a equação de uma curva em relação a um certo sistema de referência, trataremos neste capítulo das novas coordenadas do ponto ou da nova equação da curva em relação a um novo sistema de referência. Assim, a curva cuja equação $f(x, y) = 0$ quando referida a um **sistema de coordenadas cartesianas xOy** transformar-se-á numa equação do tipo $F(x', y') = 0$, quando referida a umnovosistema de coordenadas cartesianas x'O'y'.

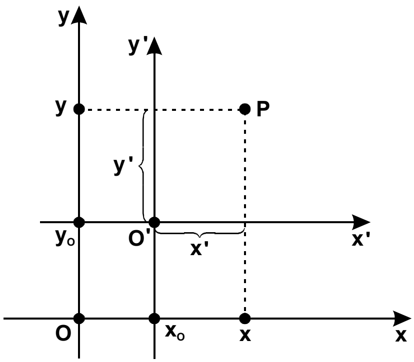
Este novo sistema é obtido através de **uma translação de eixos** e/ou uma **rotação de eixos**. Enfatize-se que numa **transformação de coordenadas** (mediante uma rotação ou translação) não é afetada a forma da curva ou o gráfico da curva. No entanto, há alteração na equação da curva.

1. TRANSLAÇÃO DE EIXOS



No plano cartesiano xOy considere um ponto $O' = (x_o, y_o)$. Introduza um **novo** sistema x'O'y' tal que O' seja a nova origem e o eixo O'x' tenha a mesma direção e sentido de Ox e O'y' tenha a mesma direção e sentido de Oy.

Dizemos que o **novo** sistema x'O'y' foi obtido por uma **translação** do **antigo** sistema xOy. Em ambos os sistemas se conservam as unidades demedida.



Um ponto P do plano tem coordenadas:

$*$ x e y em relação ao sistema xOy.

$*$ x' e y' em relação ao sistema x'O'y'.

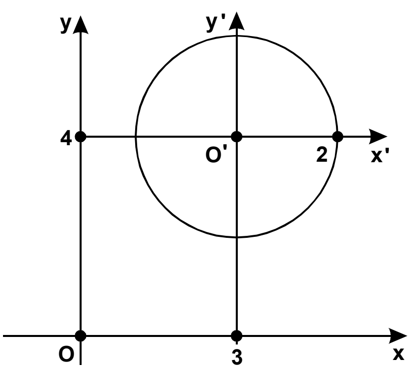
Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**:

$$x = x_o + x'$$
$$y = y_o + y'$$

Exemplo:

Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ em relação ao sistema xOy. Faça uma translação de eixo tal que a nova origem seja O' = (3, 4). Obtenha a equação da circunferência em relação ao novo sistema x'O'y'.

RESOLUÇÃO:



a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$$

b) Substituindo x e y por seus valores na equação da circunferência:

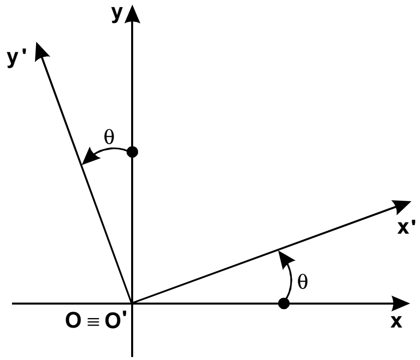
$$(x' + 3)^2 + (y' + 4)^2 -$$
$$- 6(x' + 3) - 8(y' + 4) +$$
$$+ 21 = 0$$

Efetuando-se:

$x'^2 + y'^2 = 4$ (circunferência)

A circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ se transforma na equação $x'^2 + y'^2 = 4$ mediante uma translação de eixos, sendo a nova origem O' = (3, 4) e raio igual a 2.

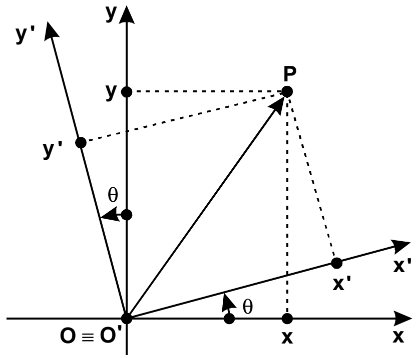
2. ROTAÇÃO DE EIXOS



Preliminarmente consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Mantendo fixa a origem O, faz-se uma rotação nos eixos Ox e Oy de um mesmo ângulo , no sentido anti-horário. Obtemos assim um novo sistema x'O'y' por uma rotação de xOy.

a) Fórmulas de rotação

Um ponto P que tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy, após uma rotação de eixos assume coordenadas (x', y') em relação ao novo sistema x'O'y'.



Na figura ao lado:

(P – O) = (P – O')

$(x\vec{i} + y\vec{j}) = x'\vec{i'} + y'\vec{j'})$ ①

onde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{i'}$ e $\vec{j'}$ são respectivamente os versores dos eixos x, y, x' e y'.

a) Multiplicando escalarmente ① por $\vec{i}$:

$$(x\vec{i}\,.\,\vec{i} + y\vec{j}\,.\,\vec{i}) = (x'\vec{i}'\,.\,\vec{i} + y'\vec{j}'\,.\,\vec{i}) \qquad ②$$

Mas:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}\,.\,\vec{i} = 1 \\ \vec{j}\,.\,\vec{i} = 0 \\ \vec{i}'\,.\,\vec{i} = |\vec{i}'|\,|\vec{i}|\cos x'x = \cos\theta \\ \vec{j}'\,.\,\vec{i} = |\vec{j}'|\,|\vec{i}|\cos y'x = \cos(90^o + \theta) = -\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} ③$$

Substituindo ③ em ②:

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$

b) Multiplicando escalarmente ① por $\vec{j}$ obtemos por cálculos análogos:

$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

Como se viu, deduzimos vetorialmente as **fórmulas de rotação**:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{array}}$$

b) Tabela das fórmulas de rotação

Com o escopo mnemônico, transcrevemos a tabela abaixo. Observe que a 2.ª coluna nada mais é do que **a derivada** da 1.ª coluna.

x	x'	y'
x	cos θ	– sen θ
y	sen θ	cos θ

DERIVADA

Exemplo: A equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ representa uma **elipse** no sistema xOy. Obter a equação da mesma elipse uma vez efetuada a rotação de eixos de amplitude $\theta = 45^o$.

RESOLUÇÃO:

a) Fórmulas de rotação:

$$x = x'\cos 45^o - y'\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$x = x' \operatorname{sen} 45^{o} + y' \cos 45^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

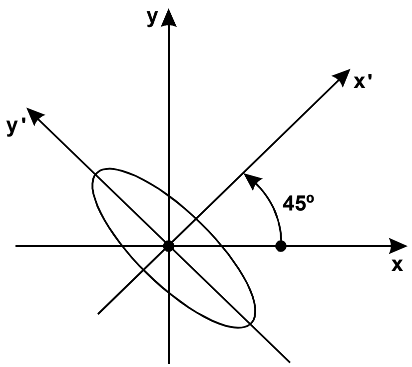
b) Substituindo x e y por seus valores na equação dada:

$$5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]^2 + 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right] + 5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right]^2 - 8 = 0$$

c) Desenvolvendo e simplificando, a equação acima reduz-se a:

$$4x'^2 + y'^2 = 4$$

d) Gráfico:



A equação

$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

foi transformada na equação $4x'^2 + y'^2 = 4$ mediante uma rotação de $\theta = 45^{o}$. Veremos que a equação transformada é de longe, muito mais fácil de se representar graficamente.

OBSERVAÇÃO:

Parábola, elipse e hipérbole serão estudadas nos três próximos capítulos. Didaticamente merece ressalvas a postura de se reportar a uma curva que ainda não foi apresentada.

Justifiquemos:

1) As equações mais simples (ditas canônicas) da parábola, elipse e hipérbole fazem parte do conteúdo programático do Ensino Médio.

2) Nosso escopo no presente capítulo não é enfatizar o gráfico da curva e sim a rotação e/ou translação de eixos cartesianos.

Exercícios

"Deus dá a todos uma estrela, uns fazem da estrela um sol. Outros nem conseguem vê-la."
Helena Kolody, poeta e escritora paranaense.

01. Transformar a equação $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 5 = 0$ por meio de uma translação de eixos, considerando a nova origem no ponto (1, 2).

Resp.: $x'^2 + 4y'^2 - 12 = 0$

02. Por meio de uma rotação de eixos de amplitude $\frac{\pi}{4}$ rad., transformar a equação $x^2 - y^2 = 4$.

Resp.: $x'y' = -2$

03. Obter a nova equação da reta $3x - 4y + 10 = 0$ quando se efetua uma rotação de eixos de amplitude θ, sabendo-se que $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$.

Resp.: $y' - 2 = 0$

04. Por meio de uma rotação de eixos de amplitude $\theta = 30^o$, transformar a equação $6x^2 + 8y^2 - 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$.

Resp.: $5x'^2 + 9y'^2 - 1 = 0$

05. Transformar a equação xy = 1 através de uma rotação de eixos de $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

Resp.: $x'^2 - y'^2 = 2$

3. APLICAÇÃO DAS TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES NO ESTUDO DE UMA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

O estudo emepígrafe terá aplicações assaz importantes nos capítulos vindouros: elipse, parábola, hipérbole, cônicas.

Assim, seja a equação do 2.º grau emduasvariáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nosso escopo é eliminar nesta equação, um ou mais termos, utilizando uma **translação** e/ou uma **rotação**. Afloram dois tipos de problemas, que serão analisados de per si:

a) Por meio de uma translação eliminar os termos do 1.º grau.

Exemplo: Calcular as coordenadas da nova origem $O' = (x_o, y_o)$ à qual se deve transladar os eixos, para que na equação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ desapareçam os termos do 1.º grau.

RESOLUÇÃO:

a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

b) Substituindo na equação da circunferência:

$$(x_o + x')^2 + (y_o + y')^2 - 4(x_o + x') - 6(y_o + y') + 4 = 0$$

c) Desenvolvendo e agrupando convenientemente os termos:

$$x'^2 + y'^2 + (2x_o - 4)x' + (2y_o - 6)y' + x_o^2 + y_o^2 - 4x_o - 6y_o + 4 = 0 \quad (*)$$

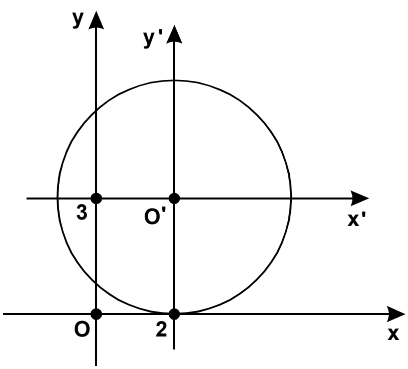
⁎ fazendo o coeficiente de x' igual a zero:

$2x_o - 4 = 0 \rightarrow x_o = 2$

⁎ fazendo o coeficiente de y' igual a zero:

$2y_o - 6 = 0 \rightarrow y_o = 3$

Então $O' = (2, 3)$,



d) Substituindo $x_o = 2$ e $y_o = 3$ em (*):

$x'^2 + y'^2 - 9 = 0$

que representa a equação de uma circunferência com centro na origem do sistema x'O'y' e cujo raio é 3.

Parecem-nos úteis e práticas as seguintes propriedades (que podem ser verificadas no exemplo acima):

1. Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, a translação não afeta os coeficientes dos termos do 2.º grau (A, B, C).

2. Após uma translação com O' = (x_o, y_o) o novo termo independente F' pode ser obtido: $F' = Ax_o^2 + Bx_oy_o + Cy_o^2 + Dx_o + Ey_o + F$.

EXEMPLIFIQUEMOS:

Na equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$, os termos do 1.º grau são eliminados quando feita uma translação para O' = (1, –1). Em relação ao sistema x'O'y' a nova equação terá a forma $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + F' = 0$.

Mas, $F' = 5(1)^2 + 6(1)(-1) + 5(-1)^2 - 4(1) - 4(-1) + 8 = 4$.

Resp.: $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + 4 = 0$

b) Por meio de uma rotação eliminar o termo em xy.

Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (①), o **termo em xy pode ser eliminado** mediante uma rotação de eixos correspondente a um ângulo θ tal que:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}} \qquad (\text{para } A \neq C)$$

DEMOSTRAÇÃO:

a) Fórmulas de rotação:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases} \qquad ②$$

b) Substituindo ② em ①:

$$A(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) +$$
$$+ C(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 + \ldots = 0$$

ordenando os termos em x'^2, y'^2 e $x'y'$:

$$(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)x'^2 + [-2A\operatorname{sen}\theta\cos\theta +$$
$$+ B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta]\,x'y' + (A\operatorname{sen}^2\theta -$$
$$- B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta)y'^2 + \ldots = 0$$

O termo em xy desaparecerá na equação acima se o seu coeficiente for nulo:

$$(C-A)(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)+B(\cos^2\theta-\text{sen}^2\,\theta)=0$$

$$(C-A)\,\text{sen}\,2\theta+B\cos 2\theta=0 \qquad ③$$

Dividindo por $\cos 2\theta$:

$$(C-A)\,\text{tg}\,2\theta+B=0$$

ou

$$\text{tg}\,2\theta=\frac{B}{A-C} \qquad ④ \qquad (A\neq C)$$

Cumpre destacar:

1) A rotação não afeta o termo independente.

2) Adotaremos sempre $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

3) Se em particular A = C, então ④ não tem sentido, mas de ③ obtém-se $B\cos 2\theta=0 \Rightarrow \cos 2\theta=0 \Rightarrow 2\theta=90^\circ \Rightarrow \theta=45^\circ$.

4) O grau de uma equação não é alterado quando se aplica uma transformação de coordenadas.

Exercícios Resolvidos

"Todos sabemos o que somos, mas não o que podemos ser."
William Shakespeare (1564-1616), o maior dramaturgo inglês.

1. Dada a equação $3x^2-4xy-1=0$, pede-se para:

a) achar o ângulo de rotação que elimina o termo emxy.

RESOLUÇÃO:

$$\text{tg}\,2\theta=\frac{B}{A-C}=\frac{-4}{3-0}=\frac{-4}{3}$$

$$\text{mas tg}\,2\theta=\frac{2\,\text{tg}\,\theta}{1-\text{tg}^2\,\theta}=\frac{-4}{3}$$

Efetuando-se: $2\,\text{tg}^2\,\theta-3\,\text{tg}\,\theta-2=0$

Equação do 2.º grau cujas raízes são:

$$\text{tg}\,\theta_1=2$$

$$\text{tg}\,\theta_2=-\frac{1}{2}$$

OBSERVAÇÃO:
O ângulo agudo θ é obtido pela tg $\theta = 2 \Rightarrow \theta = 63°25'$.

b) Calcular as fórmulas de rotação (para $0° \leq \theta \leq 90°$).

b.1) Cálculo do sen θ e do cos θ

Obtivemos que tg $\theta = 2$

$$\ast \sec^2\theta = 1 + tg^2\theta = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\sec\theta = \sqrt{5}$$

$$\ast \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\ast sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

$$sen\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

b.2) Fórmulas de rotação:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\,sen\,\theta \\ y = x'\,sen\,\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Substituindo $sen\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x' - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)y' = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)x' + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)y' = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

c) Obter a nova equação no sistema x'Oy' após a rotação de eixos de amplitude θ:

c.1) Substituindo as fórmulas de rotação na equação dada:

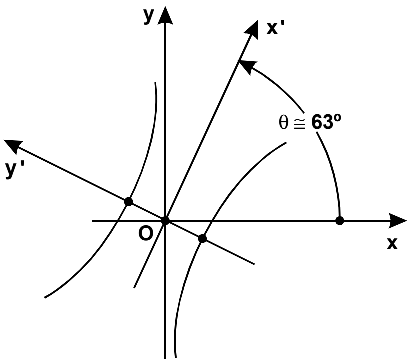
$$3\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 0$$

c.2) Efetuando-se os produtos e as somas:

Resp.: $4y'^2 - x'^2 - 1 = 0$

OBSERVAÇÃO:

Veremos no Cap. 4 que a equação $4y'^2 - x'^2 - 1 = 0$ representa uma hipérbole referida ao sistema x'Oy' e a equação dada $3x^2 - 4xy - 1 = 0$ representa a mesma hipérbole porém referida ao sistema xOy. A rotação dos eixos foi de $\theta_1 \cong 63^o$. Ao lado (apenas a título de ilustração) representou-se a hipérbole.



2. Transformar a equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 6y + 1 = 0$ numa equação do tipo $Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$.

RESOLUÇÃO:

Na equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 6y + 1 = 0$ devemos eliminar:

1) os termos do 1.º grau (translação)

2) o termo em xy (rotação)

Importante: Pode parecer natural que a translação necessariamente preceda à rotação. Mas nem sempre isto é verdadeiro. Há exercícios cuja ordem das transformações é contrária à citada. Alvitramos a seguinte regra prática:

Na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se:

$$B^2 - 4AC \neq 0 \quad \begin{cases} \text{1) translação} \\ \text{2) rotação} \end{cases}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \begin{cases} \text{1) rotação} \\ \text{2) translação} \end{cases}$$

No presente exercício:

$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(3)(3) \neq 0$

Ordem das transformações:

1) translação

2) rotação

2.a) TRANSLAÇÃO

Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

Substituindo na equação dada:

$3(x_o + x')^2 + 2(x_o + x')\ (y_o + y') + 3(y_o + y')^2 - 6(x_o + x') -$
$- 6(y_o + y') + 1 = 0$ (1)

Fazendo os coeficientes de x' e de y' igual a zero:

$$\begin{cases} 6x_o + 2y_o - 6 = 0 \\ 2x_o + 6y_o - 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos: $x_o = \dfrac{3}{4}$ e $y_o = \dfrac{3}{4}$, ou seja, $O' = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

Como na translação para a nova origem $O' = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$ são eliminados os termos do 1.º grau, resulta uma equação do tipo:

$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 + F' = 0$, onde:

$$F' = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{4}\right) - 6\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{-7}{2}$$

Assim pela translação a equação dada se transforma numa equação do tipo:

$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

OBSERVAÇÃO:
Se levássemos $O' = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$ em (1) obteríamos igualmente (2), porém não optado por ser um método mais laborioso, via de regra.

2.b) ROTAÇÃO (para se eliminar o termo em x'y' na equação (2)).

Como na equação dada $A = C \Rightarrow \theta = 45^o$

Fórmulas de rotação:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos 45^\circ - y''\,\text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'') \\ y' &= x''\,\text{sen}\,45^\circ + y''\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'') \end{aligned}\right\} \quad ③$$

Substituindo ③ em ②:

$$3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'')\right]^2 + 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'')\right] +$$

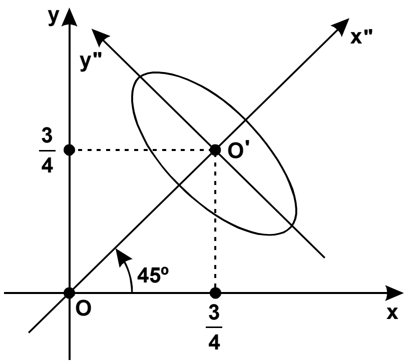
$$+3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'')\right]^2 - \frac{7}{2} = 0$$

Efetuando os produtos e as somas: $4x''^2 + 2y''^2 - \frac{7}{2} = 0$ ④

que é uma equação do tipo $Ax''^2 + By''^2 + F = 0$.

OBSERVAÇÃO:

No Capítulo 3 veremos que a equação ④ representa uma elipse.



Ao lado, apenas a título de ilustração, figurou-se a elipse em relação ao novo sistema x"O'y",após efetuada uma translação para $O' = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e uma rotação de amplitude $\theta = 45^\circ$.

Exercícios

"Pior que o ódio é a falta de amor."
Nelson Rodrigues (1912-1980), dramaturgo e jornalista pernambucano.

01. Mediante uma translação de eixos, eliminar os termos do 1.º grau na equação $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 5 = 0$.

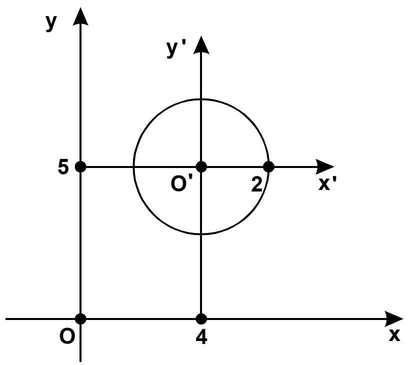
Resp.: $x'^2 + 4y'^2 - 12 = 0$

02. Eliminar os termos do 1.º grau em $2xy - x - y + 3 = 0$ por meio de uma translação de eixos.

Resp.: $4x'y' + 5 = 0$

03. Transforme a equação $x^2 + y^2 - 8x - 10y = -37$ numa equação do tipo $x^2 + y^2 = k$. Construa a figura.

Resp.: $x'^2 + y'^2 = 4$



> ***SUGESTÃO:***
> Na equação dada devemos eliminar os termos do 1.º grau $\rightarrow$ translação.

04. Eliminar o termo em xy na equação $x^2 + 4xy + y^2 - 2 = 0$ mediante uma rotação de eixos.

Resp.: $3x'^2 - y'^2 - 2 = 0$

05. Calcular o ângulo θ ($0^o \leq \theta \leq 90^o$) necessário para girar os eixos para que desapareça o termo em xy na equação $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \sqrt{3}x - y + 3 = 0$ e achar a equação da curva referida aos novos eixos.

Resp.: $\theta = 60^o$; $2x'^2 - y'^2 + 3 = 0$

Série B

> ***"Não tenho tempo nem para brigas nem para lamentações; homem algum pode obrigar-me a descer tanto que possa odiá-lo."***
> Laurence Jones

06. Transformar a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ numa equação do tipo $Ax'^2 + Cy'^2 = F$.

Resp.: $6x'^2 + y'^2 = 1$

SUGESTÃO:

Na equação dada deve-se eliminar o termo em xy $\rightarrow$ rotação.

Fórmula: $tg\,2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow sen\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $\cos\theta \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Com estes valores substitui-se as fórmulas de rotação na equação dada.

07. Reduzir a equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y - 1 = 0$ à forma $Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$.

Resp.: $8x''^2 + 2y''^2 - 5 = 0$

SUGESTÃO:

a) Devemos eliminar:

- os termos do 1.º grau $\rightarrow$ translação.
- o termo em xy $\rightarrow$ rotação.

b) Ordem das transformações:

$$B^2 - 4AC \neq 0 \begin{cases} 1) \text{ translação.} \\ 2) \text{ rotação.} \end{cases}$$

c) Substituindo as fórmulas de translação na equação dada obtém-se $O' = (1, -1)$ e uma equação do tipo: $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + F = 0$.

Mas: $F = 5(1)^2 + 5(-1)^2 + 6(1)(-1) - 4(1) + 4(-1) - 1 = -5$.

Então: $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 - 5 = 0$ (1)

d) Com a rotação eliminamos o termo em xy na equação (1):

$$tg\,2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{6}{0} \qquad \Rightarrow \theta = 45^o.$$

Fórmulas de rotação para $\theta = 45^o$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos 45^o - y'\,sen\,45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y &= x'\,sen\,45^o + y'\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{aligned}\right\} (2)$$

e) Levando (2) em (1) tem-se a resposta.

08. Transformar a equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ numa equação do tipo $Ay'^2 + Bx' = 0$.

Resp.: $y'^2 - 4x' = 0$

SUGESTÃO:

Deve-se eliminar o termo em y (translação) e o termo independente. Substituindo as fórmulas de translação na equação dada:

$$(y_o + y')^2 - 4(x_o + x') - 6(y_o + y') + 5 = 0 \quad (1)$$

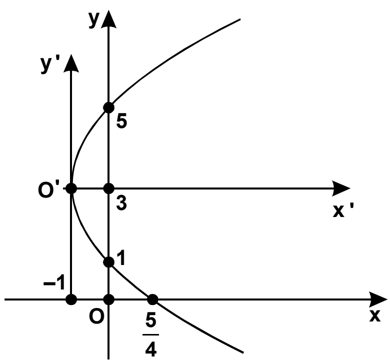
ordenando :

$$y'^2 - 4x' + (2y_o - 6)\,y' + \underbrace{y_0^2 - 4x_0 - 6y_0 + 5}_{\text{Termo Independente}} = 0$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2y_o - 6 = 0 \\ y_o^2 - 4x_o - 6y_o + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = \ \ 3 \end{cases}$$

A nova origem é $O' = (-1, 3)$. Levando $x_o = -1$ e $y_o = 3$ em (1) chega-se à resposta.



À guisa de ilustração: a curva (parábola) de equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ se transforma na equação $y'^2 - 4x' = 0$ mediante uma translação de eixos, sendo a nova origem $O' = (-1, 3)$. Ademais, observe que a curva (parábola) intercepta o eixo das abscissas no ponto $x = \frac{5}{4}$ (basta fazer y = 0 na equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$).

Similarmente, corta o eixo das ordenadas nos pontos 1 e 5 (basta fazer o x = 0 na equação $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$).

09. Transformar a equação $4x^2 + y^2 - 4xy - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ numa equação do tipo $Ay'^2 + Bx' = 0$.

Resp.: $y'^2 - 8x' = 0$

SUGESTÃO :

a) Ordem das transformações: $B^2 - 4AC = 0 \quad \begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$

b) Ângulo de rotação:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Fórmulas de rotação: $x = \dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$ e $y = \dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$

d) Substituindo as fórmulas de rotação na equação dada obtém-se $y'^2 - 8x' = 0$. Como esta é a forma pedida não há necessidade de translação. A rotação, de per si, eliminou os termos x^2, xy e y.

A DIFÍCIL ARTE DE EQUILIBRAR AFETO E LIMITES

"A estrutura básica do ser humano não é a razão e sim, o afeto" – ensina apropriadamente Leonardo Boff, autor de 72 livros e renomado intelectual brasileiro.

Realmente, quanto mais tecnológico se torna o mundo hodierno, maiores são as demandas por valores humanos e afetivos.

Recente pesquisa patrocinada pela UNICEF mostra que, para 93% dos jovens brasileiros, a família e a escola são as instituições mais importantes da sociedade. As crianças e adolescentes que têm modelo, afeto e limites em casa e no colégio, mui raramente se envolvem com drogas, violência, pois nutrem-se de relacionamentos estáveis e sadios.

O dr. Dráuzio Varella cita os dois principais fatores que levam o indivíduo a se tornar violento: negligência afetiva e ausência de limites e de disciplina.

A nossa relação com o educando - seja filho ou aluno - não pode ser tíbia, leniente, permissiva, mas sim intensa e pró-ativa, mormente na imposição de disciplina, respeito às normas e à hierarquia. Até porque, quem bem ama impõe privações e limites. E sem disciplina não há aprendizagem nem na escola, nem para a vida. Nós, pais, vivemos hoje alguns dilemas angustiantes:

1) oferecemos ao nosso filho um caminho por demais florido, plano e pavimentado, mas temos certeza de que mais tarde ele terá que percorrer trilhas e escarpas pedregosas;

2) protegemos nossas crianças e adolescentes das pequenas frustrações, mas bem sabemos que a vida, mais tarde, fatalmente se encarregará das grandes;

3) tudo fazemos para não privar nosso filho de conforto, bens materiais, shoppings, lazer, etc., mas destarte não estamos criando uma geração por demais hedonista e alheia aos problemas sociais?

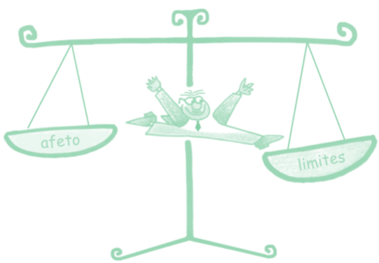
Para esses paradoxos, não há Manual de Instruções. Mas se houvesse, duas palavras comporiam o título deste manual: AFETO e LIMITES. São pratos distintos de uma balança e têm que prevalecer o equilíbrio, a medida e o bom senso.

Mais que no passado, ao percorrer o seu caminho, o jovem de hoje encontra muitas bifurcações, tendo amiúde, que decidir entre o bem e o mal, entre o certo e o errado.

Em cada etapa da vida, é bom que o nosso educando cometa pequenos erros e seja responsabilizado por eles. Mas também que tenha clareza das nefastas conseqüências dos grandes ou irreversíveis erros, para que possa evitá-los. Por exemplo: uma gravidez indesejada; exposição excessiva ao risco; envolvimento com drogas, álcool, tabaco, DST, brigas violentas, furtos, etc.

Num crescendo, a criança e o adolescente devem adquirir o direito de fazer escolhas, aprendendo a auto-administrar-se. "Sem liberdade, o ser humano não se educa. Sem autoridade, não se educa para a liberdade." – pondera o educador suíço Jean Piaget (1896-1980). Autoridade e liberdade, exercidas com equilíbrio, são manifestações de afeto, ensejam segurança e proteção para a vida adulta. "Autoridade é fundamental, a superproteção e a permissividade impedem que os jovens amadureçam" – completa a professora da UFRJ Tânia Zagury.

Aos filhos, devemos dar-lhes "raízes e asas" (valores e liberdade). E nós, pais, educamos pouco pelos cromossomos e muito *comosomos* (exemplos). Sai sempre ganhando quem sabe amar, dialogar, conviver com erros e também quem sabe ser firme e coerente emsuas atitudes.



Diante de tantas exigências, nós, pais, perguntamos em tom de blague: dá para tomar uma Kaiser antes? E vem o estraga-prazer e responde: Não, beber cerveja é um mau exemplo para os filhos!

Do autor

CAPÍTULO 2

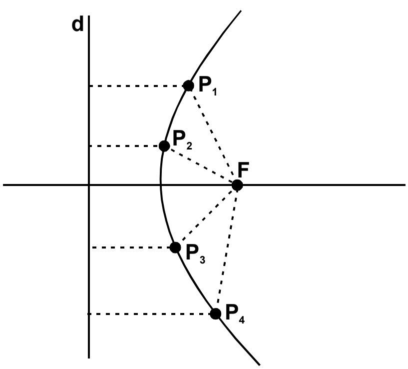
A Parábola

Pierre de Fermat (1601-1665), inspirado nos estudos de Apolônio (matemático grego do séc. II a.C.), estabeleceu o princípio fundamental da Geometria Analítica, segundo o qual uma equação do 1.º grau, no plano, representa uma reta e uma equação do 2.º grau, no plano, uma cônica.

Mostrou de uma forma bastante sistemática a equação geral de uma reta, de uma circunferência e as equações mais simples de uma parábola, elipse e hipérbole.

1. DEFINIÇÃO

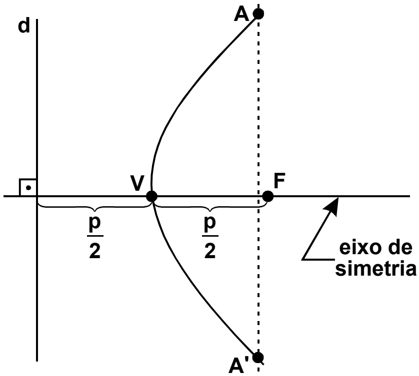
Considere-se, em um plano α, um ponto F e uma reta d que não contém F. Denominamos parábola de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano α que eqüidistam de d e F.



A figura ao lado mostra alguns pontos pertencentes à parábola (eqüidistantes do ponto F e da reta d).

OBSERVAÇÃO:
Na pág. 230 você encontra a etimologia da palavra **parábola**.

2. ELEMENTOS DA PARÁBOLA



Denominamos:

F: foco

d: diretriz

V: vértice

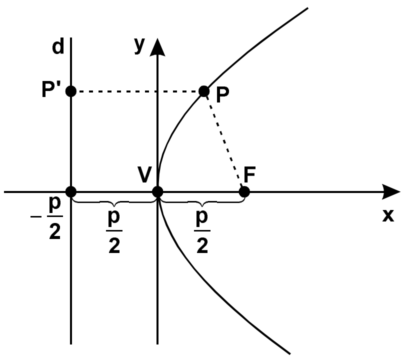
p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz ($p \neq 0$).

reta VF: eixo de simetria da parábola.

LATUS RECTUM: é a corda AA' que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria. Também chamada de corda focal mínima.

3. EQUAÇÕES CANÔNICAS DA PARÁBOLA ($V \equiv O$)

a) O eixo de simetria coincide com o eixo x.



Na figura ao lado tem-se uma parábola de concavidade voltada para a direita representada no sistema cartesiano xOy. A diretriz tem equação $x = -\frac{p}{2}$.

Ademais:

$P = (x, y)$ é um ponto genérico da parábola.

$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ é o foco.

$P' = \left(-\frac{p}{2}, y\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

Por definição:

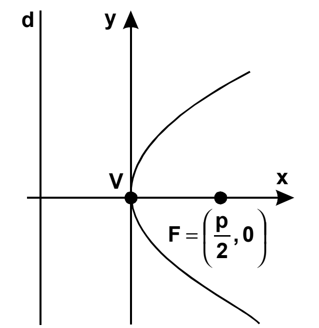
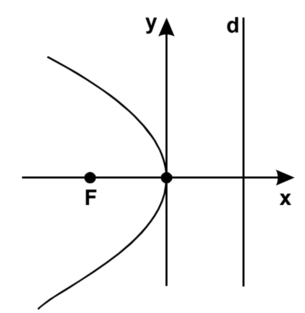
$d(P,\ F) = d(P,\ P')$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2}$$

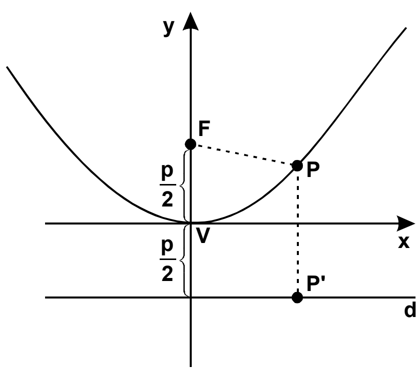
Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$\cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$ donde: $\boxed{y^2 = 2px}$ que representa a equação canônica (ou reduzida ou padrão) da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo x.

Na equação $y^2 = 2px$, observe que:

	
Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita (voltada para a parte positiva do eixo x).	Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

b) O eixo de simetria coincide com o eixo y.



A figura ao lado reproduz uma parábola de concavidade voltada para cima. A diretriz tem equação $y = -\frac{p}{2}$.

Ademais:

$P = (x, y)$

$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$

$P' = \left(x, -\frac{p}{2}\right)$

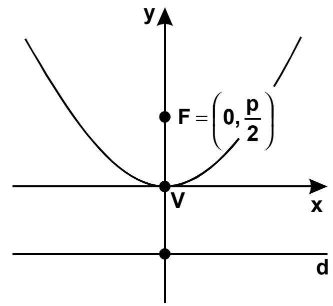
Por definição :

d(P, F) = d(P, P')

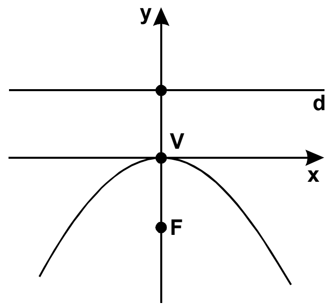
$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2}$$

Efetuando: $\boxed{x^2 = 2py}$ que representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y.

Na equação $x^2 = 2py$, observe que:



Se p > 0, o parábola tem concavidade voltada para cima (voltada para a parte positiva do eixo y).



Se p < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

4. IDENTIFICAÇÃO DA PARÁBOLA

a) Uma equação do tipo $Ax^2 + By = 0$ representa uma parábola de vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo y.

b) Similarmente uma equação sob a forma $Ay^2 + Bx = 0$ representa uma parábola de vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo x.

N.B.: O eixo de simetria da parábola é homônimo à variável do 1.º grau. Por exemplo:

1) A equação $y^2 = -5x$ (ou $y^2 + 5x = 0$) representa uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo x e concavidade voltada para a esquerda.

2) A equação $x^2 = \frac{3}{2}y$ (ou $2x^2 - 3y = 0$) denota uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo y e concavidade voltada para cima.

Exercício Resolvido

"Gasta-se menos tempo fazendo a coisa certa, do que explicando por que a fizemos errado."
Henry W. Longfellow (1807-1882), poeta americano.

Dada a parábola de equação $y^2 = -8x$, pedem-se:

a) as coordenadas do foco;

RESOLUÇÃO:

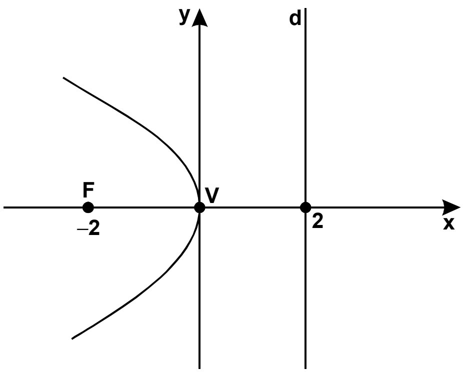
Sendo x o eixo de simetria, então $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$

A equação $y^2 = -8x$ é da forma $y^2 = 2px$.
Comparando os coeficientes do 2.º membro:

$$2p = -8 \Rightarrow p = -4 \Rightarrow \frac{p}{2} = -2$$

Resp.: $F = (-2, 0)$

b) o gráfico:



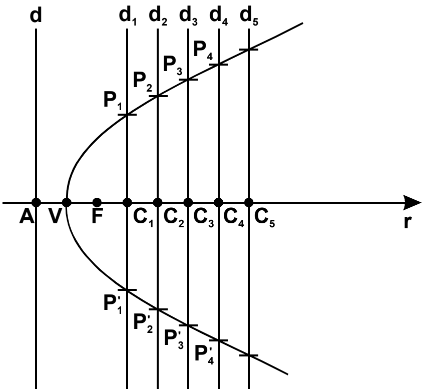
Equação da diretriz:
$d: x - 2 = 0$

5. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA PARÁBOLA

(Leitura Complementar)

Vamos traçar a parábola da qual são dados o foco F e a diretriz d. Representemos o eixo de simetria r, que intercepta d em A, e o vértice V, que é o ponto médio de AF. Sobre o eixo e à direita de V marquemos os pontos C_1, C_2, C_3, C_4 ... e por tais pontos tracemos as paralelas d_1, d_2, d_3, d_4 ... à diretriz.

Utilizemos um compasso de:



1) abertura igual a d(C_1, A) e centro em F determinemos sobre a paralela d_1 os pontos P_1 e P'_1.

2) abertura igual a d(C_2, A) e centro em F determinemos sobre a paralela d_2 os pontos P_2 e P'_2.

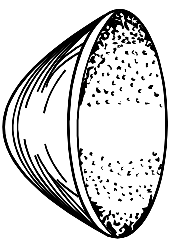
3) abertura igual a d(C_3, A) e centro em F determinemos sobre a paralela d_3 os pontos P_3 e P'_3.

Repete-se a operação para os pontos C_4, C_5 e obteremos tantos pontos da curva quanto quisermos.

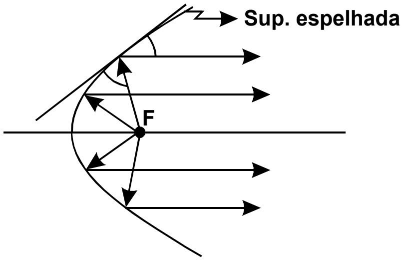
6. APLICAÇÕES PRÁTICAS DE PARÁBOLA

(Leitura Complementar)

a) A secção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.



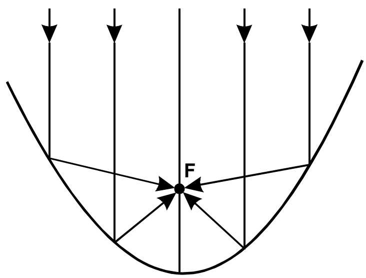
Farol de um automóvel



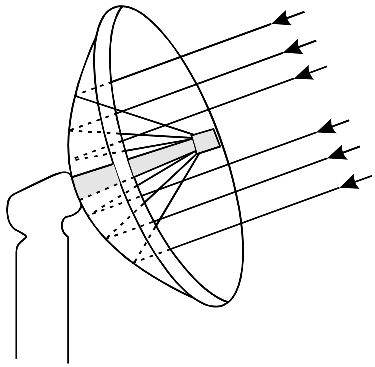
Secção de um farol

b) Se um espelho parabólico é apontado para o Sol, os raios de luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Pela grande quantidade de calor produzido nesta fonte, procede o nome foco (em latim *focus* significa **fogo**).

Aplica-se o mesmo princípio na construção de espelhos para telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas (as ondas paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor).



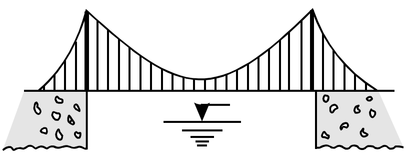
(espelho parabólico)



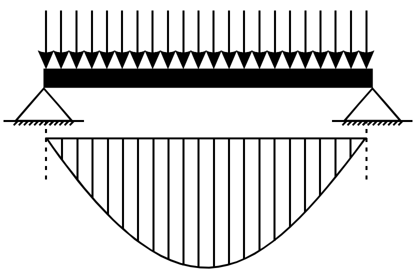
(antena parabólica)

c) o cabo principal de uma ponte pênsil assumiria a forma de uma parábola (desde que o cabo fosse perfeitamente flexível), se se negligenciasse a sua massa e se o peso da ponte estivesse uniformemente distribuídos ao longo de seu comprimento.

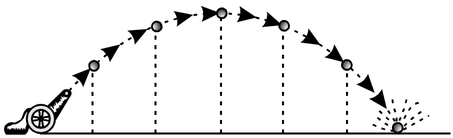
Na prática, sabemos que tais condições não se verificam. Na verdade os cabos assumem a forma de uma curva muito próxima de uma parábola. Tal curva quando sujeita apenas ao próprio peso se chama CATENÁRIA.



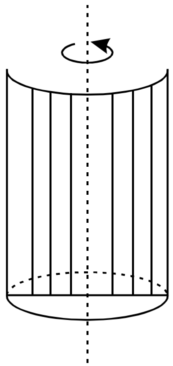
d) Em Resistência dos Materiais, o diagrama do Momento Fletor de uma viga submetida a uma carga uniforme é uma parábola.



e) Em balística, quando se lança um projétil sobre o qual atua somente a força da gravidade, a trajetória é uma parábola.



f)



Seja um recipiente cilíndrico parcialmente cheio de um certo líquido. Aplicando-se o movimento de rotação no eixo do cilindro, a secção (ou seção) da superfície livre é uma parábola.

Exercícios

É um grande erro não fazer nada, quando se pode fazer pouco.

01. Equação da parábola com foco em F = (–2, 0) e com diretriz em x = 2.

Resp.: $y^2 = -8x$

02. Determinar a equação da parábola de concavidade voltada para cima, que passa pelo ponto A = (1, 2) e cujo vértice é V = (0, 0).

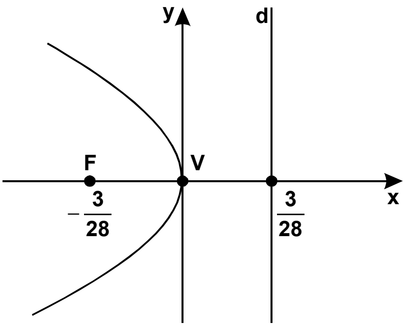
Resp.: $2x^2 - y = 0$

SUGESTÃO:

$A = (1, 2) \in x^2 = 2py \Rightarrow (1)^2 = 2p(2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

Então $x^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)y$

03. Obter as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $7y^2 + 3x = 0$. Fazer o gráfico.



Resp.: $F = \left(-\frac{3}{28}, 0\right)$

$d: 28x - 3 = 0$

04. Calcular o valor de k para que a parábola $x = ky^2$ tenha foco no ponto (3, 0).

Resp.: $k = \frac{1}{12}$

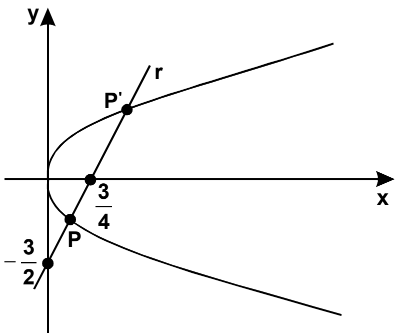
05. Achar a equação de uma parábola de vértice na origem, que passa pelo ponto (–3, 2) e cujo eixo de simetria é o eixo x.

Resp.: $3y^2 + 4x = 0$

06. Calcular os pontos de intersecção (ou interseção) da parábola $y^2 = 4x$ com a reta r: $4x - 2y - 3 = 0$.

Resp.: $P = \left(\frac{1}{4}, -1\right)$ e $P' = \left(\frac{9}{4}, 3\right)$

SUGESTÃO:



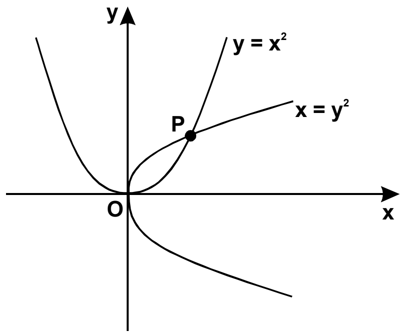
a) de r:

$$y = \frac{4x - 3}{2}$$

b) resolva o sistema:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \dfrac{4x - 3}{2} \end{cases}$$

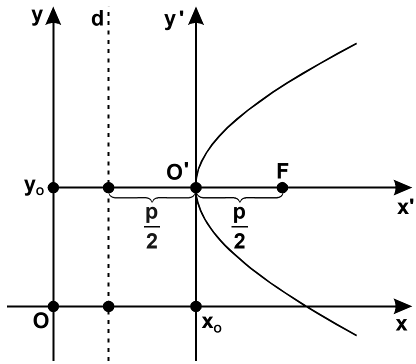
07. Obter os pontos de intersecção das parábolas abaixo representadas.



Resp.: $O = (0, 0)$
$P = (1, 1)$

7. EQUAÇÕES DA PARÁBOLA DE $V \equiv O' = (x_o, y_o)$

a) O eixo de simetria é paralelo ao eixo x.



Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema x'O'y', cuja origem O' coincide com o vértice $V = (x_o, y_o)$.

Face o exposto, a equação da parábola referida ao novo sistema x'O'y' é:

$y'^2 = 2px'$ (1)

Contudo, pelas fórmulas de translação:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_o \\ y' &= y - y_o \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) :

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o) \qquad (\mathrm{I})$$

que representa a equação de uma parábola de $V = (x_o, y_o)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo x. O parâmetro p será positivo ou negativo se, respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para a direita ou para a esquerda.

Ainda, desenvolvendo (I) e isolando a variável x:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2p}}_{a} y^2 - \underbrace{\frac{y_o}{p}}_{b} y + \underbrace{\frac{y_0^2 + 2px_o}{2p}}_{c} \qquad (\text{I}')$$

ou $\boxed{x = ay^2 + by + c}$ $\qquad (\text{I}'')$

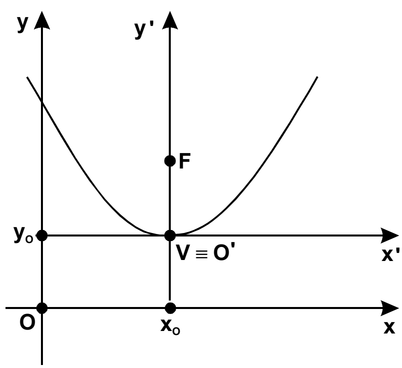
Comparando os coeficientes de (I') e (I''), observe:

$$a = \frac{1}{2p} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2a}}$$

$$b = -\frac{y_o}{p} \Rightarrow y_o = -bp \Rightarrow \boxed{y_o = \frac{-b}{2a}}$$

Esta última fórmula em destaque permite calcular a ordenada do vértice da parábola (y_O).

b) O eixo de simetria é paralelo ao eixo y.



Analogamente, mutatis mutandis, a parábola de concavidade voltada para cima (quando $p > 0$) ou concavidade voltada para baixo (quando $p < O$) tem a forma:

$\boxed{(x - x_O)^2 = 2p(y - y_O)}$ $\quad$ (II)

Outrossim, desenvolvendo (II) e isolando a variável y, temos:

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ $\qquad$ (II')

Similarmente ao caso anterior, a comparação dos coeficientes de (II) e (II') permite concluir que:

$$\boxed{p = \frac{1}{2a}} \quad \text{e} \quad \boxed{x_o = \frac{-b}{2a}}$$

N.B.: Fulcrados na comparação das equações, enfatize-se que o sinal do coeficiente **a** é o mesmo de **p**. Isto posto, a concavidade da parábola fica explicitada.

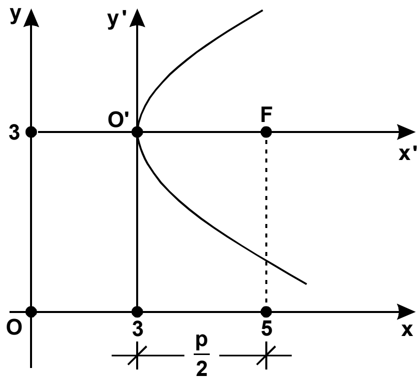
Por exemplo:

A parábola $x = -4y^2 + 3y + 1$ tem concavidade voltada para a esquerda pois o sinal de **a** é negativo.

Exercícios Resolvidos

"Quando um dedo aponta, três (dedos) contra."
Axioma Popular.

01. Obter a equação da parábola abaixo configurada.



RESOLUÇÃO:

A equação da parábola tem a forma: $(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)$

Na figura obtemos: $V = (3, 3)$ e $\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4$

Resp.: $(y - 3)^2 = 8(x - 3)$ ou $y^2 - 6y - 8x + 33 = 0$

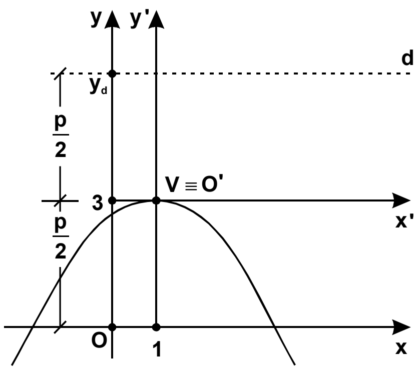
OBSERVAÇÃO:
Equação da diretriz: $d: x - 1 = 0$

02. Esboçar o gráfico da parábola de equação $(x-1)^2 = -12(y-3)$.

RESOLUÇÃO:

A equação é da forma $(x-x_O)^2 = 2p(y-y_O)$.
Sabemos à priori que a parábola tem:
- eixo de simetria paralelo ao eixo y (variável do 1.º grau);
- concavidade voltada para baixo (pois o 2.º membro da equação dada é negativo);
- vértice do ponto $V = (x_O, y_O) = (1, 3)$.

Assim sendo, podemos representar a parábola a menos de seu foco e de sua diretriz.



a) Coordenadas do foco:

Comparando os coeficientes das duas equações:

$$|2p| = 12 \Rightarrow |p| = 6 \Rightarrow \left|\frac{p}{2}\right| = 3$$

$$x_F = x_o = 1$$

$$y_F = y_o - \left|\frac{p}{2}\right| = 3 - |3| = 0$$

$$F = (1, 0)$$

b) Equação da diretriz:

$$y_d = y_o + \left|\frac{p}{2}\right| = 3 + |3| = 6$$

$$d: y - 6 = 0$$

03. Obter as coordenadas do vértice e do foco da parábola
$y = -2x^2 + 8x - 8$.

RESOLUÇÃO:

a) Vértice:

$$x_v = x_o = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = 2$$

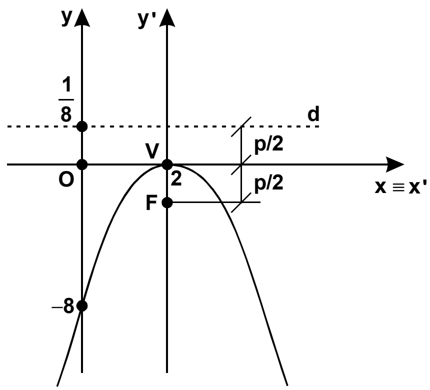
Substituindo a variável x por 2 na equação dada obtém-se y_V:

$y_V = y_O = -2(2)^2 + 8(2) - 8 = 0$

Resp.: V = (2, 0)

b) Foco:

$$p = \left|\frac{1}{2a}\right| = \left|\frac{1}{2(-2)}\right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{8}$$



Coordenadas do foco :

$$y_F = y_v - \left|\frac{p}{2}\right| = -\frac{1}{8}$$

$$x_F = x_v = 2$$

$$F = \left(2, -\frac{1}{8}\right)$$

Equação da diretriz $\Rightarrow d : y = \frac{1}{8}$ ou $8y - 1 = 0$

A função $y = -2x^2 + 8x - 8$ tem $a = -2 < 0$, o que indica uma parábola de concavidade voltada para baixo e cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo y. Ademais, a parábola intercepta o eixo y no ponto de ordenada –8 (termo independente da parábola) e corta o eixo x no ponto de abscissa 2 (raízes $x_1 = x_2$ da eq. $-2x^2 + 8x - 8 = 0$).

OBSERVAÇÃO:

Há outros processos para a resolução do exercício em pauta. Um desses processos utiliza a teoria da translação de eixos. Vejamos:

A equação dada pode ser escrita:

$$2x^2 - 8x + y + 8 = 0 \qquad ①$$

a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases} \qquad ②$$

b) Substituindo ② em ①:

$$2(x_o + x')^2 - 8(x_o + x') + (y_o + y') + 8 = 0 \qquad ③$$

$\star$ fazendo a soma dos coeficientes de $x' = 0$

$4x_o - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 2$

$\star$ fazendo o termo independente $= 0$

$2x_o^2 - 8x_o + y_o + 8 = 0$

para $x_o = 2$ obtém-se $y_o = 0$.

Então $V = (2, 0)$

c) Levando o $V = (2, 0)$ em ③ obtemos:

$$x'^2 = -\frac{1}{2}y'$$

que representa a equação canônica de uma parábola em que

$$2p = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{8}.$$

Verifique ainda que o gráfico da parábola coincide com o da última figura.

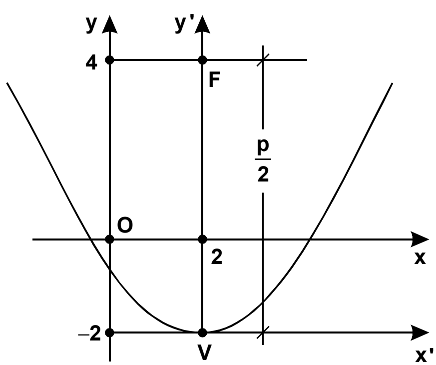
Exercícios

"Se há um agravo pungente a perdoar, é tempo, é hora.
O mais profundo rancor não resiste a um apelo de braços abertos."
Helena Kolody, poeta e escritora paranaense.

01. Uma parábola tem foco em F = (2, 4) e vértice em V = (2, –2). Determinar a sua equação.

Resp.: $(x-2)^2 = 24(y+2)$

SUGESTÃO:



a) a equação é da forma :
$(x-2)^2 = 2p(y+2)$

b) mas $\left|\dfrac{p}{2}\right| = 6 \Rightarrow |p| = 12$

02. Equação da parábola com vértice em (1, 3) e foco em (1, 2).

Resp.: $(x-1)^2 = -4(y-3)$

03. Equação da parábola com foco em F = (1, 3) e diretriz de equação $y = -1$.

Resp.: $(x-1)^2 = 8(y-1)$

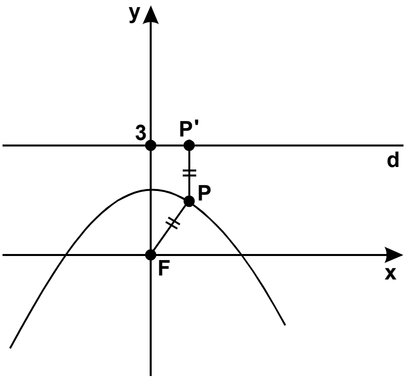
04. Calcular o vértice, o foco e a diretriz da parábola
$(x-2)^2 - 4(y-8)$.

Resp.: $V = (2, 8); F = (2, 7);$
$d: y - 9 = 0$

05. Qual a equação do conjunto de pontos P = (x, y) que são eqüidistantes da reta y = 3 e do ponto F = (0, 0)?

Resp.: $x^2 + 6y - 9 = 0$

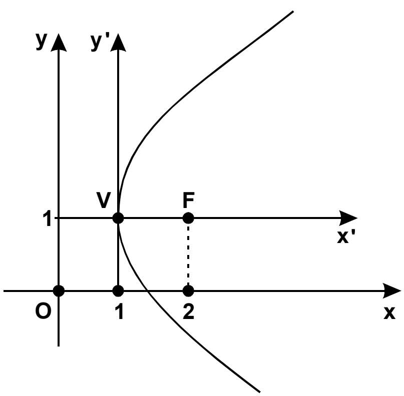
SUGESTÃO:



$P = (x, y)$
$P' = (x, 3)$
$F = (0, 0)$

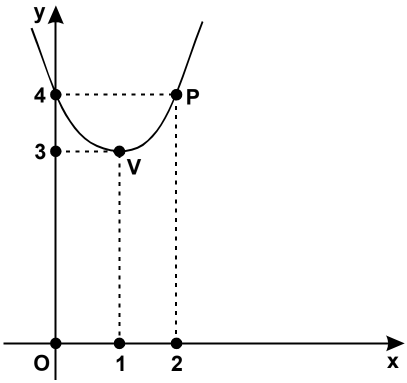
Pelo enunciado:
$d(P, P') = d(P, F)$

06. Determinar a equação da parábola abaixo representada e a equação de sua diretriz.



Resp.: $(y - 1)^2 = 4(x - 1)$
$d: x = 0$

07. Obter a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y, vértice em (1, 3) e que passa pelo ponto (2, 4).



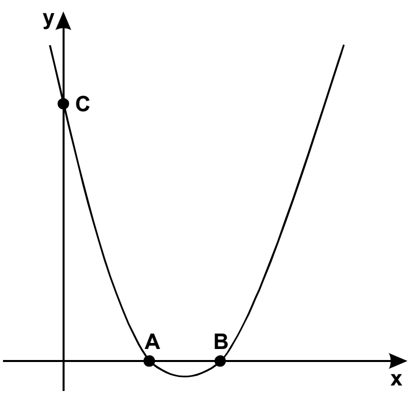
Resp.: $x^2 - 2x - y + 4 = 0$

SUGESTÃO:

a) Equação da parábola: $(x - 1)^2 = 2p(y - 3)$

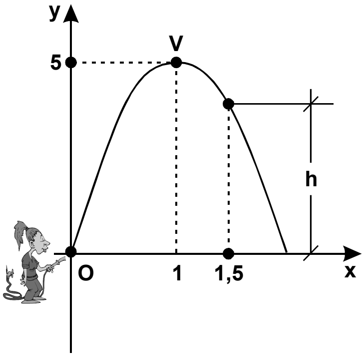
b) $P = (2, 4) \in$ à parábola: $(2 - 1)^2 = 2p(4 - 3) \Rightarrow |p| = \dfrac{1}{2}$

08. A parábola abaixo configurada tem equação $x^2 - 5x - y + 6 = 0$. Achar as coordenadas dos pontos A, B e C.



Resp.: $A = (2, 0)$
$B = (3, 0)$
$C = (0, 6)$

09. Um esguicho (posicionado na origem) lança água e esta descreve uma parábola de V = (1, 5). Calcular a altura (h) do filete de água, a uma distância 1,5 m da origem, sobre uma horizontal Ox.



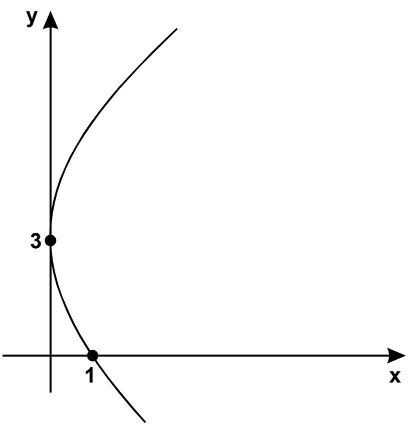
Resp.: 3,75 m

Série B

Deus nunca nos dá tudo. Mas também não nos priva de tudo.

10. Determinar a equação da parábola que se vê na figura abaixo.

Resp.: $x = \frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{3}y + 1$



SUGESTÃO:

a) Equação da parábola:

$x = ay^2 + by + c$

b) $c = 1$

c) $(0, 3) \in$ à parábola:

$0 = 9a + 3b + 1$ ①

d) $V = (0, 3)$

$y_V = \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = -6a$ ②

e) Resolvendo ① e ②:

$a = \frac{1}{9}$ e $b = -\frac{2}{3}$

11. A parábola $y = x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $P = (1, 3)$ e a abscissa do foco é igual a 2. Calcular c.

Resp.: $c = 6$

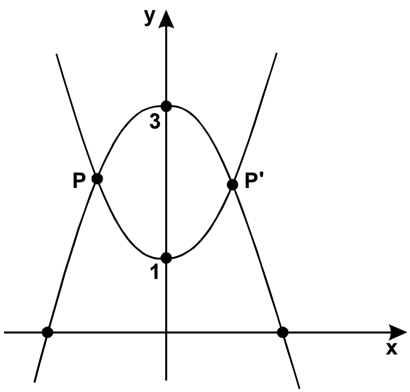
12. Equação da parábola com eixo de simetria vertical, cujo vértice é $V = (3, 1)$ e que intercepta o eixo das abscissas nos pontos (2, 0) e (4, 0).

Resp.: $x^2 - 6x + y + 8 = 0$

13. A parábola representada pela função $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (0, –3); (–3, 0) e (2, 5). Obter a equação da parábola.

Resp.: $y = x^2 + 2x - 3$

14. Obtenha os pontos de intersecção das parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 3$. Ademais, calcule os vértices e as intersecções de cada parábola com os eixos cartesianos.



Resp.: $P = (-1, 2)$ e $P' = (1, 2)$

1.ª parábola:

$V = (0, 1)$; intercepta o eixo y no ponto (0, 1) e não intercepta o eixo x.

2.ª parábola:

$V = (0, 3)$; intercepta o eixo y em (0, 3); intercepta o eixo x nos pontos $(\sqrt{3}, 0)$ e $(-\sqrt{3}, 0)$.

15. Obter o vértice e o foco da parábola $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

Resp.: $V = (-2, 3)$ e $F = (1, 3)$

SUGESTÃO:

a) Inicialmente isole a variável x:

$$x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{15}{12}$$

b) Calcule a ordenada do vértice:

$$y_V = \frac{-b}{2a}$$

16. Idem para: a) $y = 9x - \frac{3}{4}x^2$ e b) $x^2 - 8x - 6y + 14 = 0$

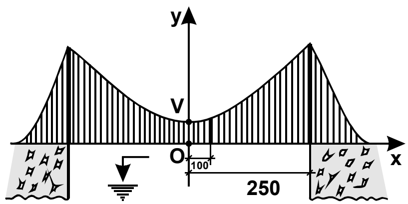
Resp.: a) $V = (6, 27)$ e $F = \left(6, \frac{80}{3}\right)$

b) $V = \left(4, -\frac{1}{3}\right)$ e $F = \left(4, \frac{7}{6}\right)$

17. Encontrar as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$.

Resp.: $F = (-3, 7)$ e $d: y - 1 = 0$

18. Os cabos de um lado de uma ponte pênsil com carga uniformemente distribuídas tomam a forma aproximada de um arco de parábola. As torres de suporte dos cabos tem 65 m de altura e o intervalo entre as torres é de 500 m. O ponto mais baixo fica a 15 m do nível da estrada.



Achar a equação da parábola considerando o sistema cartesiano sito conforme a figura. Calcular o comprimento (ℓ) de um fio de sustentação situado a 100 m do centro da ponte.

Resp.: $x^2 - 1250y + 18750 = 0$ e

$\ell = 23$ m

SUGESTÃO:

a) $V = (0, 15)$

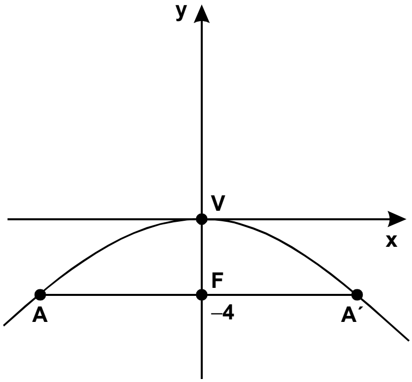
b) Equação da parábola: $(x - 0)^2 = 2p(y - 15)$

c) $P = (250, 65) \in$ parábola $\Rightarrow$ $|p| = 625$.

19. Determinar o comprimento de latus rectum da parábola $x^2 = -16y$.

Resp.: 16

SUGESTÃO:



a) A parábola tem foco em $F = (0, -4)$ e a latus rectum tem equação $y = -4$.

b) Levando $y = -4$ na equação da parábola $x^2 = -16(-4) \Rightarrow x = \pm 8$.
$A = (-8, -4)$ e
$A' = (8, -4)$.

c) Comprimento da latus rectum:
$d(A, A') = 16$

OBSERVAÇÃO:
Demonstra-se que o comprimento da latus rectum de $y^2 = 2px$ ou $x^2 = 2py$ é $2p$.

20. Determinar as coordenadas das extremidades da latus rectum da parábola cuja diretriz é a reta $y - 3 = 0$ e cujo foco é o ponto $F = (1, 1)$.

Resp.: $P = (3, 1)$ e $P' = (-1, 1)$

21. O diâmetro de uma circunferência tem extremidades nas extremidades da latus rectum da parábola $y^2 - 8y - 8x + 32 = 0$. Pede-se a equação da circunferência.

Resp.: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

22. (ZÓZIMO GONÇALVES) Deduzir a equação da parábola de eixo vertical cujo foco é o ponto $F = (-1, 3)$ e que passa pelo ponto $P = (3, 6)$.

Resp.: $(x + 1)^2 = 4(y - 2)$ e
$(x + 1)^2 = -16(y - 7)$

8. EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE $V \equiv O' = (x_o, y_o)$ E CUJO EIXO DE SIMETRIA NÃO É PARALELO A UM DOS EIXOS COORDENADOS

A existência do termo em xy numa equação do 2.º grau indica que o eixo de simetria (se for parábola) é oblíquo aos eixos coordenados. Rememoremos o primeiro capítulo: quando se pretende eliminar termos do 2.º grau, utiliza-se a rotação; do primeiro grau, a translação.

O exercício abaixo ilustra.

Exercício:

Obter a equação canônica e traçar o gráfico da parábola $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 34x - 38y + 51 = 0$

RESOLUÇÃO:

a) Ordem das transformações:

$$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(9)(16) = 0 \quad \begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$$

b) Rotação:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-24}{9 - 16} = \frac{24}{7}$$

$$\frac{2 \text{ tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta} = \frac{24}{7} \Rightarrow 12 \text{ tg}^2 \theta + 7 \text{tg } \theta - 12 = 0$$

$$\text{Raízes: tg } \theta_1 = \frac{3}{4} \text{ e } \text{tg } \theta_2 = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Para tg } \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5} \text{ e } \text{sen } \theta = \frac{3}{5}$$

$(\theta \cong 36^o)$

Fórmulas de rotação:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \text{ sen } \theta = \frac{4x' - 3y'}{5} \\ y &= x' \text{ sen } \theta + y' \cos \theta = \frac{3x' + 4y'}{5} \end{aligned}\right\} \quad ①$$

Substituindo ① na equação dada e efetuando-se pacientemente os cálculos decorrentes, obtém-se:

$$25y'^2 - 50x' - 10y' + 51 = 0 \qquad ②$$

c) Translação: como se busca a equação canônica de uma parábola, na equação acima deve-se eliminar o termo em y' e o termo independente.

Fórmulas de translação : $\left.\begin{matrix} x' = x_o + x'' \\ y' = y_o + y'' \end{matrix}\right\}$ ③

Levando ③ em ② vem:

$25(y_o + y'')^2 - 50(x_o + x'') - 10(y_o + y'') + 51 = 0$ ou

$25y''^2 - 50x'' + (50y_o - 10)y'' + 25y_o^2 - 50x_o - 10y_o + 51 = 0$ ④

$\star$ fazendo o coeficiente de $y'' = 0$

$50y_o - 10 = 0 \Rightarrow y_o = \dfrac{1}{5}$ (sobre o eixo y')

$\star$ fazendo o termo independente = 0

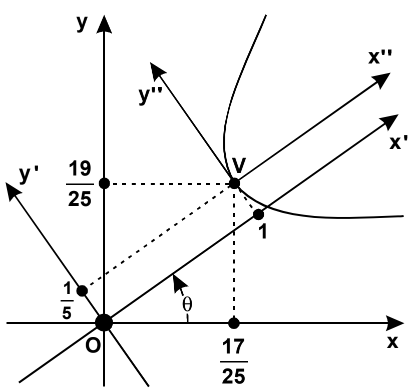
$25y_o^2 - 50x_o - 10y_o + 51 = 0$

Para $y_o = \dfrac{1}{5} \Rightarrow x_o = 1$ (sobre o eixo x')

Então $V = \left(1, \dfrac{1}{5}\right)$ (no sistema x'Oy')

d) Levando $V = \left(1, \dfrac{1}{5}\right)$ em ④ obtém-se a equação canônica da parábola: $y''^2 = 2x''$

e) Gráfico:



Registre-se que a parábola não corta os eixos x e y: fazendo x = 0 na equação dada obtém-se $9x^2 - 34x + 51 = 0$. Esta equação possui discriminante negativo, e ipso facto é desprovida de raízes.

Analogamente, se se fizer y = 0 na equação dada, a equação $16y^2 - 38y + 51 = 0$ não possui raízes.

OBSERVAÇÃO:

Cálculo das coordenadas do vértice V emrelação ao sistema xOy:

Fórmulas de rotação:

$$x = \frac{4x' - 3y'}{5} = \frac{4(1) - 3\left(\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{17}{25}$$

$$y = \frac{3x' + 4y'}{5} = \frac{3(1) + 4\left(\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{19}{25}$$

$$\text{Então: } V = \left(\frac{17}{25}, \frac{19}{25}\right)$$

Exercícios

"Brincar com a criança não é perder tempo, é ganhá-lo; se é triste ver meninos sem escola, mais triste ainda é vê-los sentados enfileirados, com exercícios estéreis, sem valor para a formação do homem."

Carlos Drummond de Andrade (1902-1987), poeta brasileiro.

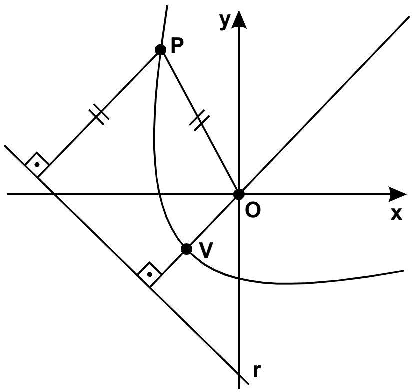
01. Obter a equação canônica da parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 16 = 0$

Resp.: $y''^2 - 2\sqrt{2}x'' = 0$

02. Uma parábola tem o foco na origem e diretriz a reta $r: 2x + 3y + 5 = 0$. Ache a sua equação.

Resp.: $9x^2 + 4y^2 - 12xy - 20x - 30y - 25 = 0$

SUGESTÃO:



Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola.

$d(P, 0) = d(P, r)$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x + 3y + 5}{\sqrt{13}}$$

03. Equação da parábola cujo foco é $F = (0, 1)$ e cuja diretriz é a reta $2x - y = 0$.

Resp.: $x^2 + 4y^2 + 4xy - 10y + 5 = 0$

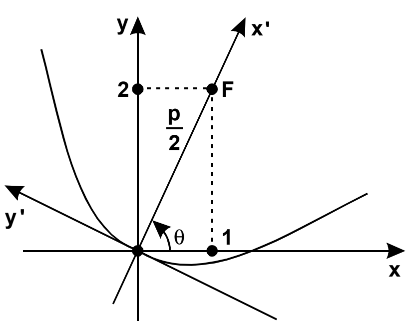
04. Numa parábola tem-se o $V = (6, -3)$ e a diretriz $3x - 5y + 1 = 0$. Pede-se a sua equação.

Resp.: $25x^2 + 9y^2 - 30xy - 414x + 214y + 1529 = 0$

05. Obter a equação da parábola sabendo-se que o foco é $F = (1, 2)$ e o vértice coincide com a origem.

Resp.: $4x^2 + 4xy + y^2 - 20x + 40y = 0$

SUGESTÃO:



a) Da figura:

$$\frac{p}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow p = 2\sqrt{5}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{e}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) A equação da parábola em relação ao sistema x'Oy' é: $y'^2 = 2px'$ ①

c) Fórmulas de rotação :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x-2y}{\sqrt{5}} \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta = \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} ②$$

d) Substituindo ② em ① tem-se a resposta.

06. Calcular a equação da parábola de vértice no ponto (2, 2), que passa pelo ponto P = (4, 1) e cujo eixo focal está sobre a reta $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x$.

Resp: $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 68x - 76y + 284 = 0$

SUGESTÃO:
Vide exercício precedente.

AOS MESTRES

Mais do que o conhecimento, o que faz o verdadeiromestre é a dedicação.

Aos que, possuindo sabedoria, transmitiram-na com amor, o nosso preito de imorredoura gratidão.

Aos que souberam suprir as limitações, doando-se por inteiro, nosso perene reconhecimento.

Aos que simplesmente nos passaram conhecimento:muito obrigado.

E aos que, carecendo de luzes, foram incapazes de se doar, que não sejam julgados, mas compreendidos.

Johann W. Goethe (1749-1832), o maior poeta alemão.

UMA LIÇÃO DE VIDA

Eis a história verdadeira de um homem, cujo nome todos conhecem e que sugere grande lição:

– aos sete anos, perde a mãe;

– até os 23 anos, tem uma infância e uma adolescência pobre, trabalhando na lavoura para se manter nos estudos;

– aos 26 anos, endivida-se por conta da morte de seu sócio;

– aos 27 anos, recebe um "não" ao propor casamento a sua primeira namorada;

– aos 32 anos, o rompimento com a segunda namorada lhe provoca profunda depressão;

– aos 33 anos, perde a eleição para deputado estadual;

– aos 34 anos, não consegue eleger-se deputado federal;

– aos 41 anos, chora a morte do filho de quatro anos;

– aos 42 anos, falece seu pai;

– aos 45 anos, perde a eleição para o Senado.

– aos 50 anos, não consegue a indicação do partido para o Senado;

– aos 51 anos, porém, é eleito e, aos 55, reeleito presidente dos Estados Unidos.

Este homem se chamava Abraham Lincoln.

Em meio a tantos infortúnios, a bem da verdade, Lincoln entremeou sucessos significativos no campo pessoal, político e profissional.

Todos sabemos que a biografia dos grandes homens não é pautada somente por vitórias mas, antes de tudo, pela determinação em vencer obstáculos, sejam grandes ou pequenos. A vida deve ser vivida intensamente, na busca constante da experiência e do aprimoramento físico, moral e intelectual.

Igualmente, é importante o desenvolvimento de valores interpessoais, como os relativos à ética, à cidadania, à auto-estima, às relações humanas e de respeito ao meio ambiente, ensejando pessoas flexíveis, abertas ao diálogo, a mudanças e a novas tecnologias.

Pelo seu esforço e dedicação permanente aos estudos, você será um vitorioso num mercado de trabalho extremamente competitivo, mas carente de bons profissionais. É tão competitivo que apenas 12% – dados da ONU – da população brasileira está preparada para trabalhar em uma economia tecnologicamente avançada.

Do autor.

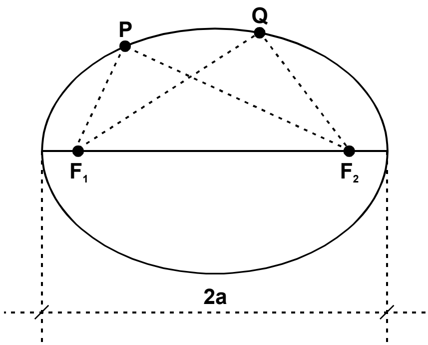
CAPÍTULO 3

A Elipse

1. DEFINIÇÃO

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) do mesmo plano, é uma constante (2a), onde $2a > d(F_1, F_2)$

Assim:



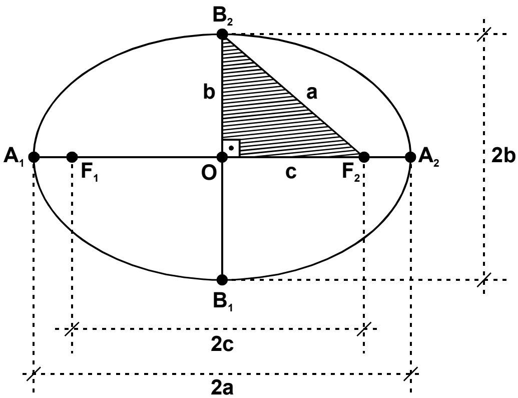
$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

e

$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$

OBSERVAÇÃO:
Na pág. 230 você tem a etimologia da palavra **elipse**.

2. ELEMENTOS DA ELIPSE



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

O: centro da elipse; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2, B_1, B_2: vértices da elipse.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo menor: é segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

Do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado na figura, obtemos a **relação notável**:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

N.B.: A rigor há um abuso de linguagem ao denominar-se de "eixo maior" o segmento A_1A_2, e de "eixomenor" o segmento B_1B_2.

3. EXCENTRICIDADE

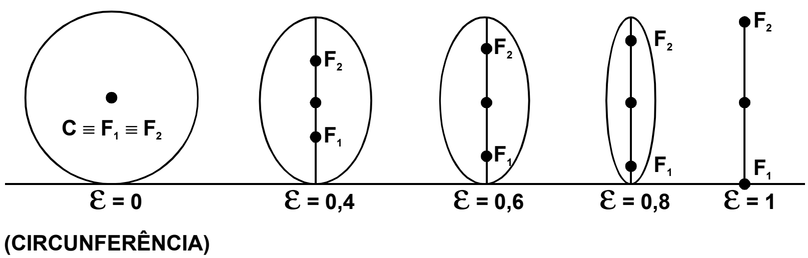
Uma importante característica da elipse é a sua excentricidade, que é definida pela relação:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (0 < \varepsilon < 1, \text{ sendo } \varepsilon \text{ a letra grega épsilon})$$

Como **a** e **c** são positivos e $c < a$, depreende-se que $0 < \varepsilon < 1$.

Quanto mais próximo de zero for o valor de ε, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o valor de ε se aproxima de **1**.

Uma vez fixo o valor de a, há uma correspondência entre o valor de ε e a distância focal: quanto mais a elipse se aproxima de uma circunferência, menor a distância entre os focos; e quanto mais achatada for a elipse, maior a distância entre os focos.



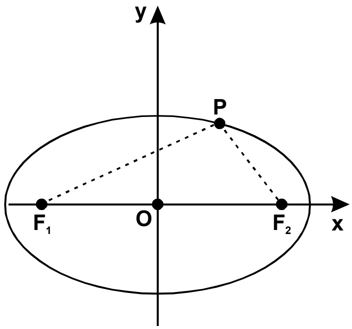
É fácil concluir quanto aos valores extremos do domínio de ε:

Se $\varepsilon = 0$ tem-se uma circunferência de diâmetro 2a e os focos F_1 e F_2 coincidem com o centro da circunferência.

Se $\varepsilon = 1$ tem-se segmento retilíneo F_1F_2.

4. EQUAÇÃO CANÔNICA DA ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM

a) O eixo maior coincide com o eixo x.



Sejam:

P = (x, y) um ponto genérico da elipse.

$F_1 = (-c, 0)$

$F_2 = (c, 0)$

Por definição:

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Transpondo o 2.º radical ao 2.º membro :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Isolando o radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

Dividindo por 4 e tornando a quadrar:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\text{ou}\ \ (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Mas pela relação notável $a^2-c^2=b^2$:

$$b^2x^2+c^2y^2=a^2b^2$$

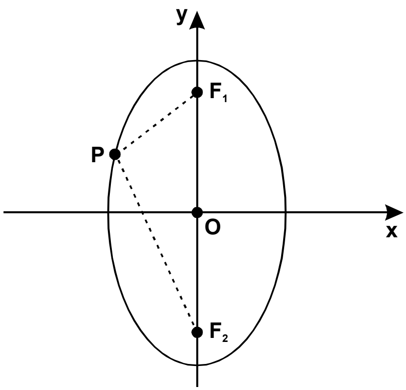
Dividindo ambos os membros por a^2b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \text{(eixo maior} \equiv \text{eixo x)}$$

que é chamada equação **canônica** ou **reduzida** da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo x.

OBSERVAÇÃO:
Está consagrado o uso da expressão: "o eixo maior coincide com o eixo x", mas, que numa linguagem mais precisa usar-se-ia: "o eixo maior pertence ao eixo x".

b) O eixo maior coincide com o eixo y.



Na figura tem-se:
$F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$

De forma análoga demonstra-se que para um ponto P = (x, y) pertencente à elipse tem-se a equação canônica:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

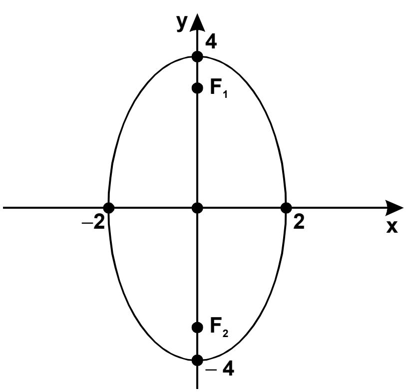
(eixo maior ≡ eixo y)

Aqui cabe um destaque: na equação canônica **a** é a medida do semi-eixo maior e $\mathbf{a}^2$ representa o maior dos denominadores. Se o número a^2 é denominador de:

x^2 então os focos estão sobre o eixo x;

y^2 então os focos estão sobre o eixo y.

Exemplifiquemos: A equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ representa uma elipse na qual $a^2 = 16$; portanto a medida do seu eixo maior é $2a = 2\sqrt{16} = 8$ e o eixo maior coincide com o eixo y.



Depreende-se ainda, da equação, que $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

Coordenadas dos focos:

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$

Então:

$F_1 = (0, 2\sqrt{3})$ e $F_2 = (0, -2\sqrt{3})$

5. IDENTIFICAÇÃO DA ELIPSE

Uma equação do tipo $Ax^2 + By^2 = F$ representa uma elipse com centro na origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos se:

- A e B concordam emsinal;
- $A \neq B$.

Ademais, a elipse pode ser:

a) **real:** se A, B e F concordam em sinal.
Ex.: $2x^2 + 3y^2 = 1$

b) **imaginária** (não há lugar geométrico ou é um conjunto vazio): se F tem sinal contrário ao de A e B.
Ex.: $2x^2 + 3y^2 = -1$

c) **puntiforme** (a elipse se reduz a umponto emO): se F=0.
Ex.: $2x^2 + 3y^2 = 0$

Exemplos Resolvidos

"Os anos deixam rugas na pele, mas a falta de entusiasmo deixa rugas na alma."
Michael Lynberg

01. Dada a equação da elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, pede-se:
1. a) a equação canônica;
Dividindo cada termo da equação dada por 144:

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ (eq. canônica)}$$

1. b) a excentricidade (ε);
Da equação canônica:

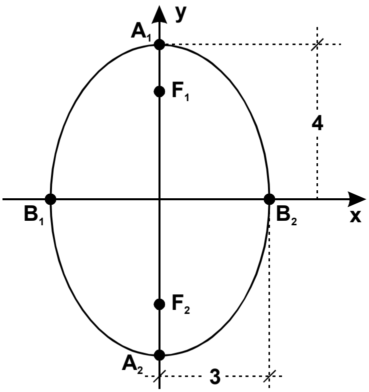
$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \qquad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

Ademais $c^2 = a^2 - b^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

Resp.: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

1. c) o gráfico, as coordenadas dos focos e dos vértices.
Como $a^2 = 16$ é o denominador de y, isto indica que o

eixo maior está sobre o eixo das ordenadas. Para construir o gráfico temos:



$a = 4; b = 3; c = \sqrt{7}.$

Coordenadas dos focos:

$F_1 = (0, \sqrt{7})$ e $F_2 = (0, -\sqrt{7})$

Coordenadas dos vértices:
$A_1 = (0, 4)$ e $A_2 = (0, -4)$
$B_1 = (-3, 0)$ e $B_2 = (3, 0)$

02. Obter a equação da elipse com centro na origem do sistema cartesiano, eixo focal coincidente com o eixo x, que passa pelo ponto $P = (1, 1)$ e cuja excentricidade é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

RESOLUÇÃO:

2.a) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{c = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}}$

2.b) Mas $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{a^2 = 2b^2}$

2.c) Equação canônica : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ①

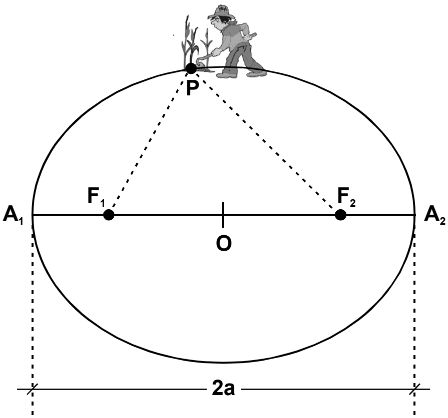
2.d) Como $a^2 = 2b^2$ e $P = (1, 1) \in$ ①:

$$\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 = 3$$

Resp.: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$ ou $x^2 + 2y^2 = 3$

6. CONSTRUÇÃO DE UMA ELIPSE
(Leitura Complementar)

Discorramos sobre o chamado método do "carpinteiro" ou método do "jardineiro" (para dar forma aos canteiros).



Sobre uma tábua crava-se dois pregos e fixa-se os extremos de um barbante, de comprimento 2a, nos dois pregos (focos). Estira-se o barbante com um lápis e se move este último até uma volta completa, sempre com o barbante tenso. A figura ajuda o entendimento e observe que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

7. APLICAÇÕES PRÁTICAS DA ELIPSE
(Leitura Complementar)

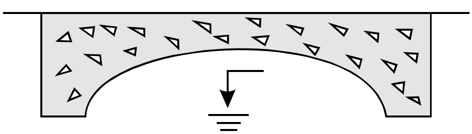
a) A trajetória dos planetas ao redor do Sol não é circular e sim elíptica (não considerando o deslocamento do sistema solar). Foi Kepler (1571-1630) quem desenvolveu esta teoria. No caso da Terra os semi-eixos são a = 153.493.000 km e b = 153.454.000 km. Donde podemos obter a excentricidade da órbita da Terra:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}0167 \text{ (quase uma circunferência)}$$

O eixo maior apresenta dois pontos: o periélio (janeiro) e o afélio (julho), que correspondem às distâncias mínimas e máxima da Terra ao Sol, respectivamente.

Ademais, no globo terrestre (geóide) o equador tem aproximadamente a forma de uma circunferência e o meridiano de uma elipse.

b) Arcos emforma de semi-elipse sãomuito empregados na construção de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos).

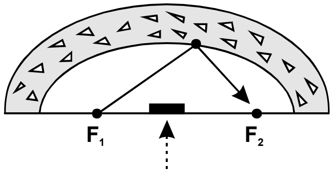


c) Engenharia Civil: em Resistência dos Materiais é muito empregada a elipse de inércia.

Engenharia Elétrica: conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmo foco) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias.

Engenharia Mecânica: são usadas engrenagens elípticas (excêntricos).

d) Sob uma abóboda elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serem praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.

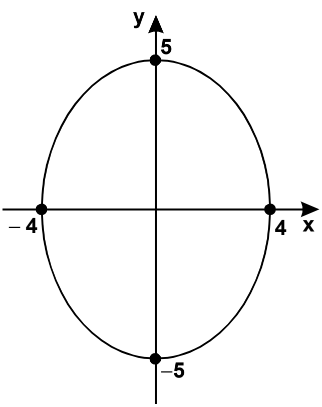


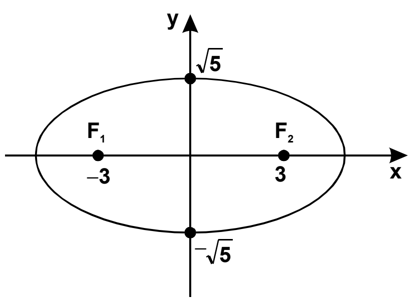
e) O mais portentoso monumento arquitetônico de Roma antiga foi o Coliseu. A planta baixa possuía a forma elíptica, cujo eixo maior tinha 188 m e o menor 156 m. Começou a ser construído em 72 por Vespasiano e foi concluído em 82 por Tito. A cobertura móvel, à altura de 85 m, era sustentada por um sistema inédito de tirantes, acionada em caso de chuva para proteger seus 40.000 espectadores. Diante da tribuna imperial, os garbosos gladiadores romanos desfilavam antes da luta e proferiam em alto e bom som: *Ave, Caesar, morituri te salutant* (Salve, César, os que vão morrer te saúdam).

Exercícios

"As paixões são loucas; porém, não precisam ser burras.
Alberto Goldin (n.1940), psicanalista argentino.

01. Dê as equações das elipses cujos gráficos são representados abaixo:





Resp.: a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; b) $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$

02. Calcular a distância focal de uma elipse cujo eixo maior mede 10 e cujo eixomenor mede 8.

Resp.: $2c = 6$

03. Equação canônica da elipse com centro na origem, eixo focal sobre o eixo y e cujamedida do eixomaior é 5 e do eixomenor é 2.

Resp.: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

04. Calcular a excentricidade da elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$.

Resp.: $\frac{3}{5}$

SUGESTÃO:

Calcule inicialmente a equação canônica, dividindo todos os termos por 400:

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

05. A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semi-eixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol.

Resp.: 150 929 660 km
156 056 330 km

06. Determinar os pontos de intersecção da elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ com os eixos cartesianos.

Resp.: $\left(-\frac{5}{3}, 0\right); \left(\frac{5}{3}, 0\right); \left(0, \frac{5}{2}\right); \left(0, -\frac{5}{2}\right)$

07. Pede-se a equação da elipse que passa pelos pontos (–2, 0), (2, 0) e (0, 1).

Resp.: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

08. Equação canônica da elipse com centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, que passa pelo ponto $A = (2\sqrt{2}, 1)$ e de excentricidade $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Resp.: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$

09. Calcular a equação canônica da elipse de centro na origem, focos no eixo das abscissas e sabendo que passa pelo ponto $A = (\sqrt{15}, -1)$ e seu semi-eixomenor é 2.

Resp.: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$

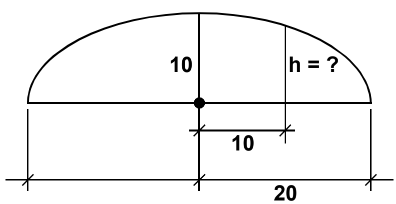
10. Um elipse tem o centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, passa pelo ponto A = (1, 1) e tem um foco em $F = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$. Calcular a excentricidade da elipse.

Resp.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. Uma elipse tem os focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e excentricidade igual a 0,5. Forneça a sua equação e a sua área S (da Geometria: $S = \pi ab$).

Resp.: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ e $S = 18\sqrt{3}\,\pi$ u.a.

12. Um arco é uma semi-elipse e o eixo maior é o vão. Se este tiver 40 m e a flecha 10 m, calcular a altura do arco a 10 m do centro da base.



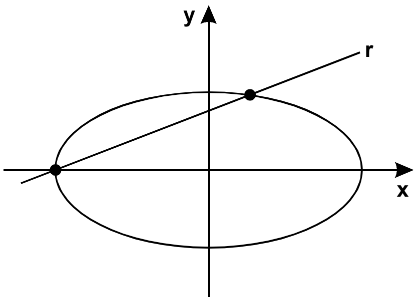
Resp.: $5\sqrt{3}$ m

Série B

13. Determinar o comprimento da corda que a reta $x = 4y - 4$ determina sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

Resp.: $\dfrac{8\sqrt{17}}{5}$

SUGESTÃO:



a) Para se obter os pontos de intersecção da elipse com a reta basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x = 4y - 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

donde se obtém

$P = (-4, 0)$ e

$P' = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

b) O comprimento da corda é a $d(P, P')$.

14. Determinar os pontos de intersecção da elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ com a reta $y = 2x + 3$.

Resp.: $P = (0, 3)$ e $P' = \left(\dfrac{-48}{25}, \dfrac{-21}{25}\right)$

15. Dois dos vértices de um polígono de 4 lados coincidem com os focos da elipse $9x^2 + 5y^2 = 1$ e os outros dois com os vértices do eixo menor elipse. Calcular a área do polígono.

Resp.: $\dfrac{4\sqrt{5}}{45}$ u.a.

16. Determinar a equação da elipse com centro na origem, focos sobre o eixo das abscissas e que passa pelos pontos $A = (2, 2)$ e $B = (2\sqrt{3}, 0)$.

Resp.: $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{6} = 1$

SUGESTÃO:

a) Equação da elipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ①

b) $A = (2, 2) \in$ ① $\Rightarrow \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$ ②

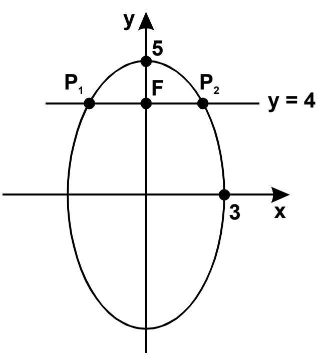
c) $B = (2\sqrt{3}, 0) \in$ ① $\Rightarrow \dfrac{12}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} = 1$ ③

Resolve-se: ② e ③

17. Similarmente à parábola, o *latus rectum* da elipse é uma das duas cordas focais da elipse e perpendiculares ao seu eixo maior. Então, dada a elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, pede-se comprimento do *latus rectum*.

Resp.: $\dfrac{18}{5}$

SUGESTÃO:



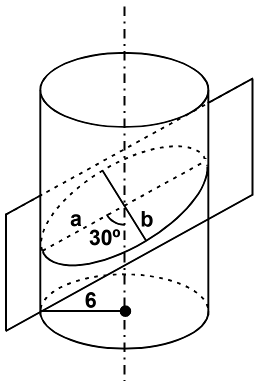
Um dos focos da elipse é $F = (0, 4)$.
Os pontos de intersecção da reta $y = 4$ com a elipse é $P_1 = \left(\dfrac{-9}{5}, 4\right)$ e $P_2 = \left(\dfrac{9}{5}, 4\right)$.

O comprimento é a $d(P_1, P_2)$.

18. Um cilindro de revolução tem por base um círculo de R = 6. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30º.

Resp.: 72πu.a.

SUGESTÃO:



Da figura:

a) $b = 6$

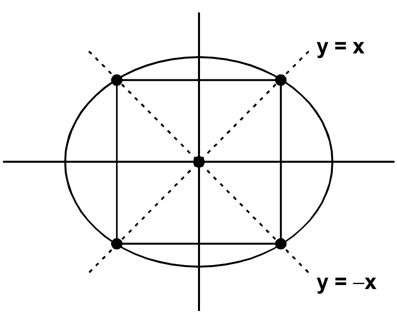
b) $a = \dfrac{6}{\text{sen } 30^\circ} = 12$

c) $S = \pi ab$

19. Determinar a área do quadrado inscrito na elipse $9x^2 + 16y^2 = 625$.

Resp.: 100 u.a.

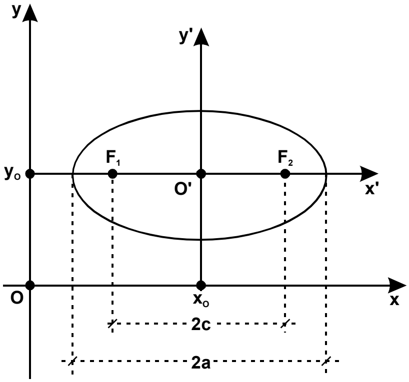
SUGESTÃO:



Os vértices do quadrado são obtidos pelas intersecções das retas y = x e y = –x com a elipse.

8. EQUAÇÃO DA ELIPSE CUJO CENTRO É O' = (x_o, y_o) E CUJOS EIXOS SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS

8. a) O eixo maior é paralelo ao eixo x.



Por meio de uma translação de eixos, representamos um novo sistema x'O'y', cuja origem O' = (x_o, y_o) coincide com o centro da elipse.

A equação da elipse referida ao novo sistema x'O'y' é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad ①$$

No entanto, as fórmulas de translação fornecem:

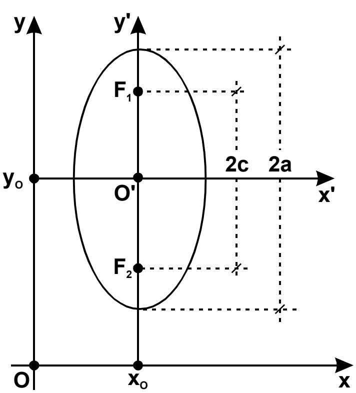
$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \qquad ②$$

Levando ② em ①:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{I})$$

que representa a equação canônica da elipse cujo centro é O' = (x_o, y_o) e cujos focos estão sobre uma paralela ao eixo x.

8. b) O eixo maior é paralelo ao eixo y.



Adotando um raciocínio similar ao caso (I), ter-se-á para equação da elipse:

$$\frac{(x - x_o)^2}{b^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1 \qquad (\text{II})$$

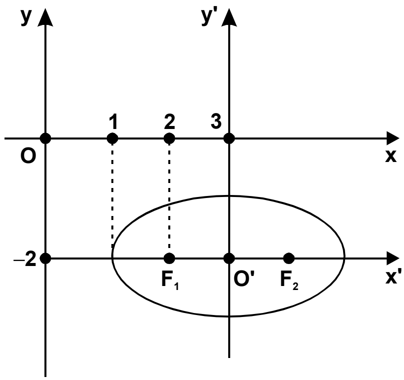
Em (I) e (II) eliminando-se os denominadores, desenvolvendo-se os produtos notáveis e ordenando-se as variáveis, a equação da elipse assume a forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, em que A e C têm o mesmo sinal e $A \neq C$.

Exercícios Resolvidos

"Educamos com o que somos e não com o que dizemos."
Euzébio Silveira da Motta (1847-1920), escritor curitibano.

01. Determinar as equações das elipses representadas.

1. a)



RESOLUÇÃO:

Da figura obtém-se:

$O' = (3,\ -2),\ a = 2\ \text{ e }\ c = 1.$

Cálculo de b:

$b^2 = a^2 - c^2 =$

$= 4 - 1 = 3 \ \Rightarrow b = \sqrt{3}$

A equação da elipse é da forma:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

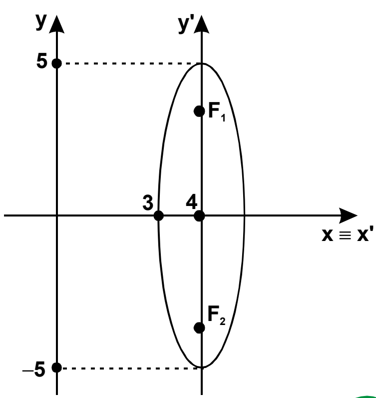
Levando os correspondentes valores na equação acima:

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{3} = 1$$

OBSERVAÇÃO:

As coordenadas dos focos são: $F_1 = (2, -2)$ e $F_2 = (4, -2)$.

1. b)



RESOLUÇÃO:

Obtemos da figura:

$O' = (4, 0)$, $a = 5$ e $b = 1$.

A elipse representada tem equação do tipo:

$$\frac{(x - x_o)^2}{b^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$$

Substituindo os valores obtidos da figura na equação acima:

$$\frac{(x - 4)^2}{1} + \frac{(y - 0)^2}{25} = 1$$

02. Determinar a equação canônica da elipse
$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$.

RESOLUÇÃO:
Pela translação deve-se eliminar os termos em x e em y (do 1.º grau).

2. a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

2. b) Levando na equação dada:

$$9(x_o + x')^2 + 4(y_o + y')^2 - 54(x_o + x') - 32(y_o + y') + 109 = 0 \quad ①$$

Fazendo o coeficiente de $x' = 0$:
$18x_o - 54 = 0 \Rightarrow x_o = 3$

Fazendo o coeficiente de $y' = 0$:
$8y_o - 32 = 0 \Rightarrow y_o = 4$

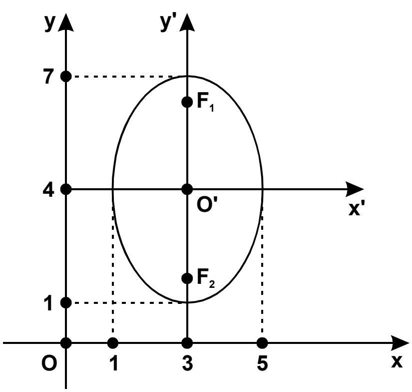
Então o centro $O' = (3, 4)$.
A nova equação tem a forma: $9x'^2 + 4y'^2 + F' = 0$,
onde: $F' = 9(3)^2 + 4(4)^2 - 54(3) - 32(4) + 109 = -36$
Destarte: $9x'^2 + 4y'^2 - 36 = 0 \quad ②$

OBSERVAÇÃO:
Substituindo $O' = (3, 4)$ em ① igualmente obter-se-ia ②.

2. c) Dividindo todos os termos de ② por 36:

$$\frac{9x'^2}{36} + \frac{4y'^2}{36} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1 \quad \text{(Resp.)}$$

2. d) Gráfico:



Coordenadas dos focos:

$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$

$c = \sqrt{5}$

$F_1 = (3, 4 + \sqrt{5})$

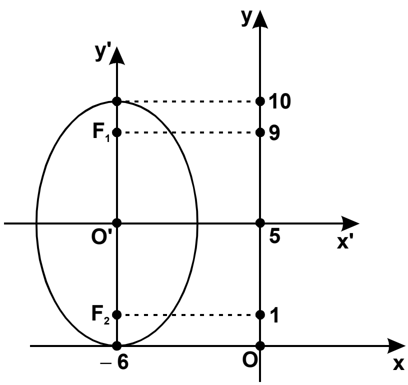
$F_2 = (3, 4 - \sqrt{5})$

Exercícios

"A matemática vista com justeza, possui não apenas verdade, mas suprema beleza – uma beleza fria e austera, como só a grande arte pode mostrar."
Bertrand Russel (1872-1970), filósofo e matemático inglês.

01. Dada a equação da elipse $\frac{(x+6)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$, pede-se as coordenadas dos focos, do centro e o respectivo gráfico.

Resp.:



$O' = (-6, 5)$
$F_1 = (-6, 9)$
$F_2 = (-6, 1)$

02. Obter a equação da elipse com centro em $O' = (8, -2)$, com $b = 1$ e $c = \sqrt{3}$.

Resp.: $\frac{(x-8)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$

03. Determinar as coordenadas dos focos da elipse

$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$

Resp.: $F_1 = (3+\sqrt{3}, -1)$ e $F_2 = (3-\sqrt{3}, -1)$

04. Equação da elipse com focos em (–2, 3) e (6, 3) e vértices em (–3, 3) e (7, 3).

Resp.: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

05. Obter a equação da elipse cujos vértices são $A_1 = (1, 3)$; $A_2 = (1, -7)$; $B_1 = (-2, -2)$ e $B_2 = (4, -2)$.

Resp.: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

06. Calcular a equação da elipse de centro em (4, 2) e tangente aos eixos coordenados, sabendo que os eixos da elipse são paralelos aos referidos eixos cartesianos.

Resp.: $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

07. Qual a equação do conjunto de ponto P = (x, y) cuja soma das distâncias a $F_1 = (1, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ é 5?

Resp.: $84x^2 + 100y^2 - 336x - 189 = 0$

SUGESTÃO:
$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 5$
Efetuando tem - se a resposta.

08. Determinar as coordenadas do centro e a equação canônica da elipse $4x^2 + y^2 - 40x - 12y + 120 = 0$.

Resp.: $O' = (5, 6)$ e $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1$

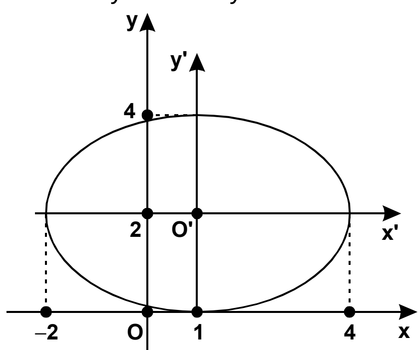
09. Achar a equação canônica e as coordenadas dos focos da elipse $4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$.

Resp.: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{12} = 1$

$F_1 = (4, -2 + \sqrt{3})$ e $F_2 = (4, -2 - \sqrt{3})$

10. Construir o gráfico da elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Resp.:



Série B

"Ter problemas na vida não é ter vida infeliz."
Da música "Pais Paraplégicos", de Padre Zezinho, scj.

11. O ponto B = (3, –11) é um dos extremos do eixo menor de uma elipse cujos focos estão sobre a reta y + 6 = 0. Pede-se a equação da elipse conhecendo-se ainda a sua excentricidade igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Resp.: $\frac{(x-3)^2}{50}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

12. Um ponto P = (x, y) se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos (2, – 4) e (2, 2) é 10. Deduzir a equação do lugar geométrico descrito.

Resp.: $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$

9. EQUAÇÃO DA ELIPSE CUJO CENTRO É O' = (x_O, y_O) E CUJOS EIXOS NÃO SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS.

Reiteramos que a existência do termo em xy na equação de uma elipse indica que os eixos da elipse são oblíquos aos eixos cartesianos. Faz-semister a rotação, além da translação.

Exercício Resolvido

"O homem nunca sabe do que é capaz até ser obrigado a tentar."
Charles Dickens (1812-1870), escritor inglês.

Dada a elipse de equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 – 4x + 4y = 0$, pede-se o centro, a equação canônica e o gráfico.

RESOLUÇÃO:

a) Ordem das transformações:

$$B^2-4AC=(6)^2-4(5)(5)\neq 0 \quad \begin{cases} 1)\ \text{translação} \\ 2)\ \text{rotação} \end{cases}$$

b) Translação:

Substituindo as fórmulas de translação na equação dada:

$$5(x_o+x')^2+6(x_o+x')(y_o+y')+5(y_o+y')^2-4(x_o+x')+$$
$$+4(y_o+y')=0 \qquad (1)$$

* fazendo o coeficiente de $x' = 0$
  $10x_o + 6y_o - 4 = 0$

* fazendo o coeficiente de $y' = 0$
  $6x_o + 10y_o + 4 = 0$

Resolvendo o sistema acima obtém-se $x_o = 1$ e $y_o = -1$.
Então o centro da elipse é $O' = (1, -1)$.
Levando $O' = (1, -1)$ em ①:
$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 - 4 = 0$ ②

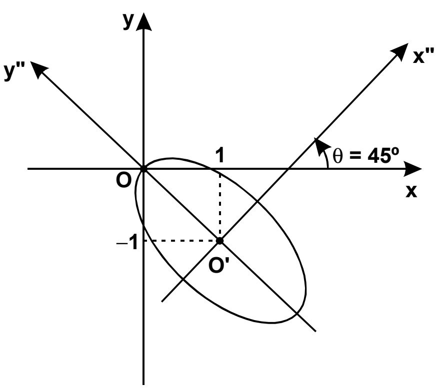
c) Rotação (vamos eliminar o termo em x'y' na equação acima):
Na equação dada $A = C \Rightarrow \theta = 45^o$
Fórmulas de rotação :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\theta - y''\,\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \\ y' &= x''\,\text{sen}\,\theta + y''\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \end{aligned}\right\} \quad ③$$

Levando ③ em ② obtém-se a equação da elipse:
$8x''^2 + 2y''^2 = 4$ ou na forma canônica:

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y''^2}{2} = 1$$

Gráfico:



* da equação canônica:

$a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

* intersecções com os eixos cartesianos.

Tomando a equação dada e fazendo $y = 0$ resulta a equação

$5x^2 - 4x = 0$, cujas raízes são 0 e $\frac{4}{5}$.

Por outro lado, fazendo $x = 0$ na equação dada, obtém-se a equação $5y^2 + 4y = 0$, cujas raízes são 0 e $-\frac{4}{5}$.

Exercícios

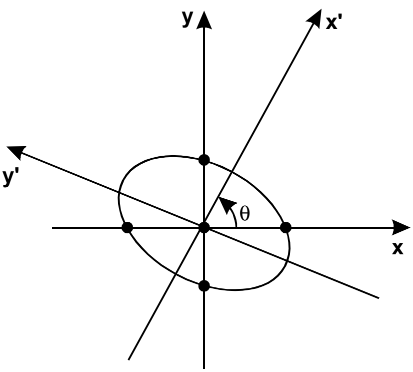
"Curitiba tem apenas duas estações: o inverno e a estação rodoviária."
Chiste popular.

01. Obter a equação canônica da elipse $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 2 = 0$.

Resp.: $\dfrac{x'^2}{\frac{4}{5}} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$

02. Dada a equação da elipse $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 9 = 0$, pede-se para calcular a sua equação canônica e traçar o gráfico.

Resp.: $x'^2 + \dfrac{y'^2}{\frac{9}{4}} = 1$



OBSERVAÇÕES:

1) $a = \dfrac{3}{2}$ e $b = 1$

2) a elipse corta o eixo x nos pontos $\dfrac{\pm 3\sqrt{5}}{5}$

3) a elipse intercepta o eixo y nos pontos $\dfrac{\pm 3\sqrt{2}}{4}$.

03. Calcular a equação da elipse de focos $F_1 = (0, 1)$ e $F_2 = (1, 0)$ e cuja medida do eixo maior é $2a = 3$.

Resp.: $32x^2 + 8xy + 32y^2 - 36x - 36y - 45 = 0$

SUGESTÃO:

O eixo maior é oblíquo aos eixos coordenados. Aplique a definição de elipse: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

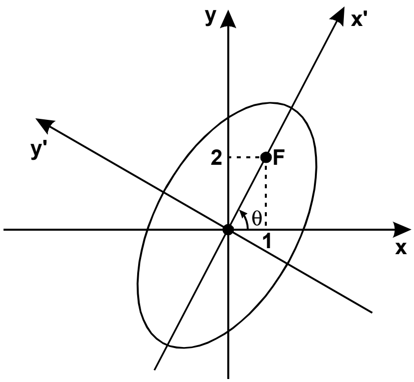
Série B

"Suaviter in modo, fortiter in re."
Axioma latino: Suave no modo, forte na ação.

04. Uma elipse tem o centro na origem e:
a) eixo focal sobre a reta $y = 2x$;
b) um dos focos em $F = (1, 2)$;
c) $a = 2\sqrt{5}$ e $c = \sqrt{5}$.
Pede-se a sua equação.

Resp.: $19x^2 - 4xy + 16y^2 = 300$

SUGESTÃO:



1) Equação da elipse em relação a x'Oy':
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

2) Se $a = 2\sqrt{5}, c = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 15$

3) Da figura:
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad e \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

4) Fórmulas de rotação:
$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2x - y}{\sqrt{5}} \\ y' &= \frac{x + 2y}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

5) Substituindo (2) em (1) tem-se a resposta.

05. Uma elipse tem:

a) eixo focal sobre a reta $y = -x$

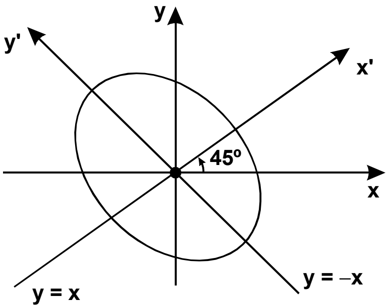
b) eixo menor sobre a reta $y = x$

c) $b = 1$ e $c = \dfrac{1}{2}$

Calcular a sua equação.

Resp.: $9x^2 + 2xy + 9y^2 - 10 = 0$

SUGESTÃO:



1) Equação da elipse:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad ①$$

2) Fórmulas de rotação ($\alpha = 45^o$):

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos 45^o - y \operatorname{sen} 45^o \\ y' &= x \operatorname{sen} 45^o + y \operatorname{sen} 45^o \end{aligned}\right\} ②$$

3) Substitua ② em ①:

06. Uma elipse tem como focos os pontos $F_1 = (-8, 15)$ e $F_2 = (12, 5)$ e passa pela origem do sistema cartesiano. Qual a sua equação?

Resp.: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$

PROMETA A SI MESMO

Ser forte, demaneira que nada possa perturbar a sua paz de espírito.

Falar de saúde, felicidade e prosperidade a toda pessoa que encontrar.

Fazer os seus amigos sentirem que há alguma coisa superior dentro deles.

Olhar para o lado glorioso de todas as coisas e fazer com que seu otimismo se torne realidade.

Pensar sempre no melhor, trabalhar sempre pelo melhor e esperar somente o melhor.

Esquecer os erros do passado e preparar-se para melhores realizações no futuro.

Ter tanto entusiasmo e interesse pelo sucesso alheio como pelo próprio.

Dedicar tanto tempo ao próprio aperfeiçoamento que não lhe sobre tempo para criticar os outros.

Ser grande na contrariedade, nobre na cólera, forte no temor, e receber alegremente a provação.

Fazer um bom juízo de si mesmo e proclamar este fato ao mundo, não emaltas vozes, mas em grandes feitos.

Viver na certeza de que o mundo estará sempre ao seu lado, enquanto lhe dedicar o que há de melhor dentro de si mesmo.

Autor desconhecido.

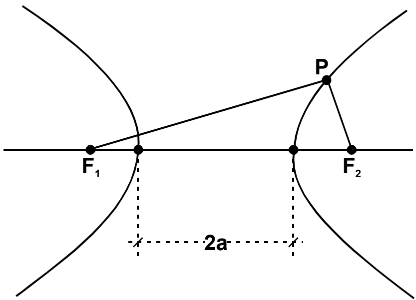
CAPÍTULO 4

A Hipérbole

1. DEFINIÇÃO

É o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos), do mesmo plano, é uma constante (2a), onde $2a < d(F_1F_2)$:

Assim:

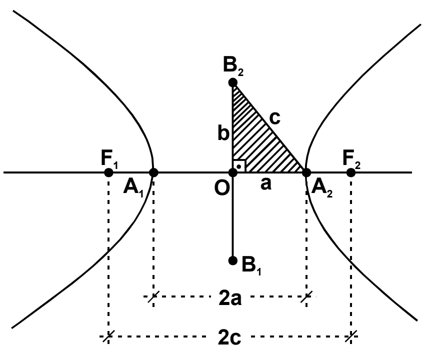


$$\left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a$$

A hipérbole é uma curva com dois **ramos** e o valor absoluto pode ser desconsiderado desde que adotemos a diferença entre a maior e o menor distância.

OBSERVAÇÃO:
A etimologia da palavra **hipérbole**, você encontra na pág. 231.

2. ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



F_1, F_2: focos. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a 2c, denomina-se **distância focal**.

O: Centro da hipérbole; é o ponto médio do segmento F_1F_2.

A_1, A_2: vértices da hipérbole.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 e cujo comprimento é 2a.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 e cujo comprimento é 2b.

N.B.: Impropriamente, por abuso de linguagem, denomina-se "eixo real" o segmento A_1A_2 e "eixo imaginário" o segmento B_1B_2. O eixo imaginário tem como reta suporte a mediatriz do segmento A_1A_2.
Do triângulo retângulo B_2OA_2, hachurado na figura, obtemos a **relação notável**:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

3. EXCENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE

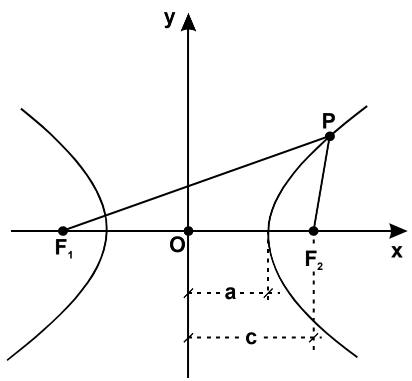
É definida pela relação

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon > 1)$$

Como a e c são positivos e c > a, depreende-se que $\varepsilon > 1$.
Há uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole: quanto maior a excentricidade maior a abertura e vice-versa.

4. EQUAÇÃO CANÔNICA DA HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM

4. a) O eixo real coincide com o eixo x.



Seja:
P = (x, y) um ponto genérico da hipérbole.
$F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.
Por definição:
$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

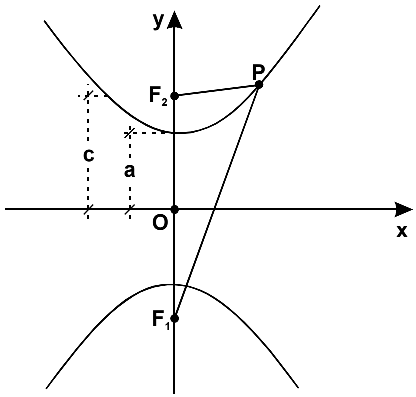
$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Agora, empregando as mesmas operações para deduzir a equação da elipse, e mutatis mutandis, chegamos à equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{eixo real} \equiv \text{eixo x})$$

cognominada equação canônica ou reduzida da hipérbole.

4. b) O eixo real coincide com o eixo y.



O posicionamento da hipérbole no sistema cartesiano fornece:

$F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Analogamente demonstra-se que para um ponto P = (x, y) pertencente à hipérbole tem-se a equação canônica:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

(eixo real $\equiv$ eixo y)

Vale enfatizar que na elipse sempre a > b. Na hipérbole, no entanto, pode-se ter a > b, a = b ou a < b.

Ademais, numa hipérbole o eixo real, bem como o eixo focal, coincide com o eixo da coordenada correspondente à variável de coeficiente positivo (se a equação estiver na forma canônica).

Exemplo:

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1 \quad \rightarrow$ o eixo focal coincide com o eixo x.

$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1 \quad \rightarrow$ o eixo focal coincide com o eixo y.

Exercício Resolvido

"Com bons modos, você me leva até para o inferno; com maus modos, nem para o céu."
Citado por Adriana C. Micheloni, professora em Marília-SP.

Dada a hipérbole de equação $16x^2 - 25y^2 = 400$ pede-se:

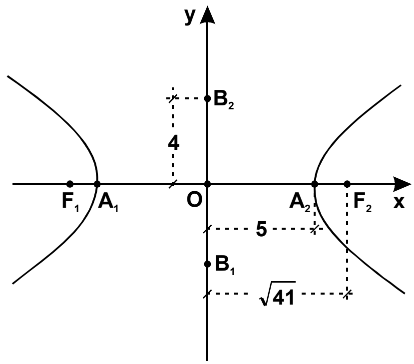
a) a equação canônica;
Dividindo todos os termos da equação dada por 400:

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = 1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1} \quad \text{(Resp.)}$$

b) excentricidade (ε);
Da equação acima se obtém a = 5 e b = 4.
Cálculo de c:
$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$

Resp.: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

c) o gráfico.



Ainda :
$A_1 = (-5, 0)$; $A_2 = (5, 0)$
$B_1 = (0, -4)$; $B_2 = (0, 4)$
$F_1 = (-\sqrt{41}, 0)$; $F_2 = (\sqrt{41}, 0)$

Exercícios

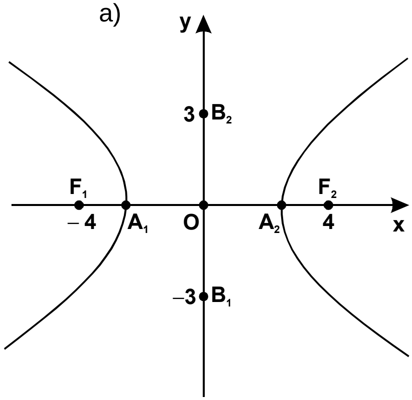
"Para mim, a vida não é uma 'chama breve'. Ela é uma espécie de chama esplendorosa que consegui segurar por algum momento, e quero fazê-la queimar o mais intensamente possível antes de passá-la às futuras gerações."
George Bernard Shaw (1856-1950), escritor irlandês.

01. Determinar a distância focal da hipérbole $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Resp.: 10

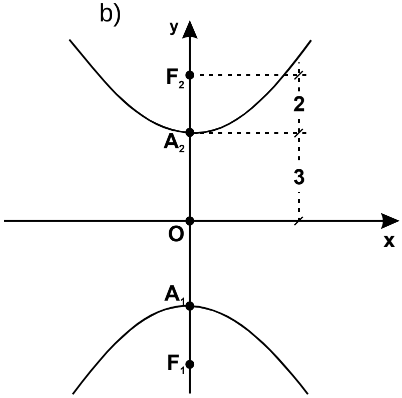
02. Obter as equações das hipérboles abaixo configuradas.

a)



Resp.: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$

b)



Resp.: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

03. Equação da hipérbole com focos em $F_1 = (0, 8)$ e $F_2 = (0, -8)$ e vértices em $(0, 6)$ e $(0, -6)$.

Resp.: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{28} = 1$

04. Equação da hipérbole cuja excentricidade é $\sqrt{5}$ e cuja distância focal é $4\sqrt{5}$. (O centro coincide com a origem e os focos estão sobre o eixo x).

Resp.: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

05. Obter a excentricidade da hipérbole $5x^2 - 5y^2 = k$ (para $k \neq 0$).

Resp.: $\sqrt{2}$

06. Uma hipérbole tem o centro na origem e o eixo real coincide com o eixo x. Ademais, $2b = 6$ e $\varepsilon = \frac{5}{4}$. Determine a sua equação.

Resp.: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

07. Obter a equação da hipérbole de focos em $F_1 = (2, 0)$ e $F_2 = (-2, 0)$ e que passa pelo ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$.

Resp.: $x^2 - y^2 = 2$

08. Calcular a equação da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo das ordenadas, que passa pelos pontos $P = \left(0, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ e $Q = (4, 6)$.

Resp.: $5y^2 - 9x^2 = 36$

SUGESTÃO:

a) Equação da hipérbole : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

b) $P \in$ hipérbole $\Rightarrow a^2 = \frac{36}{5}$

c) $Q \in$ hípérbole $\Rightarrow b^2 = 4$

Série B

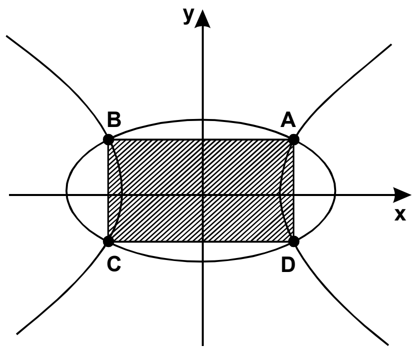
"Como é raro ter o mesmo critério para julgar o próximo e a nós mesmos."

Tomás de Kempis (c. 1380-1471), in Imitação de Cristo.

09. A elipse $2x^2 + 3y^2 = 24$ e a hipérbole $x^2 - y^2 = 5$ se interceptam em 4 pontos A, B, C, D. Determinar a área do retângulo ABCD.

Resp.: $S = \frac{4\sqrt{546}}{5}$ u.a.

SUGESTÃO:



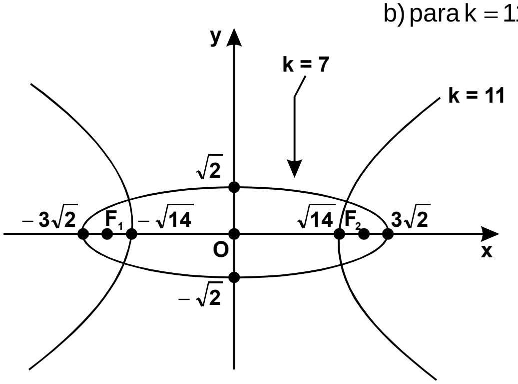
Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 24 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

10. Para k = 7 e para k = 11, representar no sistema cartesiano os gráficos de $\dfrac{x^2}{25-k} + \dfrac{y^2}{9-k} = 1.$

Resp.: a) para $k = 7 \Rightarrow \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ (elipse)

b) para $k = 11 \Rightarrow \dfrac{x^2}{14} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ (hipérbole)



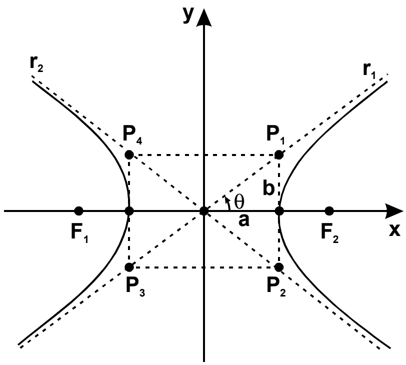
A figura ao lado mostra as duas curvas e observe inclusive que a elipse e a hipérbole têm os mesmos focos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$. São homofocais.

5. ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

a) Definição

Na figura que vem a seguir observe a hipérbole e o retângulo, cujos lados são 2a e 2b.

As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas de ASSÍNTOTAS da hipérbole. A distância de um ponto P da hipérbole à assíntota tende para zero quando o ponto P da hipérbole se afasta para o infinito.



As assíntotas são excelentes guias para se traçar o gráfico da hipérbole: o esboço adequado de uma hipérbole pode ser feito traçando-se inicialmente o retângulo e as retas que contêm as diagonais (assíntotas). O ramo de cada hipérbole tem vértice tangente ao lado do retângulo e "abre-se" a curva tendendo para as assíntotas.

b) Cálculo das equações das assíntotas

Como as duas assíntotas acima figuradas passam pela origem, são retas do tipo:

$y = \pm mx$

mas $\quad m = \operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$

donde:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Essas são as equações das duas assíntotas da hipérbole, que também podem se apresentar sob a forma de

$r_1: bx - ay = 0$
$r_2: bx + ay = 0$

c) Recursomnemônico

Sói ser assaz útil a seguinte regra prática: a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser escrita sob a forma $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$. Para se obter as equações das assíntotas basta substituir por zero o 2.º membro desta última equação. Assim:

$bx^2 - ay^2 = 0$ ou fatorando o produto notável:

$r_1: bx - ay = 0$ e $r_2: bx + ay = 0$.

Analogamente, a hipérbole $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ pode ser escrita sob a forma $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$. Se o membro direito é substituído por zero, as assíntotas têm equações:

$r_1: by - ax = 0$ e $r_2: by + ax = 0$

Exercício Resolvido

Calcular as equações das assíntotas da hipérbole $16x^2 - 25y^2 = 400$.
RESOLUÇÃO:
Na equação dada faz-se o 2.º membro igual a zero: $16x^2 - 25y^2 = 0$

Decompondo o produto notável:
$(4x - 5y)(4x + 5y) = 0$ ou $r_1: 4x - 5y = 0$ e $r_2: 4x + 5y = 0$ (Resp.)

6. HIPÉRBOLE EQÜILÁTERA

a) Definição

Hipérbole eqüilátera é aquela em que a = b, ou seja, a medida do semi-eixo real é igual à medida do semi-eixo imaginário.

b) Cálculo da equação da hipérbole eqüilátera

Sendo a = b:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

equação que tipifica uma hipérbole eqüilátera.

7. IDENTIFICAÇÃO DA HIPÉRBOLE

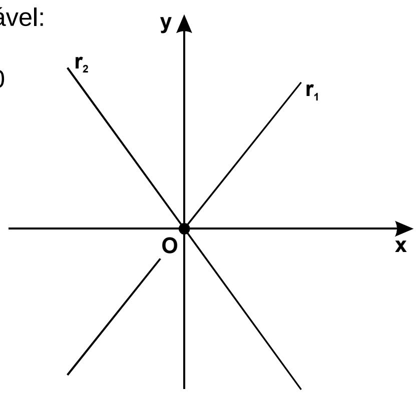
Uma equação do tipo $Ax^2 + Cy^2 = F$ representa uma hipérbole com centro na origem e eixos coincidentes aos eixos cartesianos, se e somente se, A e C têm sinais contrários e F não nulo.

Ex.: $2x^2 - 3y^2 = 5$

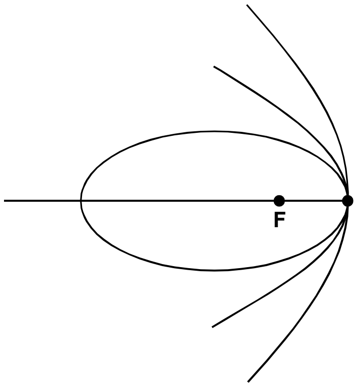
Quando F for nulo e A e C têm sinais contrários, a hipérbole se degenera num par de retas reais e concorrentes.

Ex.: $4x^2 - 9y^2 = 0$
decompondo o produto notável:
$(4x - 3y)(4x + 3y) = 0$ ou
$r_1: 4x - 3y = 0$ e $r_2: 4x + 3y = 0$

Gráfico de $4x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow$



8. APLICAÇÕES PRÁTICAS DE UMA HIPÉRBOLE
(Leitura Complementar)



a) **Mecânica Celeste:** dependendo de sua velocidade, um cometa tem uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica (o foco coincide com o Sol). Vide figura à esquerda.

b) Em Mecânica dos Fluidos e em alguns problemas referentes ao fluxo estacionário de eletricidade são utilizadas hipérboles homofocais (demesmofoco).

c) O sistema LORAN (longe range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Da Terra, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina 2a e assim se obtém a característica da hipérbole na qual está P.

Igualmente na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: o sistema RADUX (de baixíssima freqüência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

Exercícios

"A natureza deu ao homem um pênis e um cérebro, mas insuficiente sangue para fazê-los funcionar simultaneamente."
Sabedoria popular.

1. Pede-se para construir o gráfico de cada equação:

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

e) $y^2 - x = 0$

f) $x^2 - y^2 = 0$

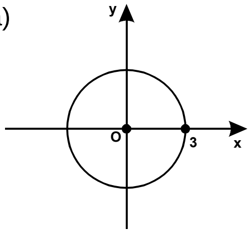
g) $x^2 + y^2 = 0$

h) $x^2 - 4 = 0$

i) $x^2 + 2y^2 = -1$

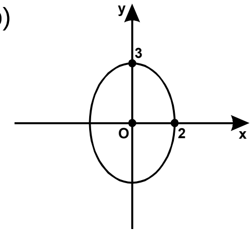
Resp.:

a)



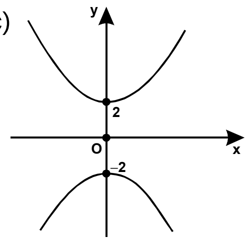
Circunferência de raio = 3.

b)



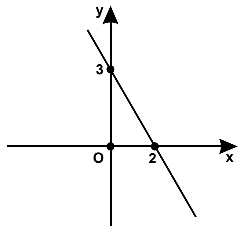
Elipse onde a = 3 e b = 2
(o eixo maior coincide com o eixo y).

c)



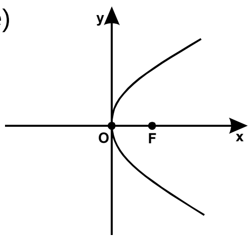
Hipérbole onde a = 2 e b = 3
(o eixo real coincide com o eixo y).

d)



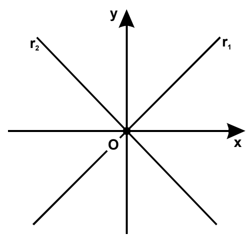
Reta.

e)



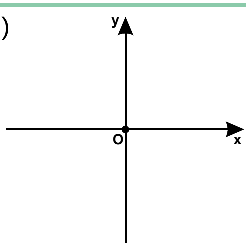
A parábola $y^2 = x$ tem concavidade voltada para a direita e o eixo focal coincide com o eixo x.

f)



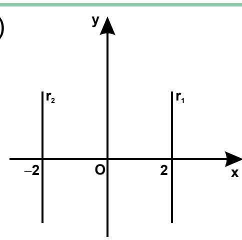
Par de retas reais:
(x – y) (x + y) = 0 ou
r_1: x – y = 0 e r_2: x + y = 0

g)



Apenas o ponto O = (0, 0) verifica tal equação.

h)



Par de retas reais e paralelas:
(x – 2) (x + 2) = 0 ou
r_1: x – 2 = 0 e r_2: x + 2 = 0

i) Elipse imaginária.

02. Provar que a elipse $2x^2 + y^2 = 10$ e a hipérbole $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ são homofocais (têm osmesmos focos).

03. Pede-se a equação da hipérbole eqüilátera que passa pelo ponto $P = (4, -2)$. O centro coincide com a origem do sistema cartesiano e os focos estão sobre o eixo x.

Resp.: $x^2 - y^2 = 12$

04. Achar a distância do foco superior da hipérbole $9y^2 - 16x^2 = 144$ a cada uma de suas assíntotas.

Resp.: 3

Série B

"Ah, como dói viver quando falta esperança."
Manuel Bandeira (1886-1968), poeta e escritor pernambucano.

05. Uma hipérbole tem um de seus vértices em $A = (3, 0)$ e as equações de suas assíntotas são $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$. Determine a equação da hipérbole.

Resp.: $4x^2 - 9y^2 = 36$

SUGESTÃO:
Equação da hipérbole:
a) $(2x - 3y)(2x + 3y) = k$ ou $4x^2 - 9y^2 = k$
b) $A = (3, 0) \in$ hipérbole $\Rightarrow k = 36$

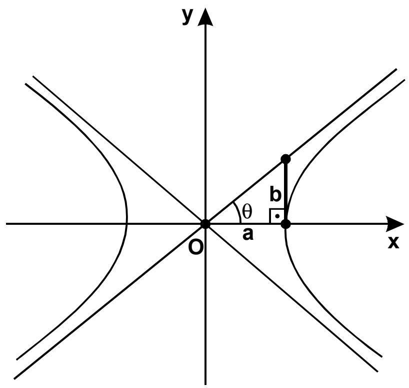
06. Obter as coordenadas dos pontos de intersecção da reta $x - 4y - 4 = 0$ com a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 16$.

Resp.: $(4, 0)$ e $\left(-\frac{20}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

07. Uma hipérbole tem excentricidade igual a 2. Calcular o ângulo entre as assíntotas.

Resp.: $2\theta = \frac{2\pi}{3}$

SUGESTÃO:



a) $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a$

b) $b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = a\sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

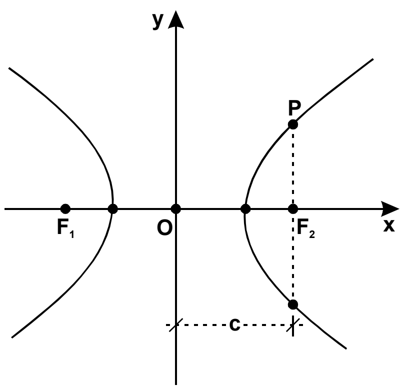
$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}.$

O ângulo entre as assíntotas é 2θ.

08. Latus rectum ou corda focal mínima é a corda tirada por um foco perpendicularmente ao eixo real. Determinar o comprimento "ℓ" da latus rectum da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Resp.: $\ell = \dfrac{2b^2}{a}$

SUGESTÃO:



a) $P = (c, y) \in$ hipérbole:

$\dfrac{c^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b) Isolando y na equação acima:

$\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}$

mas $c^2 - a^2 = b^2$

$\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{b^2}{a^2} \Rightarrow y = \dfrac{b^2}{a}$

c) $\ell = 2y = \dfrac{2b^2}{a}$

Exemplificando: o comprimento da latus rectum da hipérbole

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ é $\ell = \dfrac{2(\sqrt{2})^2}{2} = 2.$

OBSERVAÇÕES:
Similarmente deduz-se que o comprimento da latus rectum da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ é também $\ell=\frac{2b^2}{a}$.

09. Demonstrar que a excentricidade de qualquer hipérbole eqüilátera é igual a $\sqrt{2}$.

SUGESTÃO:
Na hipérbole eqüilátera $a=b$.

Logo $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Isto posto, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$.

10. Uma hipérbole passa pelo ponto P = (1, 2) e uma de suas assíntotas é a reta $3y-\sqrt{11}x=0$. Determine a equação da hipérbole sabendo-se que o eixo real coincide com o eixo y e o centro está na origem do sistema cartesiano.

Resp.: $9y^2-11x^2=25$

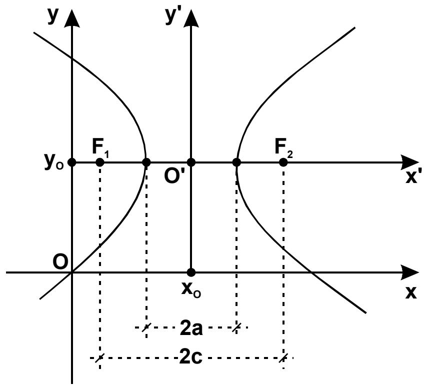
SUGESTÃO:
a) Equações das assíntotas:
$3y-\sqrt{11}\,x=0$ e $3y+\sqrt{11}\,x=0$
b) Equação da hipérbole:
$(3y-\sqrt{11}\,x)(3y+\sqrt{11}\,x)=k$ ou $9y^2-11x^2=k$
c) $P\in$ hipérbole $\Rightarrow$ $k=25$.

11. Calcular os pontos de intersecção da parábola $y^2=3x$ com a hipérbole $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$.

Resp.: $(2,\sqrt{6})$; $(2,-\sqrt{6})$;
$(10,\sqrt{30})$; $(10,-\sqrt{30})$

9. EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE CUJO CENTRO É O' = (x_o, y_o) E CUJOS EIXOS SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS

a) O eixo real é paralelo ao eixo x.



A equação da hipérbole referida ao novo sistema x'O'y' é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

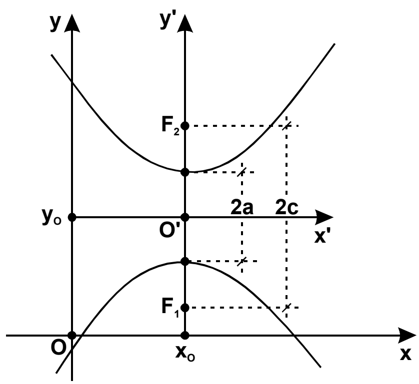
Como há translação de eixos:

$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \qquad (2)$$

Levando (2) em (1):

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{I})$$

b) O eixo real é paralelo ao eixo y.



Adotando um raciocínio análogo ao caso (I), a hipérbole ao lado figurada tem equação:

$$\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{II})$$

Em (I) e (II) eliminando os denominadores, desenvolvendo os produtos notáveis e ordenando as variáveis, a equação de hipérbole tem a forma da equação do 2.º grau:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

em que A e C são não nulos e diferem em sinal.

Ademais, quando a hipérbole tem o centro em O' = (x_o, y_o), as assíntotas passarão por esse ponto e terão por equações:

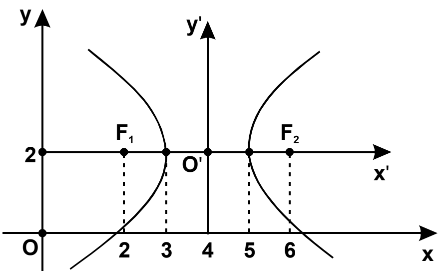
$$y - y_o = \pm \frac{b}{a}(x - x_o) \quad \text{para a hipérbole (I) ou}$$

$$y - y_o = \pm \frac{a}{b}(x - x_o) \quad \text{para a hipérbole (II)}$$

Exercícios Resolvidos

"Os que se mostram fortes contra os fracos são geralmente fracos contra os fortes."
Leoni Kanef

01. Determinar a equação da hipérbole abaixo configurada:



Obtemos da figura:
$O' = (4, 2);\ a = 1 \text{ e } c = 2.$

Cálculo de b:
$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}.$

A equação da hipérbole é da forma:
$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo os valores obtidos da figura na equação acima:

$$\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \quad \text{ou} \quad 3x^2 - y^2 - 24x + 4y + 41 = 0$$

OBSERVAÇÃO:
Os focos têm coordenadas: $F_1 = (2, 2)$ e $F_2 = (6, 2)$

02. Obter a equação canônica da hipérbole
$4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$

a) Fórmulas de translação:
$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

b) Levando na equação dada:
$$4(x_o + x')^2 - (y_o + y')^2 - 8(x_o + x') - 4(y_o + y') - 4 = 0 \qquad (1)$$

$\star$ fazendo o coeficiente de $x' = 0$
$8x_o - 8 = 0 \Rightarrow x_o = 1$

$\star$ fazendo o coeficiente de $y' = 0$
$-2y_o - 4 = 0 \Rightarrow y_o = -2$

Então $O' = (1, -2)$.

c) A nova equação tem a forma:
$4x'^2 - y'^2 + F' = 0$

mas:
$F' = 4(1)^2 - (-2)^2 - 8(1) - 4(-2) - 4 = -4$

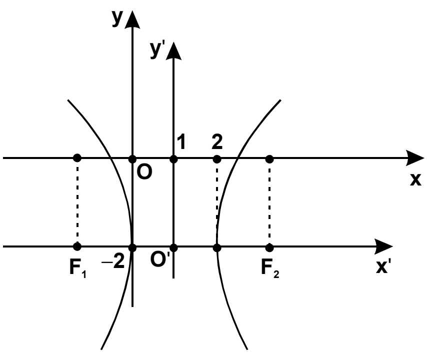
então:
$4x'^2 - y'^2 = 4 \qquad ②$

OBSERVAÇÃO:
Se levássemos $O' = (1, -2)$ em ① igualmente obteríamos ②.

Dividindo todos os termos de ② por 4:

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1 \quad \text{(Resp.)}$$

d) Gráfico:



Coordenadas dos focos:
$c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = \sqrt{5}$
$F_1 = (\sqrt{5} - 1, -2)$
$F_2 = (\sqrt{5} + 1, -2)$

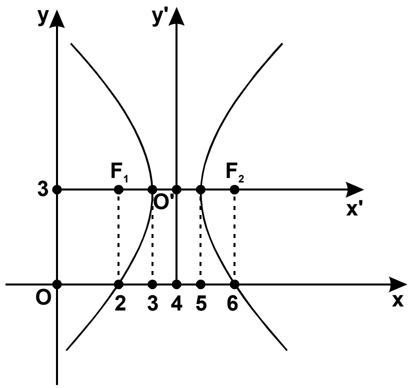
Exercícios

"90% dos problemas de aprendizagem não estão no cérebro e sim na afetividade."
Dr. Egídio Romanelli, prof. da UFPR, psicólogo
com pós-doutorado na França.

01. Uma hipérbole tem equação $\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$. Pede-se as coordenadas dos focos.

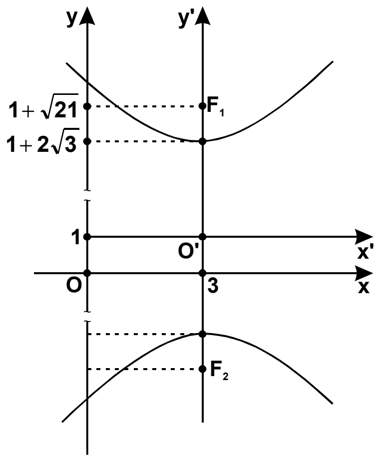
Resp.: $F_1 = (-2, 2)$ e $F_2 = (4, 2)$

02. Calcular as equações das hipérboles abaixo representadas:
a)



Resp.: $\dfrac{(x-4)^2}{1} - \dfrac{(y-3)^2}{3} = 1$

b)



Resp.: $\dfrac{(y-1)^2}{12} - \dfrac{(x-3)^2}{9} = 1$

03. Equação da hipérbole sabendo-se que um dos focos é $F = (-2, 2)$, o centro é $O' = (-2, -1)$ e $2a = 4$.

Resp.: $\dfrac{(y+1)^2}{4} - \dfrac{(x+2)^2}{5} = 1$

04. Obter a equação da hipérbole de eixos paralelos aos eixos cartesianos com focos em (1, 0) e (1, 4) e excentricidade igual a 3.

$$\text{Resp.: } \frac{(y-2)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(x-1)^2}{\frac{32}{9}} = 1$$

05. Achar a equação da hipérbole de centro em (1, 0), um foco em $(1+\sqrt{2}, 0)$ e um vértice em (0, 0).

Resp.: $x^2 - y^2 - 2x = 0$

06. Equações das assíntotas da hipérbole $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

Resp.: $3x - 4y - 10 = 0$ e $3x + 4y - 2 = 0$

07. Obter a excentricidade da hipérbole $x^2 - 3y^2 + 2x + 24y = 44$.

Resp.: 2

08. Determinar as coordenadas dos focos da hipérbole $x^2 - 2y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$

Resp.: $F_1 = (3-\sqrt{3}, 2)$ e $F_2 = (3+\sqrt{3}, 2)$

Série B

> ***"Brasil: fraude explica".***
> Carlito Maia (1924-2002), pensador e publicitário mineiro.

09. Calcular as equações das assíntotas da hipérbole $y^2 - x^2 + 4y + 4x - 1 = 0$.

Resp.: $x + y = 0$ e $x - y - 4 = 0$

SUGESTÃO:

Utilize as fórmulas de translação para obter o centro $O' = (2, -2)$ e a equação canônica $\frac{y'^2}{1} - \frac{x'^2}{1} = 1$ (onde $a = 1$ e $b = 1$). Como o eixo real é paralelo ao eixo y, as equações das assíntotas têm a forma $y - y_o = \pm \frac{a}{b}(x - x_o)$.

10. As assíntotas de uma hipérbole são as retas $x + y + 2 = 0$ e $x - y + 3 = 0$. Obter a equação dessa hipérbole, sabendo que ela passa pelo ponto $P = (3, 1)$.

Resp.: $x^2 - y^2 + 5x + y - 24 = 0$

SUGESTÃO:

a) Equação da hipérbole
$(x + y + 2)(x - y + 3) = k$ ①

b) Substituindo-se $P = (3, 1)$ em ① obtém-se $k = 30$.

c) Leva-se $k = 30$ em ①.

11. Obter as assíntotas da hipérbole tendo-se $\varepsilon = \sqrt{5}$ e cujos vértices estão em $(-5, -1)$ e $(-5, -3)$.

Resp.: $x - 2y + 1 = 0$ e $x + 2y + 9 = 0$

12. Um ponto $P = (x, y)$ se move de tal sorte que sua distância ao ponto $A = (3, 2)$ mantém-se sempre igual ao quádruplo de sua distância à reta $r: y + 1 = 0$. Pede-se a equação do lugar geométrico descrito por P.

Resp.: $x^2 - 15y^2 - 6x - 36y - 3 = 0$ (hipérbole)

SUGESTÃO:

$d(P, A) = 4d(P, r) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4\left|\dfrac{y+1}{\sqrt{1}}\right|$

desenvolvendo tem-se a resposta.

10. EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE CUJO CENTRO É $O' = (x_o, y_o)$ E CUJOS EIXOS NÃO SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS.

Reitera-se que existindo o termo em xy na equação de uma hipérbole, os eixos da hipérbole são oblíquos aos eixos cartesianos. Fulcrado em teoria já exposta, há necessidade da rotação, além da translação.

Exercício Resolvido

"O pessimista se queixa do vento. O otimista espera que o vento mude. E o realista ajusta as velas."
William Ward

Dada a hipérbole de equação $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$, pede-se o centro, a equação canônica e o gráfico.

RESOLUÇÃO:
a) Ordem das transformações:

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4\,(3)\,(0) \neq 0 \quad \begin{cases} 1)\ \text{translação} \\ 2)\ \text{rotação} \end{cases}$$

b) Translação:
Levando as fórmulas de translação na equação dada:

$$3(x_o + x')^2 - 4(x_o + x')\,(y_o + y') + 8(x_o + x') - 1 = 0 \qquad (1)$$

$\star$ fazendo o coeficiente de $x' = 0$
$6x_o - 4y_o + 8 = 0$

$\star$ fazendo o coeficiente de $y' = 0$
$-4x_o = 0$

Resolvendo o sistema acima obtém-se $x_o = 0$ e $y_o = 2$.
Então o centro da hipérbole é $O' = (0, 2)$.
Substituindo $O' = (0, 2)$ em (1):

$$3x'^2 - 4x'y' - 1 = 0 \qquad (2)$$

c) Rotação (vamos eliminar o termo em $x'y'$ na equação acima):

$$\text{tg}\,2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{3 - 0} = \frac{-4}{3}$$

Para $0^o \leq \theta \leq 90^o$

$$\text{tg}\,\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\theta \cong 63^o)$$

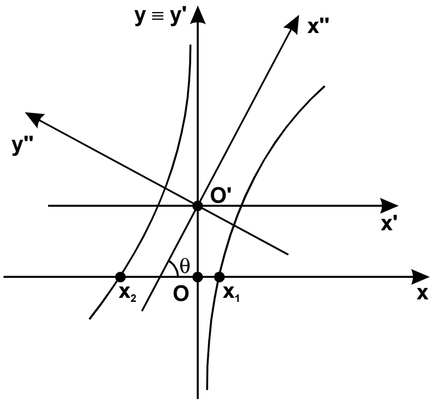
Fórmulas de rotação:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\theta - y''\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'' - 2y'') \\ y' &= x''\,\text{sen}\,\theta + y''\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'' + y'') \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Levando ③ em ② obtém-se a equação da hipérbole:

$x''^2 - 4y''^2 + 1 = 0$ ou na forma canônica: $\dfrac{y''^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{x''^2}{1} = 1$

d) Gráfico:



a) A hipérbole figurada tem $O' = (0, 2)$,

$a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$.

b) Intersecções com os eixos cartesianos.
Na equação dada, fazendo $y = 0$ tem-se a equação $3x^2 + 8x - 1 = 0$ cujas raízes são $x_1 = 0{,}11$ e $x_2 = -2{,}78$ (que são os pontos onde a hipérbole corta o eixo das abscissas). A hipérbole não corta o eixo das ordenadas.

Exercícios

"Nem todos os otimistas são profissionais de sucesso. Mas todos os profissionais de sucesso são otimistas."
Sérgio Silbel Reis, publicitário, citado por Joelmir Beting.

01. Calcular a equação canônica da hipérbole $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$.

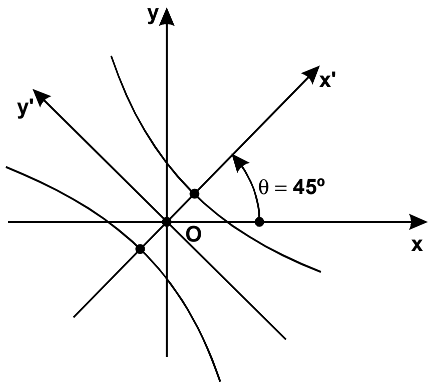
Resp.: $\dfrac{y''^2}{\frac{2}{7}} - \dfrac{x''^2}{\frac{2}{3}} = 1$

02. Dados os focos $F_1 = (-2, -1)$ e $F_2 = (1, 3)$, obter a equação da hipérbole com tais focos e semi-eixo igual a 1.

Resp.: $20x^2 + 48xy - 76x + 24y - 79 = 0$

SUGESTÃO:
Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico da hipérbole. Então:
$D(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.

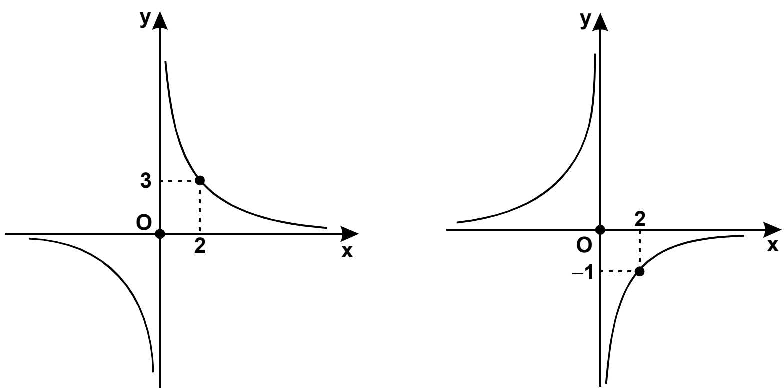
03. Obter a equação canônica e desenhar o gráfico da hipérbole $x^2 + 3xy + y^2 - 2 = 0$.



Resp.: $\dfrac{x'^2}{\frac{4}{5}} - \dfrac{y'^2}{4} = 1 \ (\theta = 45^o)$

A hipérbole intercepta os eixos cartesianos nos pontos $\pm\sqrt{2}$.

04. Uma hipérbole com centro na origem e que possua assíntotas coincidentes com os eixos cartesianos tem equação do tipo xy = k. Achar as equações das hipérboles abaixo representadas.



Resp.: a) $xy = 6$; b) $xy = -2$

05. Dada a hipérbole eqüilátera $x^2 - y^2 = 8$, obter a equação desta mesma hipérbole após efetuada uma rotação de eixos de amplitude $\theta = 45^o$.

Resp.: $x'y' = -4$

SUGESTÃO:

a) Fórmulas de rotação:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos 45^\circ - y'\,\text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y &= x'\,\text{sen}\,45^\circ + y'\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{aligned}\right\} \quad ①$$

b) Levando ① na equação $x^2 - y^2 = 8$ obter-se-á a resposta.

Conclusão: Uma hipérbole eqüilátera de equação $x^2 - y^2 = a^2$ assume a simples e útil forma de $x'y' = k$ quando se efetua uma rotação de eixos de amplitude $\theta = \pm 45^\circ$.

Série B

"The hardest thing to learn in life which bridge to cross and which bridge to burn."

06. Uma hipérbole tem:
a) eixo focal sobre a reta $3x - 4y = 0$;
b) um dos focos em $F = (8, 6)$;
c) $a = 5$ e $c = 10$.
Pede-se a sua equação.

Resp.: $39x^2 + 96xy + 11y^2 = 1875$

P.S.: A denominação equação canônica não merece por parte dos diversos autores consultados um tratamento uniforme. Maioria (e seguimos este posicionamento) opta em denominar equação canônica às formas:

eixo focal $\equiv$ x	eixo focal $\equiv$ y	nome da curva
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	elipse
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	hipérbole
$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$	parábola

Há autores, porém, que só admitem chamar de canônicas às equações da 1.ª coluna da tabela acima (eixo focal $\equiv$ eixo x).

EDUCAR UM FILHO: TRABALHO DE HÉRCULES

Dos doze trabalhos atribuídos a Hércules, o primeiro – matar o leão de Neméia – poderia ser substituído por educar umfilho nos dias de hoje numa cidade grande.

São tantas as vicissitudes, os conflitos e também as alegrias que, ao assumir o papel de pai ou mãe, fecham-se as portas do purgatório. Ao ter um filho, "perde-se o direito de se aposentar do papel de pais". (Tânia Zagury, educadora carioca).

Ser pai e mãe é:

1. Impor limites.

Ter autoridade, sem ser autoritário, para não sucumbir à tirania do filho. A autoridade quando exercida com equilíbrio é uma manifestação de afeto e traz segurança. São pertinentes as palavras de Marilda Lipp, doutora em Psicologia em Campinas:

"O comportamento frouxo não faz com que a criança ame mais os pais. Ao contrário, ela os amará menos, porque começará a perceber que eles não lhe deram estrutura, se sentirá menos segura, menos protegida para a vida. Quando os pais deixam de punir convenientemente os filhos, muitas vezes pensam que estão sendo liberais. Mas a única coisa que estão sendo é irresponsáveis".

2. Transmitir valores.

O filho precisa de um projeto de vida. Desde pequeno é importante o desenvolvimento de valores intrapessoais como ética, cidadania, respeito ao meio ambiente, auto-estima, ensejando adultos flexíveis e versáteis, que saibam resolver problemas, que estejam abertos ao diálogo, às mudanças e às novas tecnologias.

3. Valorizar a escola e o estudo.

Os educadores erram sim! E os pais também! Pequenas divergências entre a Escola e a Família são aceitáveis e, quiçá, salutares, uma vez que educar é conviver com erros e acertos. O filho precisa desenvolver a tolerância, a ponderação, preparando-se para uma vida na qual os conflitos são inevitáveis. Ensinar-lhe que o mundo é diverso,masnãoadverso.

No entanto, na essência, deve haver entendimento entre pais e educadores. O filho é como um pássaro que dá os primeiros vôos. Família e escola são como duas asas, se não tiverem a mesma cadência, não haverá uma boa direção para o nosso querido educando.

4. Dar segurança do seu amor.

Importa mais a qualidade do afeto que a quantidade de tempo disponível ao filho. Nutri-lo afetivamente, pois a presença negligente é danosa ao relacionamento. A paternidade responsável é uma missão e um dever a que não se pode furtar. No entanto, vêem-se filhos órfãos de pais vivos. A vida profissional, apesar de suas elevadas exigências, pode muito bem ser ajustada a uma vida particular equilibrada.

5. Dedicar respeito e cordialidade ao filho.

Tratá-lo-emos com a mesma urbanidade com que tratamos nossos amigos, imprimindo um pouco de nós, pelo diálogo franco e adequado à idade.

6. Permitir que gradativamente o filho resolva sozinho as situações adversas.

A psicóloga Maria Estela E. Amaral Santos é enfática:

"Um filho superprotegido possivelmente será um adulto inseguro, indeciso, dependente, que sempre necessitará de alguém para apoiá-lo nas decisões, nas escolhas, já que a ele foi podado o direito de agir sozinho."

O caminho da evolução pessoal não é plano nem pavimentado. Ao contrário, permeado de pedras e obstáculos, que são as adversidades, as frustrações, as desilusões etc. Da superação das dificuldades advêm alegrias e destarte aprimora-se a auto-confiança para novos embates. Há momentos em que os pais devem ser dispensáveis ao filho. Ou usando uma feliz expressão: "Devemos dar-lhe raízes e dar-lhe asas".

7. Consentir que haja carênciasmateriais.

Cobrir o filho de todas as vontades – brinquedos, roupas, passeios, conforto, etc. – é uma imprevidência. Até quando vão perdurar essas facilidades? Damos disponibilidade prioritariamente aquilo que não tivemos em nossa infância.

Mas cabe a pergunta: estamos lhe dando aquilo que efetivamente tivemos e fomos felizes por isso?

8. Conceder tempo para ser criança – ou adolescente.

Não se deve sobrecarregar o filho com agenda de executivo: esportes, línguas, música, excesso de lições, atividades sociais, etc. Se queimarmos etapas de seu desenvolvimento, ele será um adulto desprovido de equilíbrio emocional. Nosso filho precisa brincar, partilhar, conviver com os amigos, desenvolvendo assim as faculdades psicomotoras e a sociabilização.

9. Desenvolver bons hábitos alimentares e exercícios físicos.

A saúde é um dos principais legados e não se pode descurar. Nosso filho será uma criança e um adulto saudável pela prática regular de esportes e pela ingestão de proteínas, frutas, verduras, legumes e muita água. Não esquecer o sol nos horários recomendados. Tais hábitos promovem o bem-estar, a auto-estima e a boa disposição para a vida.

10. Convencer o filho a assumir tarefas no lar.

Certamente haverá resistência. Mas ele deve ter responsabilidade em casa, assumindo algumas tarefas domésticas, como limpar os tênis, fazer compras, lavar a louça, tirar ou colocar a mesa, etc. É indispensável que tenha hábitos de higiene e mantenha arrumado o seu quarto.

Teria Hércules sido bem sucedido? Em meio a tantas vicissitudes do mundo moderno, você pai, você mãe e eu, chegamos, talvez, a um consenso: educar bem um filho corresponde não a um, mas aos doze trabalhos atribuídos ao nosso herói mitológico. M a s v a l e a p e n a!

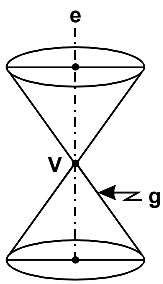
O filho não vem ao mundo acompanhado de um Manual de Instruções e tampouco lhe será concedido um Certificado de Garantia. Isto posto, educar é conviver com erros e acertos. Mais acertos, proporcionalmente ao diálogo e à ternura.

Do Autor

CAPÍTULO 5

Cônicas

1. SEÇÕES CÔNICAS



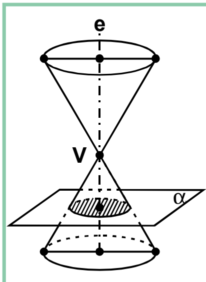
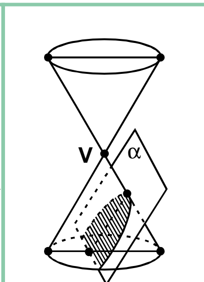
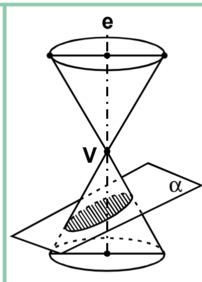
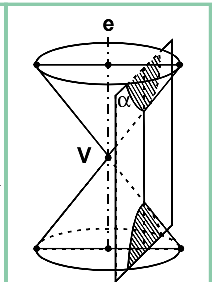
À guisa de apresentação consideremos um cone circular reto de duas folhas, de vértice V e eixo (e). Qualquer reta que passa pelo vértice e está sobre a superfície cônica chama-se geratriz (g).

A palavra cônica (ou seção cônica) procede do fato que tal curva é obtida por meio do corte de um plano α sobre o cone circular reto.

Isto posto, quando o plano α for secante ao cone e não contiver o vértice, ter-se-á como seção cônica uma:

- circunferência
- parábola
- elipse
- hipérbole

Melhor ilustram as figuras abaixo:

			
Circunferência: quando o plano α for perpendicular ao eixo (e) do cone.	**Parábola:** quando o plano α for paralelo a uma geratriz do cone.	**Elipse:** quando o plano α for oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz. O plano corta apenas uma das folhas do cone.	**Hipérbole:** quando o plano α for paralelo ao eixo do cone.

No entanto, se o plano passa pelo vértice V do cone, ter-se-á uma **cônica degenerada**. O assunto em epígrafe merecerá um tratamento específico no item 6 do presente capítulo.

2. EQUAÇÃO COMPLETA DO 2.°GRAU

Chamamos de **cônica** ao conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do 2.º grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação se diz completa quando todos os coeficientes A, B, C, D, E, F são não nulos. Destarte, a equação contém:

- três termos do 2.º grau: Ax^2, Bxy e Cy^2;
- dois termos do 1.º grau: Dx e Ey;
- umtermo independente: F.

Detêmo-nos no termo **Bxy**:

I) Se $B \neq 0$, o eixo focal da cônica é oblíquo aos eixos cartesianos. Para que a equação fique desprovida do termo em xy faz-se mister que se aplique uma rotação de eixos de amplitude θ.

II) Se $B = 0$, a equação do 2.º grau se reduz à forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O eixo focal da cônica é paralelo aos eixos cartesianos. Efetuando uma translação de eixos obtemos o seu centro ou o seu vértice (para as cônicas não degeneradas).

3. DISCRIMINANTE DA EQUAÇÃO DO 2.° GRAU

A equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (*) pode ser identificada como uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme o valor do discriminante $B^2 - 4AC$.

Se	A eq. (*) representa
$B^2 - 4AC = 0$	Uma parábola
$B^2 - 4AC > 0$	Uma hipérbole
$B^2 - 4AC < 0$	Uma elipse

N.B.: Rememoramos que a equação (*) representa uma circunferência se $B = 0$ e $A = C$.

4. ORDEM DAS TRANSFORMAÇÕES

Considere a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Nosso escopo é obter a equação canônica da cônica. Para tanto, deve-se eliminar termos do 1.º grau e/ou termos do 2.º grau e por conseguinte aplicar-se-á **translação** e/ou **rotação** de eixos.

Na prática, com o intuito de tornar menos laboriosos os cálculos, convém adotar a seguinte ordem das transformações.

Se $B^2 - 4AC \neq 0$ (elipse ou hipérbole)	1.º) translação 2.º) rotação
Se $B^2 - 4AC = 0$ (parábola)	1.º) rotação 2.º) translação

5. REVISANDO

Fulcrados nos capítulos anteriores, ao efetuar-se uma **translação** e/ou **rotação** de eixos na equação (*) recai-se nas **equações canônicas** das cônicas:

Parábola	Elipse	Hipérbole
$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
ou	ou	ou
$x^2 = 2py$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

a) **Translação de eixos:** na equação (*) pode-se eliminar os termos do 1.º grau (termos Dx e Ey) pela translação de eixos. Neste caso, os coeficientes A, B e C (dos termos do 2.º grau) não se alteram.

Fórmulas de translação de eixos:

$$\begin{aligned} x &= x_o + x' \\ y &= y_o + y' \end{aligned}$$

b) **Rotação de eixos:** Na equação (*) pode-se suprimir os termos do 2.º grau (termos Ax^2, Bxy e Cy^2) pela rotação de eixos. Neste caso, o termo independente F permanece imutável.

Em particular para o cálculo do ângulo θ que elimina o **termo em xy** émaisprática a aplicação da fórmula:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} \qquad (0^o \le \theta \le 90^o)$$

N.B.: Se $A = C$, então $\theta = 45^o$.

Fórmulas de rotação de eixos:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos

"Em cada coração humano há um tigre, um porco e um rouxinol."
Ambrose G. Bierce (1842-1914), jornalista e escritor norte americano.

01. Dada a equação $x^2 + 3xy + y^2 - 10x - 10y + 5 = 0$ pede-se para:
a) identificar a cônica;
b) achar o centro (ou o vértice);
c) calcular a equação canônica;
d) construir o gráfico.

RESOLUÇÃO:
a) Identificação da cônica: $B^2 - 4AC = (3)^2 - 4(1)(1) = 5 > 0$
A cônica é uma hipérbole.

OBSERVAÇÃO:
Ordem das transformações:

$$\text{Se } B^2 - 4AC = 5 \neq 0 \quad \begin{cases} 1)\ \text{translação} \\ 2)\ \text{rotação} \end{cases}$$

b) Cálculo do centro:
Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

Substituindo na equação dada:

$$(x_o + x')^2 + 3(x_o + x')(y_o + y') + (y_o + y')^2 - 10(x_o + x') - 10(y_o + y') + 5 = 0$$

$\ast$ fazendo o coeficiente de $x' = 0$
$2x_o + 3y_o - 10 = 0$

$\ast$ fazendo coeficiente de $y' = 0$
$3x_o + 2y_o - 10 = 0$

Resolvendo o sistema acima obtém-se $x_o = 2$ e $y_o = 2$.
O centro da cônica é O' = (2, 2)

Como na translação para a nova origem O' = (2, 2) são eliminados os termos do 1.º grau, resulta na equação:

$$x'^2 + 3x'y' + y'^2 + F' = 0, \text{ onde}$$

$$F' = (2)^2 + 3(2)(2) + (2)^2 - 10(2) - 10(2) + 5 = -15$$

Destarte, pela translação a equação dada se transforma numa equação do tipo:

$$x'^2 + 3x'y' + y'^2 - 15 = 0$$

c) Cálculo da equação canônica:

Na equação acima deve-se eliminar o termo em $x'y'$:

Como $A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$

Fórmulas de rotação:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos 45^\circ - y''\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \\ y' &= x''\operatorname{sen} 45^\circ + y''\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Levando (2) em (1):

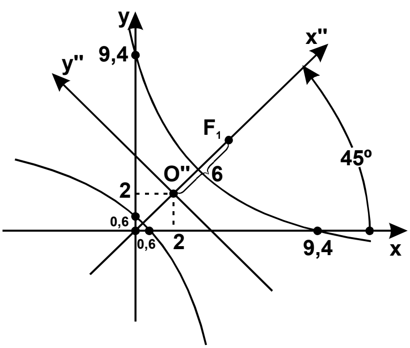
$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'')\right]^2 + 3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'')\right] +$$

$$+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'')\right]^2 - 15 = 0$$

Efetuando os produtos e as somas:

$5x''^2 - y''^2 = 30$ ou

$$\frac{x''^2}{6} - \frac{y''^2}{30} = 1$$ (eq. canônica da hipérbole)



d) Gráfico:

Da equação canônica da hipérbole, infere-se que o eixo focal está sobre o eixo x'' e que

$a = \sqrt{6}$ e $b = \sqrt{30}$.

Cálculo de c:

$c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 30 = 36 \Rightarrow c = 6.$

e) Interseção da hipérbole com os eixos cartesianos:

I) Interseção com o eixo x
Na equação dada faz-se $y = 0$

$x^2 - 10x + 5 = 0$

$$x = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

donde: $x_1 = 0,6$ e $x_2 = 9,4$

II) Interseção com o eixo y
Na equação dada faz-se $x = 0$

$y^2 - 10y + 5 = 0$

$$y = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

donde: $y_1 = 0,6$ e $y_2 = 9,4$

02. Dada a equação $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 101 = 0$, pede-se para:

a) identificar a cônica;
b) achar o centro (ou o vértice);
c) calcular a equação canônica;
d) construir o gráfico.

RESOLUÇÃO:
a) identificação da cônica:

$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(16)(9) = 0$

A cônica é uma parábola.

OBSERVAÇÃO:
Ordem das operações:

$$\text{Se } B^2 - 4AC = 0 \begin{cases} 1) \text{ rotação} \\ 2) \text{ translação} \end{cases}$$

b) rotação dos eixos:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-24}{16 - 9} = \frac{-24}{7}$$

* cálculo da tg θ:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2 \text{ tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta} = \frac{-24}{7}$$

logo: $12 \text{ tg}^2\theta - 7 \text{ tg}\theta - 12 = 0$

Raízes:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{-3}{4}$$

Adotando a solução positiva:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{3} \qquad (\theta \cong 53^{o})$$

⋆ Cálculo da sec θ:

$$\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\sec\theta = \frac{5}{3} \quad \text{(solução positiva)}$$

⋆ Cálculo do cos θ:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

⋆ Cálculo do sen θ:

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$$

⋆ fórmulas de rotação:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3x' - 4y'}{5} \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = \dfrac{4x' + 3y'}{5} \end{cases}$$

⋆ substituindo as fórmulas de rotação na equação dada:

$$16\left(\frac{3x' - 4y'}{5}\right)^2 - 24\left(\frac{3x' - 4y'}{5}\right)\left(\frac{4x' + 3y'}{5}\right) + 9\left(\frac{4x' + 3y'}{5}\right)^2 -$$

$$-38\left(\frac{3x' - 4y'}{5}\right) - 34\left(\frac{4x' + 3y'}{5}\right) + 101 = 0$$

Efetuando-se:
$25y'^2 - 50x' + 10y' + 101 = 0$ ①

c) translação de eixos:

OBSERVAÇÃO:
Para se obter a equação canônica da parábola (tipo $y^2 = 2px$), na equação ① deve-se suprimir o termo em y' e o termo independente.

$\star$ fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x' = x_o + x'' \\ y' = y_o + y'' \end{cases}$$

$\star$ levando as fórmulas de translação na eq. ①:
$25(y_o + y'')^2 - 50(x_o + x'') + 10(y_o + y'') + 101 = 0$ ②
ou
$25y''^2 - 50x'' + (50y_o + 10)y'' + 25y_o{}^2 - 50x_o + 10y_o + 101 = 0$

$\star$ fazendo o coeficiente de $y'' = 0$

$$50y_o + 10 = 0 \Rightarrow y_o = \frac{-1}{5} \quad \text{(sobre o eixo } y'\text{)}$$

$\star$ fazendo o termo independente = 0 e considerando $y_o = \frac{-1}{5}$

$$25\left(\frac{-1}{5}\right)^2 - 50x_o + 10\left(\frac{-1}{5}\right) + 101 = 0 \Rightarrow x_o = 2 \quad \text{(sobre o eixo } x'\text{)}$$

Isto posto, a parábola tem vértice em $V = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$ em relação ao sistema x'Oy'.

d) equação canônica:

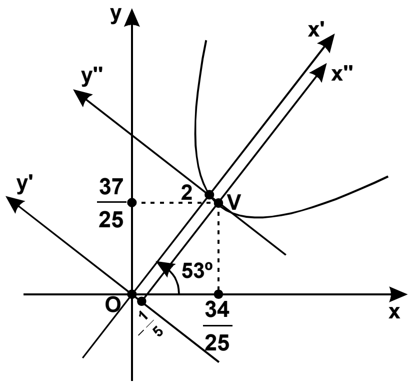
Levando $V = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$ em ②:

$25\,y''^2 - 50x'' = 0$

ou

$\boxed{y''^2 = 2x''}$ (equação canônica)

e) gráfico:



f) interseção com os eixos cartesianos:

I. interseção com o eixo y

Na equação dada faz-se $x = 0$:

$9y^2 - 34y + 101 = 0$

Não há raízes reais, portanto a parábola não corta o eixo.

II. Interseção com o eixo x

Na equação dada faz-se $y = 0$:

$16x^2 - 38x + 101 = 0$, equação do 2.º grau desprovida de raízes reais e conseqüentemente a parábola não corta o eixo x.

g) cálculo do vértice $V = \left(2, -\frac{1}{5}\right)$ emrelação ao sistema xOy:

Fórmulas de rotação:

$$x = \frac{3x' - 4y'}{5} = \frac{3\,(2) - 4\left(-\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{34}{25}$$

$$y = \frac{4x' + 3y'}{5} = \frac{4\,(2) + 3\left(-\frac{1}{5}\right)}{5} = \frac{37}{25}$$

Então:

$$V = \left(\frac{34}{25}, \frac{37}{25}\right)$$

Exercícios

"Não há coisa mais fácil que enganar um homem de bem: muito crê quem nunca mente e confia muito quem nunca engana."
Baltasar Gracián y Morales (1601-1658), escritor espanhol.

Dada a equação da cônica, pede-se para:
a) identificar a cônica;
b) achar o centro ou o vértice;
c) calcular a equação canônica;
d) construir o gráfico;
e) pontos de interseção com os eixos cartesianos.

01. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$
Resp.:

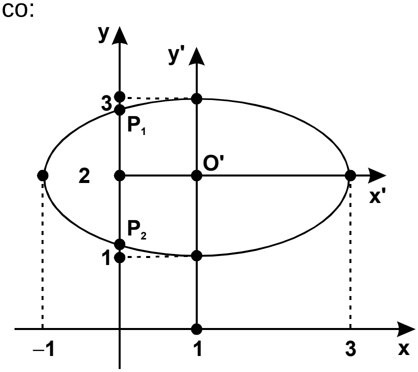
a) elipse

OBSERVAÇÃO:
Como não há termo em xy na equação dada, basta a translação.

b) O' = (1,2)

c) $\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$

d) gráfico:



e) pontos de interseção com o eixo x: não há.
Pontos de interseção com o eixo y:

$$P_1 = \left(0, \frac{4+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } P_2 = \left(0, \frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)$$

02. $x^2 - 4y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$

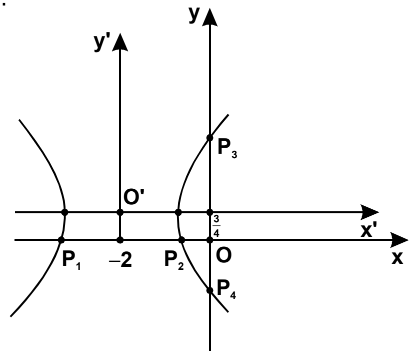
Resp.:

a) hipérbole (não há termo em xy : basta a translação)

b) $O' = \left(-2, \dfrac{3}{4}\right)$

c) $\dfrac{x'^2}{\frac{3}{4}} - \dfrac{y'^2}{\frac{3}{16}} = 1$

d) gráfico:



e) pontos de interseção com o eixo x:

$P_1 = (-2 - \sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (-2 + \sqrt{2}, 0)$

pontos de interseção com o eixo y:

$P_3 = \left(0, \dfrac{3 + \sqrt{13}}{4}\right)$ e $P_4 = \left(0, \dfrac{3 - \sqrt{13}}{4}\right)$

03. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 14x - 20y - 19 = 0$

Resp.:

a) elipse

b) $O' = (1, 1)$

SUGESTÃO:

Aplica-se as fórmulas de translação na equação dada e impõe-se que sejam nulos os coeficientes de x' e y'. Destarte, a equação dada, após uma translação de eixos, reduz-se a:

$5x'^2 + 4x'y' + 8y'^2 - 36 = 0$ (*)

c) $\dfrac{x''^2}{4} + \dfrac{y''^2}{9} = 1$

SUGESTÃO:
Para se eliminar o termo em xy, faz-se mister calcular o ângulo θ:

$$tg2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{3} \Rightarrow tg\theta = 2\ (0^o \leq \theta \leq 90^o)\ e$$

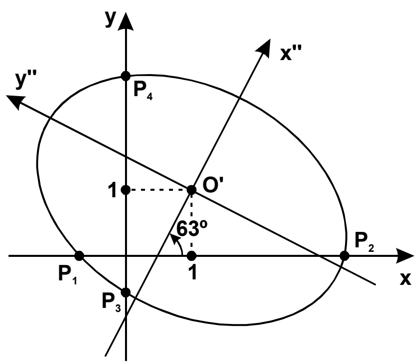
$$sen\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\ e\ cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (\theta \cong 63^o)$$

Fórmulas de rotação :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\theta - y''\,sen\,\theta = \frac{x''-2y''}{\sqrt{5}} \\ y' &= x''\,sen\,\theta + y''\cos\theta = \frac{2x''+y''}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}(**)$$

Levando-se (**) em (*) obtém-se a equação canônica.

d) gráfico: a equação canônica fornece a = 3 e b = 2 (eixo focal sobre o eixo y").



e) **pontos de interseção com o eixo x:**
fazendo y = 0 na equação dada:
$5x^2 - 14x - 19 = 0$

$$\text{raízes}\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3{,}8 \end{cases}$$

Então $P_1 = (-1; 0)$ e $P_2 = (3{,}8; 0)$

pontos de interseção com o eixo y:
fazendo $x = 0$ na equação dada:
$8y^2 - 20y - 19 = 0$

raízes $\begin{cases} y_1 = -0{,}4 \\ y_2 = \ \ 2{,}9 \end{cases}$

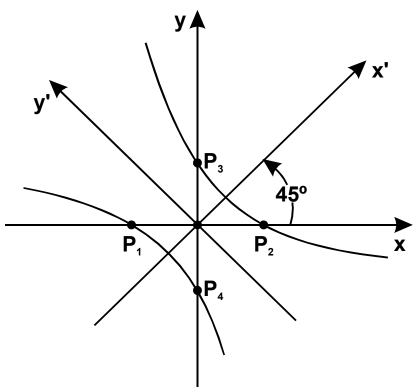
Então $P_3 = (0; -0{,}4)$ e $P_4 = (0; 2{,}9)$

04. $x^2 + 4xy + y^2 = 16$
Resp.:
a) hipérbole
b) $O' = (0,0)$

OBSERVAÇÃO:
Cálculo do ângulo de rotação para se eliminar o termo emxy:
Com $A = C \Rightarrow \theta = 45^o$

c) $\dfrac{x''^2}{\frac{16}{3}} - \dfrac{y''^2}{16} = 1$

d) gráfico:



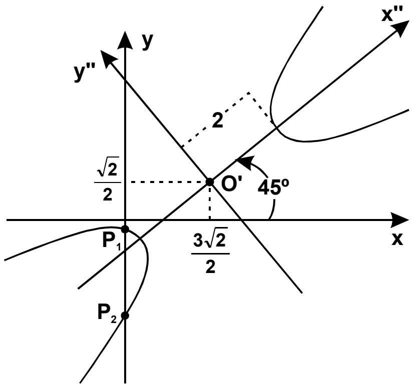
e) **pontos de interseção com o eixo x:**
$P_1 = (-2, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$
pontos de interseção com o eixo y:
$P_3 = (0, 2)$ e $P_4 = (0, -2)$

05. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y + 8 = 0$
Resp.:
a) hipérbole

b) $O' = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\theta = 45^o$

c) $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{1} = 1$

d) gráfico: a equação canônica fornece $a = 2$ e $b = 1$.



e) pontos de interseção com o eixo y:

$$P_1 = \left(\frac{-6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{3}, 0\right) \text{ e } P_2 = \left(\frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

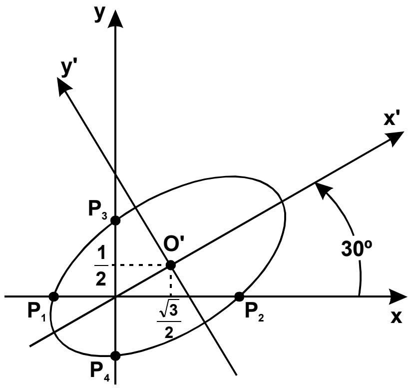
pontos de interseção com o eixo x: não há.

06. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y - 12 = 0$
Resp.:
a) elipse

b) $O' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\theta = 30^o$

c) $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} = 1$

d) gráfico: obtém-se da equação canônica $a = 2$ e $b = 1$.



e) **pontos de interseção com o eixo x:**

$$P_1 = \left(\frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{7}, 0 \right) \text{ e } P_2 = \left(\frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{7}, 0 \right)$$

pontos de interseção com o eixo y:

$$P_3 = \left(0, \frac{2 + 4\sqrt{10}}{13} \right) \text{ e } P_4 = \left(0, \frac{2 - 4\sqrt{10}}{13} \right)$$

07. $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$
Resp.:
a) elipse
b) não havendo na equação dada termos do 1.º grau, a elipse tem o centro na origem $O = (0, 0)$.

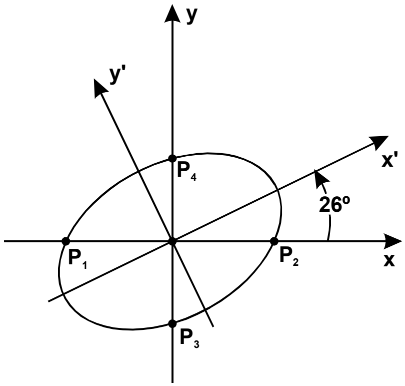
Rotação:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} (\theta \cong 26^\circ)$$

c) equação canônica : $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

d) gráfico: da equação canônica: $a = 3$ e $b = 2$



e) a elipse intercepta o eixo x nos pontos $P_1 = \left(-\dfrac{6}{\sqrt{5}}, 0\right)$ e

$P_2 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}, 0\right)$ e o eixo y nos pontos $P_3 = \left(0, -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e

$P_4 = \left(0, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

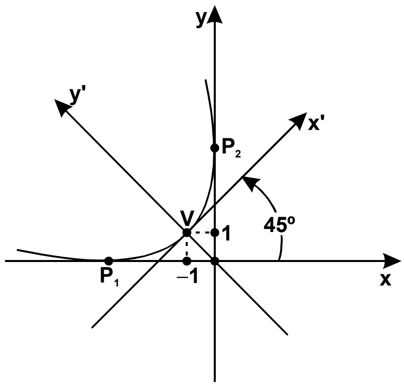
08. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$
Resp.:
a) parábola

SUGESTÃO:
Ordem das operações $B^2 - 4AC = 0 \begin{cases} \text{1) rotação} \\ \text{2) translação} \end{cases}$

Rotação:
Como $A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$

b) equação canônica: $x' = 4\sqrt{2}y'$
c) coordenadas do vértice no sistema xOy: $V = (-1, 1)$

d) gráfico:



e) a parábola tangencia o eixo x no ponto $P_1 = (-4, 0)$ e o eixo y no ponto $P_2 = (0, 4)$.

6. CÔNICAS DEGENERADAS

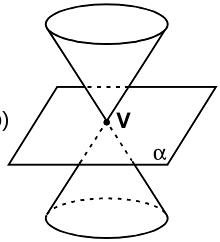
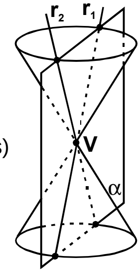
a) Apresentação:

Reiteramos que quando o plano intercepta o cone e não passa pelo seu vértice, obtém-se as cônicas regulares (ou não degeneradas):

- circunferência
- elipse
- parábola
- hipérbole

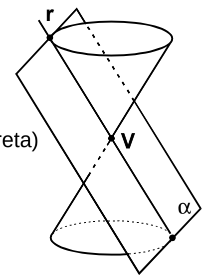
Apõem-se, as **cônicas degeneradas** que são obtidas quando em particular o plano corta o cone em seu vértice V.

Destarte, são cônicas degeneradas:

- **O PONTO:** quando o plano α tiver em comum com o cone apenas o vértice V. Trata-se de uma elipse degenerada.	- **UM PAR DE RETAS CONCORRENTES:** quando o plano α contiver o vértice e duas geratrizes do cone. É uma hipérbole degenerada.
(um ponto) 	(r_1 e r_2: um par de retas concorrentes) 

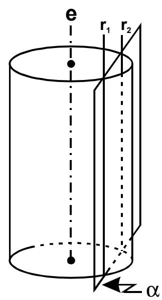
- **UMA RETA:** quando o plano contiver o vértice e uma geratriz do cone. O plano α tangencia o cone. Figura-se como parábola degenerada.

(r: uma reta)



- **UM PAR DE RETAS PARALELAS:** num caso particular obter-se-á duas retas paralelas quando da interseção de uma **superfície cilíndrica circular** (considerada uma **superfície cônica de vértice impróprio**) por um plano α paralelo ao seu eixo.

(r_1 e r_2: retas paralelas)



OBSERVAÇÃO:
Se o plano α tangenciar a superfície cilíndrica obter-se-á uma reta.

b) Reconhecimento de uma cônica degenerada:
Dada a equação completa do 2.º grau
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

$$\text{Seja } \Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

Se:
I. $\Delta \neq 0$ **ter-se-á uma cônica regular**
(circunferência, elipse, parábola, hipérbole)

II. $\Delta = 0$ **ter-se-á uma cônica degenerada**
(um ponto, um par de retas concorrentes, uma reta ou um par de retas paralelas)

Fulcrados na presente exposição, enfatize-se antes de identificar se uma cônica é uma elipse, parábola ou hipérbole através do discriminante $B^2 - 4AC$, faz-semister o cálculo do determinante Δ.

Emresumo:

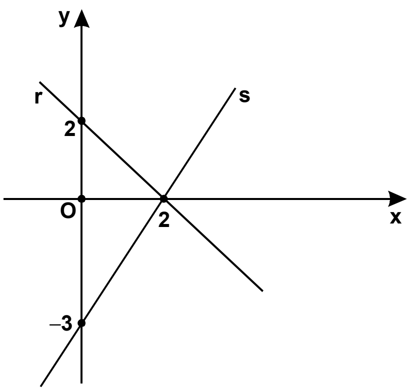
Se $B^2 - 4AC = 0$	$\begin{cases} \Delta \neq 0 \to \text{parábola} \\ \Delta = 0 \to \text{uma reta ou um par} \\ \qquad\quad \text{de retas paralelas.} \end{cases}$
Se $B^2 - 4AC > 0$	$\begin{cases} \Delta \neq 0 \to \text{hipérbole} \\ \Delta = 0 \to \text{um par de retas concorrentes.} \end{cases}$
Se $B^2 - 4AC < 0$	$\begin{cases} \Delta \neq 0 \to \text{elipse} \\ \Delta = 0 \to \text{um ponto} \end{cases}$

Exercícios Resolvidos

"O único pecado é a mediocridade."
Marta Grayham

1. Considere as retas abaixo figuradas:

$$\begin{cases} r: \quad x + y - 2 = 0 \\ s: 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$



Fazendo o produto das duas retas:

$(x + y - 2)\,(3x - 2y - 6) = 0$

Efetuando-se:

$3x^2 + xy - 2y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$ (*)

Esta equação completa do 2.º grau é uma cônica, dita degenerada, e ipso facto o seu determinante Δ deve ser nulo.

De fato, a equação (*) fornece os coeficientes $A = 3, B = 1, C = -2, D = -12, E = -2$ e $F = 12$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -12 \\ 1 & -4 & -2 \\ -12 & -2 & 24 \end{vmatrix} = 0$$

Reciprocamente, dada a equação

$3x^2 + xy - 2y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$ (*) pede-se para identificar a cônica e calcular as equações das retas.

RESOLUÇÃO:

Uma vez que $\Delta = 0$ e $B^2 - 4AC = 1 - 4(3)(-2) > 0$ corrobora-se que a equação (*) representa um par de retas concorrentes.

Cálculo das equações das retas concorrentes:

Ordenando a equação (*) segundo a variável x (poder-se-ia optar pela variável y)

$3x^2 + (y - 12)x - 2y^2 - 2y + 12 = 0$

Aplicando-se a fórmula de Bháskara (geômetra hindu, séc. XII):

$$x = \frac{-(y-12) \pm \sqrt{(y-12)^2 - 4\,.\,3\,(-2y^2 - 12y + 12)}}{6}$$

ou

$$x = \frac{-(y-12) \pm 5y}{6}$$

Adotando o sinal negativo e positivo obtém-se respectivamente:

$$\begin{aligned} r&:\ \ x + \ \ y - 2 = 0 \\ s&: 3x - 2y - 6 = 0 \end{aligned} \quad \text{(Resp.)}$$

2. Identificar a cônica $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:

a) Cálculo do determinante Δ:

A equação da cônica fornece A = 1, B = 2, C = 1, D = –2, E = –2 e F = 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

b) Cálculo do discriminante:

$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$

A cônica representa um reta ou um par de retas paralelas.

c) Cálculo da(s) equação(ões) da(s) reta(s):

Ordenando a equação segundo a variável x (ou poder-se-ia optar por y): $x^2 + (2y - 2)x + y^2 - 2y + 1 = 0$

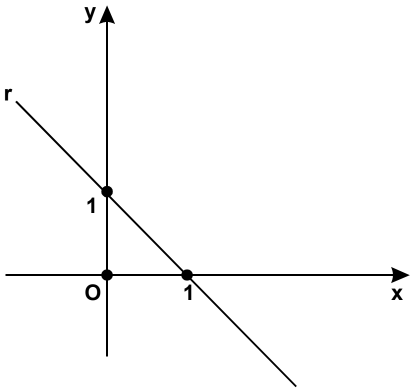
Aplicando-se a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-(2y-2) \pm \sqrt{(2y-2)^2 - 4\,.\,1(y^2 - 2y + 1)}}{2}$$

ou

$$x = \frac{-(2y-2) \pm 0}{2} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{r: x + y - 1 = 0} \qquad \text{(Resp.)}$$

d) gráfico:



N.B.: Uma vez que se efetue o produto:

$(x + y - 1)\,(x + y - 1) = 0$

obter-se-á a equação da cônica dada:

$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

3. Identificar a cônica $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 2 = 0$.
RESOLUÇÃO:
a) Cálculo do determinante Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

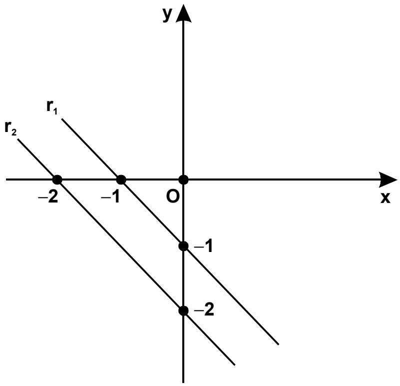
b) Cálculo do discriminante:
$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$

A cônica representa uma reta ou umpar de retas paralelas.

c) Cálculo da(s) equação(ões) da(s) reta(s)
Ordenando a equação da cônica dada segundo uma das variáveis e aplicando a fórmula de Bháskara obtém-se duas retas paralelas:

$$\boxed{\begin{array}{l} r_1: x + y + 1 = 0 \\ r_2: x + y + 2 = 0 \end{array}} \qquad \text{(Resp.)}$$

d) gráfico



4. Identificar a cônica $2x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$
RESOLUÇÃO:
a) Cálculo do determinante Δ:
A equação da cônica fornece A = 2, B = 2, C = 1, D = 8, E = 6 e F = 10.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 0$$

b) Cálculo do discriminante
$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(2)(1) < 0$
A cônica representa umponto.

c) Cálculo das coordenadas do ponto:
Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_O + x' \\ y = y_O + y' \end{cases}$$

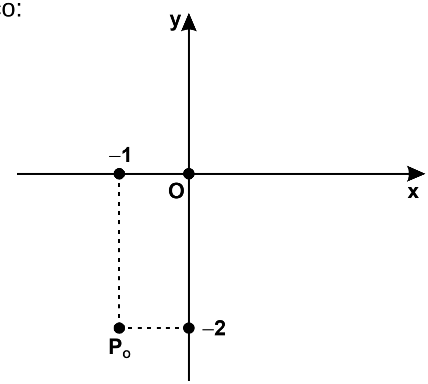
Substituindo as fórmulas de translação na equação da cônica:
$2(x_o + x')^2 + 2(x_o + x')(y_o + y') + (y_o + y')^2 + 8(x_o + x') + 6(y_o + y') + 10 = 0$

$\star$ Fazendo o coeficiente de $x' = 0$
$4x_o + 2y_o + 8 = 0$

$\star$ Fazendo o coeficiente de $y' = 0$
$2x_o + 2y_o + 6 = 0$

O sistema acima fornece $x_o = -1$ e $y_o = -2$. Isto posto, o ponto $P_o = (-1, -2)$ representa a cônica dada.

d) Gráfico:



Exercícios

A mágoa que tens dentro de ti é um fardo pesado e que somente a ti cabe a tarefa de carregá-lo. Vale a pena?

Identificar as cônicas abaixo transcritas e quando degeneradas pede-se a(s) equação(ões) resultante(s).

01. $2x^2 + xy - y^2 + 7x + y + 6 = 0$

Resp.: um par de retas interceptantes: $x + y + 2 = 0$ e $2x - y + 3 = 0$

02. $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 10x - 6y + 1 = 0$

Resp.: uma reta: $5x - 3y + 1 = 0$

03. $3x^2 + 3y^2 - 10xy - 2x - 14y - 13 = 0$

Resp.: hipérbole.

04. $15x^2 + 20xy + 7x - 4y - 2 = 0$

Resp.: um par de retas concorrentes: $5x - 1 = 0$ e $3x + 4y + 2 = 0$

05. $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 68x - 74y + 41 = 0$

Resp.: parábola

06. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$

Resp.: um ponto $P = (-1, -5)$

07. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + x + 3y - 3 = 0$

Resp.: uma elipse.

08. $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y + 2 = 0$

Resp.: duas retas paralelas:
$2x + y + 1 = 0$ e $2x + y + 2 = 0$

09. Pede-se o valor de k para que a equação $x^2 + kxy + 2y^2 - x - 2 = 0$ represente duas retas concorrentes.

Resp.: $k = \pm 3$

10. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$

Resp.: um ponto $P_o = (3, -3)$

11. $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 4y + 20 = 0$

Resp.: um ponto $P_o = (4, 6)$

HUMOR

Após quase uma dezena de bons livros publicados na área da Matemática, encontramos em Curitiba o amigo Nilson J. Machado, no lançamento do belíssimo livro de poesia – Plantares.

Sentindo a nossa surpresa pela mudança de área, devolveu:

- Meu caro, depois dos 50 anos, da cintura para cima, poesia; da cintura para baixo, só prosa.

VOCÊ PODE ME VENDER UMA HORA DO SEU TEMPO?

Todo dia, o mesmo ritual: o pai extenuado chega à noite em casa, após um duro dia de trabalho. Seu filho, com os olhos cheios de admiração, abraça-o, trocam algumas palavras sobre a escola e se despedem com beijos na face, o boa-noite e o durma-com-os-anjos.

Certo dia, com a voz tímida, o garoto perguntou ao pai que acaba de chegar:

– Papai, quanto você ganha por hora?

O pai, surpreso, desconversa. O filho insiste:

– Papai, quanto você ganha por hora?

O pai se aflige com a pergunta. Passado algum tempo, dirige-se ao quarto do filho e o encontra deitado.

– Filho, você está dormindo?

– Não, papai – responde o garoto.

– Querido, eu ganho doze reais por hora.

O filho levanta-se da cama, abre a gaveta e conta doze notas de um real. Abraça o pai com ternura e, com os olhos cheios de lágrimas, pergunta:

– Você pode me vender uma hora do seu tempo?

Esta conhecida, singela – e para alguns piegas – história enseja a meditação sobre a disponibilidade de tempo para os filhos.

Mais cedo do que se pensa, os filhos compreenderão a árdua luta pela sobrevivência profissional; o necessário cumprimento de suas obrigações no importante papel de provedores; e que a dedicação ao trabalho é fator de realização profissional, modelo e exemplo de responsabilidade.

Busca-se, evidentemente, a prevalência do bom senso, da medida, do equilíbrio entre a vida profissional e a vida social e familiar.

Nesse contexto, importa mais a qualidade do afeto do que a quantidade de tempo disponível aos filhos.

O abraço afetuoso, o beijo estalado, a imposição de limites, o diálogo objetivo e adequado à idade, o acompanhamento do rendimento escolar, a presença nos momentos de lazer ou doença e a transmissão, pela palavra e pelo exemplo, de valores éticos e de cidadania podem ser praticados diariamente – com ênfase nos finais de semana – por pais que trabalhem cerca de oito horas por dia.

Gutemberg B. Macedo, em seu excelente livro **Fui demitido: e agora?** (Ed.Maltese) faz seu depoimento:

"Conheço executivos bem-sucedidos que mantêm uma vida balanceada. São bons profissionalmente e, até prova em contrário, bons maridos, bons pais, bons líderes e bons cidadãos. O segredo? Saber dividir, compartimentar esses diferentes papéis. É preciso parar para refletir com profundidade. A vida é uma benção de Deus. Desequilibrá-la é destruí-la. E destruí-la é uma espécie de estupro da própria divindade. Se Ele descansou quem afinal você pensa que é para querer ir além?"

Segurança do amor dos pais: este é o fulcro do relacionamento. A paternidade responsável é uma missão e um dever a que não se pode furtar. No entanto, vêem-se nas escolas filhos órfãos de pais vivos. E, na maioria das vezes, falta de tempo é apenas uma desculpa para sua omissão.

A vida profissional, apesar de suas elevadas exigências, pode muito bem ser ajustada a uma vida particular equilibrada. É uma questão de ênfase e dosagem do tempo.

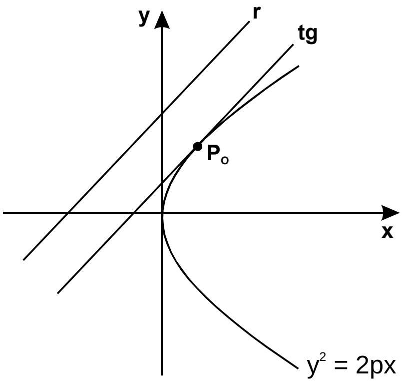
Do autor

CAPÍTULO 6

Equação da Tangente a uma Cônica

Para se obter a tangente a uma cônica, escolhemos a parábola para efeito de exposição e prática. Raciocínio análogo pode ser adotado para a elipse, para a hipérbole e para a circunferência. Há três tipos de problemas:

1.º PROBLEMA: A TANGENTE É PARALELA A UMA RETA DADA



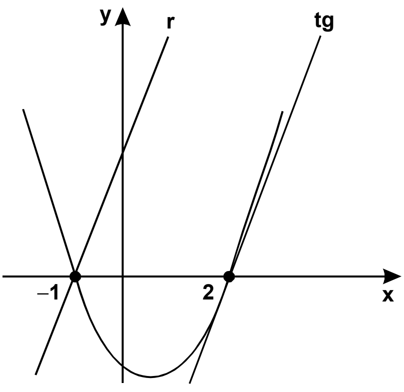
Pede-se para calcular a equação da tangente à parábola $y^2 = 2px$ e que seja paralela à reta r: $y = mx + n$.

A equação da tangente é $y = mx + k$, onde **k** é a constante a ser determinada. Substitui-se $y = mx + k$ na equação da parábola, recaindo-se numa equação do 2.º grau.

Para que a reta e a parábola tenham apenas um ponto em comum, a equação do 2.º grau deve ter apenas uma solução. Destarte, impõe-se que o discriminante (Δ) da equação do 2.º grau seja nulo, obtendo-se **k**.

Exemplo:

Calcular a reta tangente à parábola $y = x^2 - x - 2$ e que seja paralela à reta r: $3x - y + 3 = 0$.



RESOLUÇÃO:

a) equação reduzida de r: $y = 3x + 3$

b) equação da tangente: $y = 3x + k$ ①

c) levando ① na equação da parábola:

$(3x + k) = x^2 - x - 2$

desenvolvendo e ordenando:

$x^2 - 4x - 2 - k = 0$

d) impondo a condição de tangência:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$(-4)^2 - 4(1)(-2 - k) = 0 \Rightarrow k = -6$

e) resposta: tg: $y = 3x - 6$

Exercícios

"Todo o povo precisa de liderança. Ainda que não acredite nela."
Ernest Junger, filósofo alemão.

01. Equação da tangente à parábola $y^2 - 16x = 0$ e paralela à reta $2x - y + 6 = 0$.

Resp.: $2x - y + 2 = 0$

02. Obter as equações das tangentes à elipse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ e que sejam paralelas à reta $y = x$.

Resp.: $y = x \pm \sqrt{5}$

03. Estabelecer a condição para que a reta $y = ax + b$ seja tangente à parábola $y^2 = 2px$.

Resp.: $p = 2ab$

04. Achar a condição para que a reta $y = mx + n$ tangencie a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Resp.: $a^2m^2 = n^2 - b^2$

05. Pede-se a equação da parábola $y^2 = 2px$ e que seja tangente à reta $y = -x - 1$.

Resp.: $y^2 = 4x$

SUGESTÃO:
a) Substituindo $y = -x - 1$ em $y^2 = 2px \Rightarrow (-x-1)^2 = 2px$;
b) Desenvolvendo a equação acima e impondo $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ obtém-se $p = 2$.

06. Determinar os valores do coeficiente angular **m** para que a reta $y = mx$ tangencie a curva $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2 = 0$.

Resp.: $m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

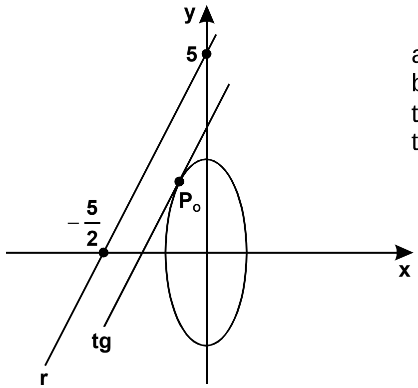
07. Calcular as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$, paralelas à reta $3x - 4y = 0$.

Resp.: $3x - 4y - 35 = 0$ e $3x - 4y + 15 = 0$

08. Dada a elipse $5x^2 + y^2 = 5$, determinar o ponto mais próximo da elipse emrelação à reta $y = 2x + 5$.

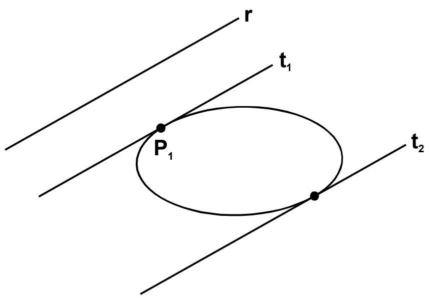
Resp.: $P_O = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

SUGESTÃO:



a) Calcule a tangente (tg);
b) O ponto procurado P_O é obtido pela interseção da reta tangente com a elipse dada.

09. Dada a reta r: $2x - 3y + 5 = 0$ e a elipse $8x^2 + 18y^2 = 144$, conforme figura, pede-se:



a) as equações das tangentes (t_1 e t_2) à elipse e paralelas à reta r;
b) o ponto de tangência P_1.

Resp.:
a) t_1: $2x - 3y + 12 = 0$
t_2: $2x - 3y - 12 = 0$
b) $P_1 = (-3, 2)$

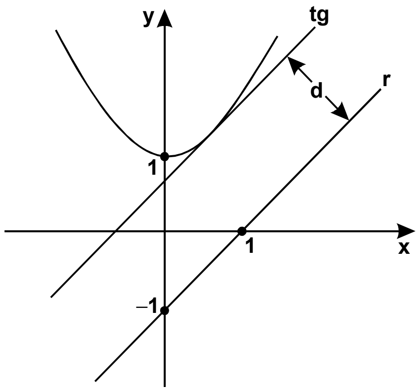
10. Calcular as coordenadas do ponto da parábola $y^2 = 8x$ mais próximo da reta $x - y + 10 = 0$.

Resp.: $P = (2, 4)$

11. Calcular a menor distância da reta r: $x - y - 1 = 0$ à parábola $y = x^2 + 1$.

Resp.: $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

SUGESTÃO:



a) Calcule a tg paralela a r:

$$x - y + \frac{3}{4} = 0$$

b) Adote um ponto $P_O = (x_O, y_O)$ qualquer de r. A resposta será a distância do ponto P_O à reta tangente.

Fórmula:

$$d(P_O, tg) = \frac{|ax_O + by_O + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

12. Determinar os pontos da elipse $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 - 2 = 0$ tais que as tangentes sejam paralelas ao eixo x.

Resp.: $(-\sqrt{2}, 2)$ e $(\sqrt{2}, -2)$

SUGESTÃO:

As retas paralelas ao eixo y têm equação y = k. Esta deve ser substituída na equação da elipse e impõe-se $\Delta = 0$.

13. Calcular as equações das tangentes à elipse $13x^2 + 3y^2 - 26x + 24y + 22 = 0$ e que sejam paralelas à reta $2x - y + 3 = 0$.

Resp.: $2x - y - 1 = 0$ e $2x - y - 11 = 0$

14. Calcular os pontos da cônica $x^2 - 2xy + y + 1 = 0$ em que as tangentes são paralelas à reta $2x + y - 3 = 0$.

Resp.: $P_1 = (0, -1)$ e $P_2 = (1, 2)$

Série B

"Quando um homem não pode ser grande, começa a diminuir os outros."
Marquês de Maricá (1773-1848), político e moralista fluminense.

15. Determinar a equação da elipse com centro na origem e eixo focal sobre o eixo x, tal que o eixo maior seja 4 e tangencie a reta $y = x - 1$.

Resp.: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

SUGESTÃO:
a) Equação da elipse: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Levando-se y = x – 1 na equação da elipse chega-se a uma equação do 2.º grau em x, na qual impõe-se $\Delta = 0$. Resulta $b^2 = 3$.

16. Pede-se a equação canônica da hipérbole que passa pelo ponto A = (3, 1) e que seja tangente à reta x – 2y – 1 = 0 (o eixo focal coincide com o eixo x e o centro com a origem do Sistema Cartesiano.

Resp.: $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

SUGESTÃO:
a) equação da hipérbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b) $A = (3,1) \in$ hipérbole: $\dfrac{9}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \dfrac{9b^2}{b^2+1}$

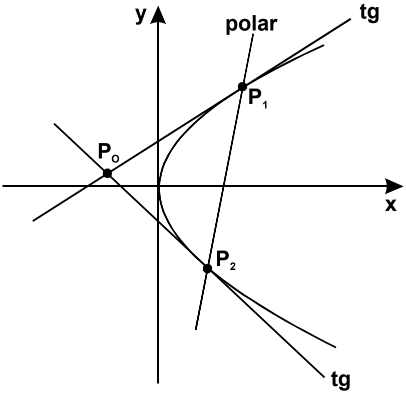
c) na equação da hipérbole substitui-se $x = 2y + 1$ e $a^2 = \dfrac{9b^2}{b^2+1}$.

Efetuando-se recai-se numa equação do 2.º grau onde o discriminante (Δ) deve ser nulo.

17. Uma elipse passa pelo ponto $P = (2\sqrt{2}, 1)$ e é tangente à reta $\sqrt{2}x + y - 3\sqrt{3} = 0$. Achar a equação da elipse sabendo que seus eixos coincidem com os eixos coordenados e eixo focal $\equiv$ x.

Resp.: $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

2.º PROBLEMA: EQUAÇÃO DA TANGENTE POR UM PONTO EXTERNO À PARÁBOLA.



Dados:

$$\begin{cases} P_O = (x_O, y_O) \\ y^2 = 2px \text{ (parábola)} \end{cases}$$

A equação da tangente tem a forma:

$y - y_O = m(x - x_O)$ ou

$y = y_O + m(x - x_O)$ ①

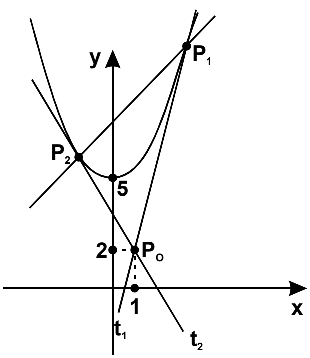
Levando-se ① na equação da parábola recai-se numa equação do 2.º grau. Nesta, impondo-se que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja nulo, obtém-se o(s) coeficiente(s) angular(es) **m**.

Os pontos P_1 e P_2 são os pontos de contato das tangentes com a parábola. A reta P_1P_2 é cognominada **reta polar de P_O** em relação à parábola.

Exercícios Resolvidos

"Se deres as costas à luz, nada mais verás senão a tua própria sombra."
Zálkind Piategórsky

01. Obter as equações das tangentes à parábola $x^2 - y + 5 = 0$ pelo ponto $P_O = (1, 2)$.



a) Equação da tangente:
$y - y_O = m(x - x_O)$
$y - 2 = m(x - 1)$
ou
$y = m(x - 1) + 2$ ①

b) Substituindo-se ① na equação da parábola:
$x^2 - [m(x - 1) + 2] + 5 = 0$
desenvolvendo e ordenando:
$x^2 - mx + m + 3 = 0$

c) Impondo $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
$(-m)^2 - 4.1.(m + 3) = 0$
$m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 6$ ou $m = -2$

d) Resposta:
Levando m = 6 em ①:
$y = 6x - 4 \ \ (t_1)$
Substituindo-se m = –2 em ①:
$y = -2x + 4 \ (t_2)$

02. No exercício precedente, pede-se para calcular a equação da reta P_1P_2 (reta polar de P_O em relação à parábola).

a) Cálculo de P_1 e P_2:
Substituindo-se a equação de t_1 na equação da parábola:
$6x - 4 = x^2 + 5$
$x^2 - 6x + 9 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 3 \ \Rightarrow \ P_1 = (3, 14)$

Levando a equação de t_2 na equação da parábola:
$-2x + 4 = x^2 + 5$
$x^2 + 2x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = -1 \ \Rightarrow \ P_2 = (-1, 6)$

b) Equação da polar:

$$\text{Reta } P_1P_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 14 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{2x - y + 8 = 0}$ (Resp.)

Exercícios

"Os que nada fazem supõem-se capazes de tudo fazer"
Spencer Tracy (1900-1967), ator norte-americano.

01. Calcular as equações das retas que passam pelo ponto A = (7, 2) e sejam tangentes à elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Resp.: y = 2 e 7x – 10y – 29 = 0

02. Dada a equação da elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ e um ponto exterior P = (0, 4), calcular as equações das tangentes desde o ponto P à elipse.

Resp.: $y = \pm\dfrac{2}{3}x + 4$

03. Dada a hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ e o ponto P = (0, 6), obter:

a) as equações das tangentes à hipérbole que passam pelo ponto (0, 6);
b) os pontos de contato das tangentes com a hipérbole;
c) equação da reta polar.

Resp.: a) $y = \pm 3\sqrt{2}x + 6$
b) $(\pm 2\sqrt{2}, -6)$
c) $y + 6 = 0$

04. Calcular as equações das retas que passam pelo ponto $P_O = (1, 0)$ e são tangentes à parábola de equação $x = y^2 - 6y + 10$.

Resp.: $y = \left(\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}\right)x + 2$

Série B

"Pior que o governo dos maus é o silêncio dos bons."
Martin Luther King (1929-1968), religioso norte-americano.

05. Pelo ponto $P_O = (1, 4)$ são traçadas as tangentes à elipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Determinar os pontos de contato das tangentes com a elipse.

Resp.: $P_1 = (4, 1)$ e $P_2 = \left(\frac{46}{13}, \frac{19}{13}\right)$

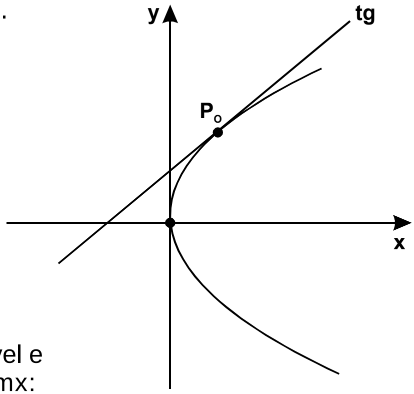
06. Pelo ponto P = (8, 3) obter as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Resp.: $y - 3 = 0$ e $15x - 8y - 96 = 0$

SUGESTÃO:
a) Equações das tangentes:
$y = 3 + m(x - 8)$
b) Substituem-se as equações das tangentes na equação da circunferência e faz-se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, obtendo-se $m = 0$ e $m = \frac{15}{8}$.

3.º PROBLEMA: EQUAÇÃO DA TANGENTE EM UM PONTO $P_o = (x_o, y_o)$ PERTENCENTE À PARÁBOLA.

Vamos determinar a equação da tangente à parábola $y^2 = 2px$ em um ponto $P_o = (x_o, y_o)$ pertencente à parábola. A equação da tangente procurada é do tipo $y - y_o = m(x - x_o)$.



DEDUÇÃO
Sejam:

$$\begin{cases} y^2 = 2px & ① \\ y = y_o + m(x - x_o) & ② \end{cases}$$

Levando ② em ①:

$$[y_o + m(x - x_o)]^2 = 2px$$

Efetuando o produto notável e ordenando a equação do 2.º grau em x:

$$m^2x^2 + (2my_o - 2m^2x_o - 2p)x + y_o^2 - 2mx_oy_o + m^2x_o^2 = 0$$

Pela condição de tangência o discriminante deve anular-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(2my_o - 2m^2x_o - 2p)^2 - 4m^2(y_o^2 - 2mx_oy_o + m^2x_o^2) = 0$$

Desenvolvendo e simplificando:

$$2m^2x_o - 2my_o + p = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara à equação acima (do 2.º grau em m):

$$m = \frac{y_o \pm \sqrt{y_o^2 - 2px_o}}{2x_o} \qquad ③$$

Mas como $P_o = (x_o, y_o)$ pertence à parábola:

$$y_o^2 = 2px_o \qquad ④$$

Substituindo ④ em ③:

$$m = \frac{y_o}{2x_o} \qquad ⑤$$

Por seu turno ④ permite:

$$\frac{y_o}{2x_o} = \frac{p}{y_o} \Rightarrow \frac{p}{y_o} = m \qquad ⑥$$

Levando ⑥ em ②:

$$y = y_o + \frac{p}{y_o}(x - x_o)$$

ou

$$yy_o = y_o^2 + px - px_o$$

Todavia ④ fornece : $y_o^2 = 2px_o$

$$yy_o = 2px_o + px - px_o$$

$$y_o y = px + px_o$$

Fatorando o p:

$$y_o y = p(x + x_o)$$

Isto posto:

A tangente à parábola $y^2 = 2px$ em seu ponto $P_o = (x_o, y_o)$ tem equação $\boxed{y_o y = p(x + x_o)}$.

Adotando raciocínio análogo, obtém-se as equações das tangentes à elipse, à hipérbole e à circunferência.

Equação da tangente à elipse

A equação da tangente à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em seu ponto $P_o = (x_o, y_o)$ é:

$$\boxed{\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1}$$

Equação da tangente à hipérbole

A equação da tangente à hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ em seu ponto $P_o = (x_o, y_o)$ é:

$$\boxed{\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1}$$

Equação da tangente à circunferência

A equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = k^2$ em seu ponto $P_o = (x_o, y_o)$ é:

$$\boxed{x_o x + y_o y = k^2}$$

Regra prática

Face o exposto, temos uma importante regra prática para o cálculo da tangente no ponto de contato $P_o = (x_o, y_o)$ a uma parábola, elipse, hipérbole ou circunferência:

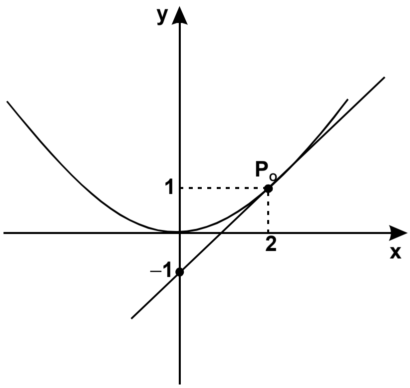
A VARIÁVEL	SUBSTITUI-SE POR:
x^2	$x_o x$
y^2	$y_o y$
x	$\frac{x + x_o}{2}$
y	$\frac{y + y_o}{2}$
xy	$\frac{y_o x + x_o y}{2}$

Exemplo Resolvido

"Numa democracia, o direito de ser ouvido não inclui automaticamente o direito de ser levado à sério."
Hubert H. Humphrey (1911-1977), vice-presidente dos EUA.

Determinar a equação da tangente à parábola $x^2 = 4y$ em seu ponto $P_o = (2, 1)$.

RESOLUÇÃO:



a) Equação da tangente:
$x_o x = p(y + y_o)$

onde:
$x_o = 2$
$y_o = 1$
$p = 2$ (pois $2p = 4$)

b) Levando tais valores na equação da tangente:
$2x = 2(y + 1)$ ou

$\boxed{x - y - 1 = 0}$ (Resp.)

OBSERVAÇAO:
A exemplo o que aconteceu com o 1.º e 2.º problemas de tangência, poder-se-ia utilizar na resolução a equação do feixe de retas: $y - 1 = m(x - 2)$. Nesta, isolando-se y e substituindo na equação da parábola, recai-se numa equação do 2.º grau, na qual se impõe $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, resultando $m = 1$. Igualmente a equação da tangente é $x - y - 1 = 0$. Tal método, via de regra não é aconselhável, por ser excessivamente laborioso.

Exercícios

"Na economia brasileira a lei da oferta e da procura acabou substituída pela lei do infarto e da loucura".
Ivone Capuano, médica e empresária.

01. Equação da tangente à parábola $y^2 - 2x = 0$ em seu ponto $A = (2, 2)$.

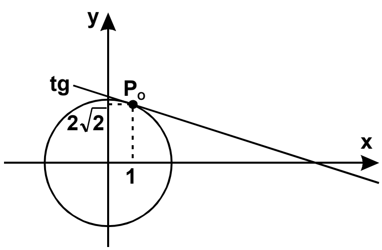
Resp.: $x - 2y + 2 = 0$

02. Calcular a equação da tangente à hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ em seu ponto $P = \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

Resp.: $27x - 6\sqrt{5}y - 36 = 0$

03. Abaixo tem-se uma circunferência de raio igual a 3. Pede-se a equação da tangente em seu ponto $P_O = (1, 2\sqrt{2})$.

Resp.: $x + 2\sqrt{2}y - 9 = 0$



SUGESTÃO:
Equação da circunferência:
$x^2 + y^2 = 9$

04. Obter a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ no ponto $P_O = (6, 1)$ pertencente à circunferência.

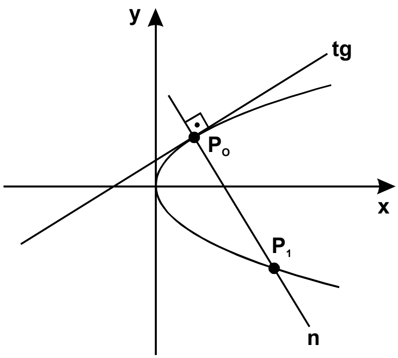
Resp.: $3x + 2y - 20 = 0$

05. Dada a circunferência $x^2 + y^2 - 4y - 96 = 0$, pede-se:
a) a equação da reta tangente à circunferência pelo ponto $A = (10, 2)$;
b) as equações das retas tangentes à circunferência pelo ponto $B = (0, 20)$.

Resp.: a) $x - 10 = 0$

b) $y = \pm \dfrac{2\sqrt{14}}{5} x + 20$

06. Abaixo tem-se uma parábola de equação $y^2 = 8x$. Pelo ponto $P_O = (2, 4)$ pede-se:



a) a equação da tangente;
b) a equação da normal (n);
c) a distância do P_O ao ponto P_1.

Resp.:
a) $x - y + 2 = 0$
b) $x + y - 6 = 0$
c) $16\sqrt{2}$

07. Pede-se o coeficiente angular da normal à elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ emseponto $P = \left(2, \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.

Resp.: $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

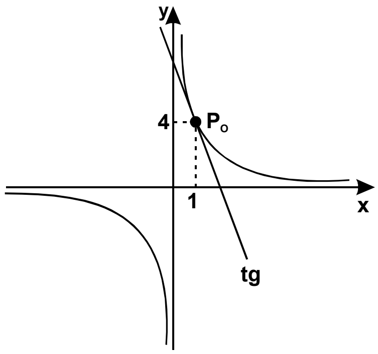
08. Calcular a equação da tangente à hipérbole $5x^2 - 2y^2 + 8x + 7y + 7 = 0$ no ponto $P_O = (-1, 4)$.

Resp.: $2x + 9y - 34 = 0$

09. Determinar a equação da tangente à hipérbole $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 6y - 11 = 0$ em seu ponto (2, 1)

Resp.: $x + y - 3 = 0$

10. A figura abaixo representa uma hipérbole de equação $xy = 4$. Pede-se a equação da tangente em seu ponto $P_o = (1, 4)$.



Resp.: $4x + y - 8 = 0$

11. Pede-se a equação da reta normal à elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 2y - 12 = 0$ em seu ponto $P_o = (3, -2)$.

Resp.: $x + 8y + 13 = 0$

Série B

"Numa separação, a questão da pensão sempre tem dois lados. A que ela vai receber e a que você vai morar."
Chiste Popular

12. Calcular as equações das retas tangentes à elipse $x^2 - 2xy + 3y^2 - 3x + 5y - 10 = 0$ nos pontos em que a elipse intercepta o eixo das abscissas.

Resp.: $7x - 5y - 35 = 0$
$7x - 9y + 14 = 0$

SUGESTÃO:
Para se obter os pontos de interseção da elipse com o eixo x basta fazer $y = 0$ na equação dada. Os pontos são $A = (5, 0)$ e $B = (-2, 0)$.

13. A cônica $x^2 - xy - 9y^2 + mx + ny + 7 = 0$ passa pelos pontos $A = (1, 1)$ e $B = (2, 1)$. Calcular a equação da tangente no ponto $A = (1, 1)$.

Resp.: $x + 15y - 16 = 0$

SUGESTÃO:

Inicialmente leva-se as coordenadas de A e B na equação da cônica e ipso facto obtém-se $m = -2$ e $n = 4$.

O GUIZO DO PESCOÇO DO GATO

No sótão da velha casa, os ratos estavam em Assembléia discutindo um problema que lhes angustiava: todos os dias, um esperto gato, sorrateira e silenciosamente, abocanhava um ou dois ratos.

Todos davam sugestões. Um deles pede a palavra:

– Por que não pôr um guizo (chocalho) no pescoço do gato? À distância, ouviremos o seu barulho e haverá tempo para nos escafedermos!

–Muito bem, ovacionaram eufóricos os ratos.

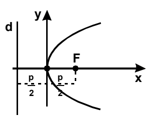
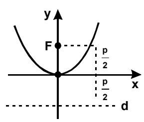
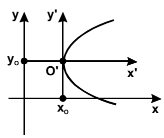
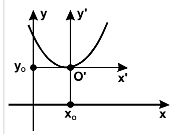
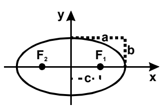
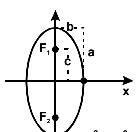
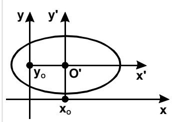
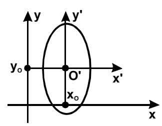
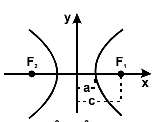
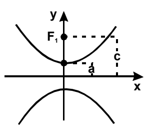
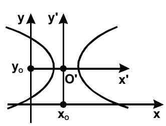
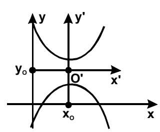
Feito o silêncio, a experiente ratazana murmura em seu canto:

–Mas quem porá o guizo no pescoço do gato?

Moral da história: Entre as palavras e a ação há uma longa distância.

Adaptado pelo autor de uma fábula do escritor francês Jean de La Fontaine (1621-1695).

QUADRO - RESUMO

	1.ª EQUAÇÃO (CANÔNICA)		2.ª EQUAÇÃO		RELAÇÕES NOTÁVEIS	EQUAÇÃO DA TANGENTE EM SEU PONTO $P_o = (x_o, y_o) \Rightarrow$ para as equações canônicas e eixo focal $\equiv$ x
	EIXO FOCAL COINCIDE COM O EIXO X	EIXO FOCAL COINCIDE COM O EIXO Y	EIXO FOCAL É PARALELO AO EIXO X	EIXO FOCAL É PARALELO AO EIXO Y		
PARÁBOLA	 $y^2 = 2px$	 $x^2 = 2py$	 $(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)$	 $(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o)$	$VF = \frac{p}{2}$	$y_o y = p(x + x_o)$
ELIPSE	 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	 $\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(x - x_o)^2}{b^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$	$a^2 = b^2 + c^2$	$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$
HIPÉRBOLE	 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$	$\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1$

CAPÍTULO 7

Quádricas: Resenha Histórica

Para uma compreensão um pouco mais abrangente do desenvolvimento alcançado pela Geometria Plana e Espacial solicita-se uma nova leitura do epítome histórico que se inicia na pág. 11 do presente manual. Depreende-se que foi extraordinário o incremento dado à Geometria pelos matemáticos helenísticos: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga. Porém, não dispunham de uma notação algébrica adequada.

Fulcrado nos geômetras gregos e no desenvolvimento da Álgebra em toda a Europa, **Pierre de Fermat** conclui em 1629 o manuscrito **Ad locos planos et solidos isagoge** (Introdução aos lugares planos e sólidos). Embora hajam controvérsias, tal manuscrito representa o marco zero da Geometria Analítica. É cristalina em Fermat a percepção de uma Geometria Analítica de três dimensões: "Se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície".

A partir de Fermat, a Geometria Analítica trouxe inúmeras facilidades ao desenvolvimento da Geometria Plana e Espacial e foi considerada a "estrada real", numa alusão a Euclides que afirmara ao rei Ptolomeu que "não havia nenhuma estrada real para se aprender Geometria".

Muitas das obras de **Euclides** (séc. III a.C.) se perderam. Mas há consistentes referências que o grande geômetra tenha escrito um tratado sobre elipsóides, parabolóides, hiperbolóides, além de esfera, cilindro e cone.

Euclides fundou a Escola de Matemática na renomada Biblioteca de Alexandria, que pode ter alcançado a cifra de 700.000 rolos (papiros e pergaminhos).

A Biblioteca de Alexandria esta muito próxima do que se entende hoje por Universidade. E se faz oportuna a asserção do conspícuo historiador matemático Carl B. Boyer: "A 'Universidade' de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era conhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra - **Os Elementos**."

Alexandria, a partir de Euclides, até o séc. IV d.C., reinou quase absoluta não só como a mais eclética e cosmopolita cidade da antigüidade, mas também como principal centro da produção matemática.

Em 640 d.C., o califa Omar mandou que fosse queimados todos os livros da Biblioteca sob o argumento de que “ou os livros contêm o que está no Alcorão e são desnecessários ou contêm o oposto e não devemos lê-los”.

Por sua vez Arquimedes (287(?) - 212 a.C.) legou-nos uma original e vastíssima produção emGeometria Plana e Sólida.

Arquimedes nasceu e foi morto em Siracusa, na ilha grega de Secília. Quando jovem, estudou em Alexandria, com os discípulos de Euclides. A genialidade de Arquimedes como físico-matemático só é comparável com Isaac Newton, no séc. XVIII.

Há dois tratados de Arquimedes que apresentam uma extraordinária profundidade emrelação aos sólidos de revolução.

Sobre conóides e esferóides: descreve sólidos de revolução gerados por elipses, parábolas e hipérboles em torno dos seus eixos (quádricas de revolução). Ademais, neste tratado Arquimedes obtém a área de uma elipse ($S = \pi ab$).

Sobre esfera e cilindro: contém demonstrações rigorosas do cálculo do volume e da área dos referidos sólidos. Vai além: estuda as áreas e volumes das superfícies obtidas por seções planas sobre a esfera (calotas e segmentos) e sobre o cilindro. A pedido de Arquimedes, foi gravada na lápide de seu túmulo a representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto.

Do que hodiernamente denomina-se quádricas, há contribuições significativas de dois outros matemáticos helenos: Apolônio e Pappus.

Apolônio de Perga (262(?) - 190(?) a.C.), que supõe-se tenha estudado e por algum tempo ensinado na “Universidade” de Alexandria, mostrou pela primeira vez que a elipse, a parábola e a hipérbole podem ser obtidas variando a inclinação do plano de seção sobre um cone de duas folhas. Para gáudio de todos, sua monumental obra **AS CÔNICAS** sobreviveu praticamente incólume: dos oito livros apenas um se perdeu.

Pappus (séc. IV d.C.) viveu quando a matemática grega dava seus últimos suspiros. Escreveu **Coleção Matemática,** que infelizmente foi um “requiem da matemática grega, porque depois de Pappus, a matemática estiolou e quase desapareceu, e teve de esperar por 1.300 anos para um renascimento no começo do século XVII” (George F. Simmons).

A **Coleção Matemática** é uma espécie de enciclopédia onde se faz umepítome com os devidos créditos das descobertas dos matemáticos gregos. Por ser bastante criterioso e escrupuloso na citação das fontes, credita-se a Pappus belos teoremas da Geometria sobre Centros de Gravidade de Sólidos e Superfícies de Revolução.

Entretanto, deve-se a Leonhard Euler (1707-1783) uma das mais significativas contribuições à geometria no E^3. Em seu livro **Introductio in Analysin Infinitorum** (Introdução à Análise Infinita, publicada em 1748) apresenta a primeira exposição em livro-texto de quádricas, considerando estas como superfícies do 2.º grau no E^3. No mencionado livro, Euler apresenta as equações dos cones, dos parabolóides, dos elipsóides e dos hiperbolóides, utilizando o sistema cartesiano no E^3.

Euler, um prolificentíssimo matemático, suíço de nascimento, escrevia em média 800 páginas por ano e a coletânea completa de suas obras é composta de cerca de 75 volumes. Em plena atividade intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (conseqüência de uma catarata). Mesmo cego, continuou ditando suas descobertas matemáticas aos seus 13 filhos.

Euler se ocupou com praticamente todos os ramos então conhecidos da Matemática, a ponto de merecer do francês François Arago o seguinte encômio: "Euler calculava sem qualquer esforço aparente como os homens respiram e as águias se sustentam no ar".

A partir do séc. XVIII, superfícies têm um notável incremento com surgimento da **Geometria Diferencial,** com interaplicações do Cálculo Diferencial e Integral e da Geometria Analítica.

CAPÍTULO 8

Quádricas

1. DEFINIÇÃO

Uma **quádrica** ou **superfície quádrica** é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas verificam uma equação do 2.º grau a, no máximo três variáveis:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, denominada de **equação cartesiana da superfície quádrica**.

Se o termo independente **J** da equação acima for nulo, a quádrica passa pela origem, pois o ponto O = (0, 0, 0) satisfaz tal equação.

2. EXEMPLOS DE QUÁDRICAS

Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (do 2.º grau), **cones** (do 2.º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádricas.

Acrescem-se: **pares de planos**, **pontos** ou **conjuntos vazios**, que podem ser representados por uma equação do 2.º grau com três variáveis no E^3 e constituem as **quádricas degeneradas**.

Exemplos

Se tentou e fracassou, se planejou e viu seus planos ruírem, lembre-se que os maiores homens da História, foram produtos da coragem, e a coragem bem sabemos nasce no berço da adversidade.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 13 = 0$ (esfera)

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 2$ (elipsóide)

c) $xy + yz + xz - 2x + 2 = 0$ (hiperbolóide)

d) $x^2 + y^2 - z = 4$ (parabolóide)

e) $x^2 + 2y^2 - y + z - 3xy + xz - yz = 0$ (superfície cilíndrica)

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - 2xz - 2yz = 0$ (superf. cônica)

g) $x^3 - z^3 + 3xz^2 - 3x^2z - z - y = 0$ (não é uma quádrica. Esta equação do 3.º grau representa uma superfície cilíndrica)

h) $xy^2 + xz^2 + 2yz^2 - 2z^2 - 2xy + x = 0$ (não é uma quádrica. Esta equação do 3.º grau representa uma superfície cônica)

i) $x^2 - 25 = 0$ (2 planos paralelos - quádrica degenerada)

j) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 2z + 10 = 0$ (um ponto - quádrica degenerada)

l) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 0$ (um conjunto vazio - quádrica degenerada)

3. REVISANDO

É assaz importante rememorar dos capítulos pretéritos que a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, isto é, uma equação do 2.º grau, a nomáximo duas variáveis, representa uma cônica no plano xy (E^2).

EXEMPLOS DE CÔNICAS

Circunferências, **elipses**, **parábolas**, **hipérboles** constituem as mais conhecidas **cônicas**. Faz-se mister recordar que uma equação do 2.º grau com duas variáveis no E^2 pode representar uma **cônica degenerada: ponto**, **reta**, **par de retas** ou um **conjunto vazio**.

Sabemos que a equação $x^2 + 2y^2 = 3$ representa uma elipse no E^2. Antecipemos porém, que esta mesma equação é a de uma quádrica (superf. cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo z) no E^3.

Como analogia, vale lembrar o exposto no capítulo de plano:

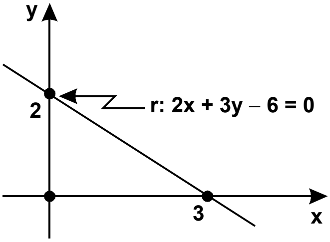
A equação $ax + by + c = 0$ constitui:

a) uma reta no E^2;

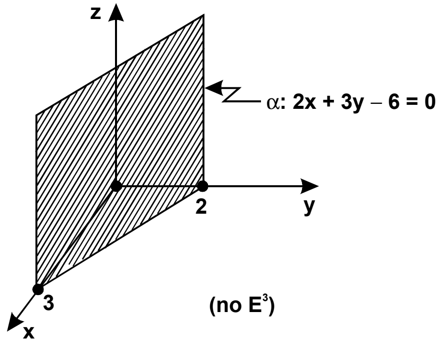
b) umplano paralelo ao eixo z, no E^3.

Exemplo:

No E^2 a equação $2x + 3y - 6 = 0$ representa uma reta. Entretanto, no E^3 tal equação representa umplano paralelo ao eixo z.



(no E^2)



(no E^3)

4. SUPERFÍCIES

A equação cartesiana f(x, y, z) = 0 representa genericamente uma superfície. No E^3 as equações do 2.º grau constituem-se em superfícies quádricas e as do 1.º, 3.º, 4.º... graus em superfícies não quádricas.

Exemplos

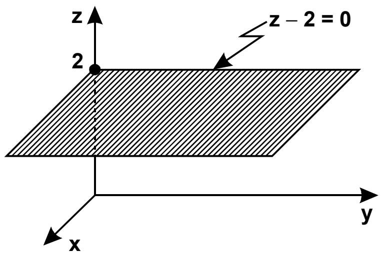
"Dê um deserto a um burocrata e em cinco anos ele estará importando areia."
Henri Jeanson (1900-1970) – escritor francês.

a) $3x + 4y - 5z + 2 = 0$ (superf. do 1.º grau $\Rightarrow$ plano)
b) $x^2 + 2xy + 3yz + x - 2 = 0$ (superf. do 2.º grau $\Rightarrow$ quádrica)
c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 8 = 0$ (superf. do 3.º grau $\Rightarrow$ não quádrica)

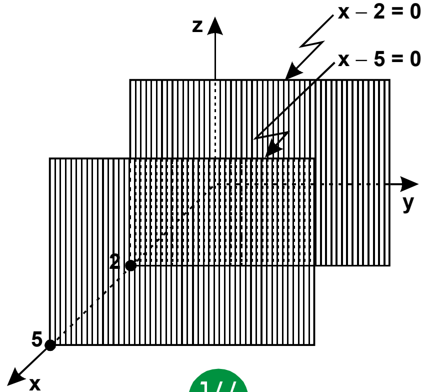
A superfície do 1.º grau ax + by + cz + d = 0 já mereceu a ênfase necessária em capítulo específico: **o plano** (ver **Álgebra Vetorial** e **Geometria Analítica**, do autor).

Face às solicitações vindouras, recordemos casos particulares do plano:

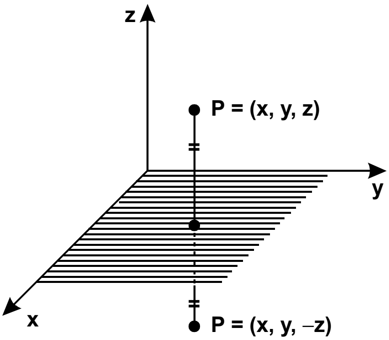
a) $z - 2 = 0$ (Plano paralelo ao plano xy)



b) $x^2 - 7x + 10 = 0$ ou $(x - 2)(x - 5) = 0$ (superf. quádrica, que decomposta representa 2 planos paralelos ao plano yz)



5. SIMETRIA



a) Simetria em relação aos planos coordenados

Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto P = (x, y, z) dessa superfície existir um ponto P' = (x, y, –z) pertencente à superfície. Destarte, a equação não se altera pela substituição de z por –z.

Isto posto, a superfície cuja equação cartesiana não se altera quando trocamos o sinal de uma das variáveis é simétrica emrelação ao plano das outras duas variáveis.

Em particular: se a equação cartesiana de uma superfície só contém expoentes pares para a variável z, então essa superfície é simétrica emrelação ao plano xy.

Exemplos

> ***"Tudo de bom acontece a pessoas com disposição alegre."***
> *Voltaire (1694-1778), escritor francês.*

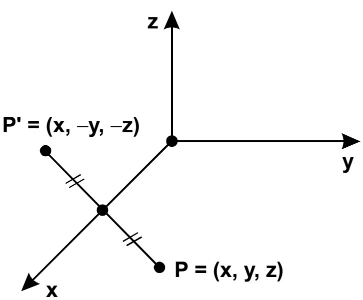
1) $z^2 + x - y + 3 = 0 \Rightarrow$ superfície quádrica simétrica em relação ao plano xy.

2) $x^2 + 2y - 3z + 4 = 0 \Rightarrow$ superfície quádrica simétrica em relação ao plano yz.

3) $3x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xz + 3 = 0 \Rightarrow$ superfície quádrica simétrica ao plano xz.

4) $y^4 - 3x^3z + z + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao plano xz.

b) Simetria emrelação aos eixos coordenados.



Uma superfície é simétrica ao eixo x, se para qualquer ponto P = (x, y, z) dessa superfície, existir outro ponto P' = (x, –y, –z), pertencente à superfície.

Assim, a superfície cuja equação cartesiana não se altera quando trocamos o sinal de duas variáveis é simétrica em relação ao eixo da terceira variável.

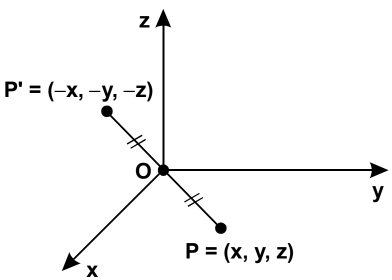
Em particular: se a equação algébrica de uma superfície contém expoentes pares para as variáveis x e y e ímpar para a variável z, a superfície é simétrica emrelação ao eixo z.

Exemplos

Grandes obras não nascem apenas de grandes idéias.

1) $3x^2 + y^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo z.
2) $y^2 + 2z^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo x.
3) $x^2 + 2y^2 - 3z^3 - 2xy + 1 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo z.
4) $3x^4 + z^2 - y^3 + y + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica ao eixo y.

c) Simetria emrelação à origem



Uma superfície é simétrica em relação à origem O, se para qualquer ponto P = (x, y, z) dessa superfície existir outro ponto P' = (–x, –y, –z), pertencente à superfície.

Destarte, superfície cuja equação cartesiana não se altera quando se permuta o sinal das três variáveis é simétrica em relação à origem do sistema de coordenadas.

Em particular: adotando conhecimentos há pouco exarados, quando todos os expoentes das variáveis de uma equação forem de grau par, a superfície é simétrica em relação à origem e também em relação aos eixos planos coordenados.

Exemplos

"Trate um homem como ele é, e ele continuará sendo como é. Trate-o como ele pode e deve ser, e ele tornar-se-à o que pode e deve ser."

Johann Wolfgang Goethe (1749-1832), poeta alemão.

1) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 25 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem e também aos eixos e planos coordenados.
2) $xy + xz - yz + 3 = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica emrelação à origem.
3) $xyz + 2x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem.
4) $x^3 + y^3 - 4z = 0 \Rightarrow$ superfície simétrica em relação à origem.
5) $x^3 + y^3 - 4z + 2 = 0 \Rightarrow$ superfície **não** simétrica em relação à origem.

6. EQUAÇÕES DE CURVAS NO E^3

É sabido que uma única equação representa uma curva no plano cartesiano bidimensional. Por exemplo: a equação $3x^2 - 2y^2 = 5$ é uma hipérbole no plano xy. Por sua vez, a equação $z^2 = 2y$ representa uma parábola no plano yz.

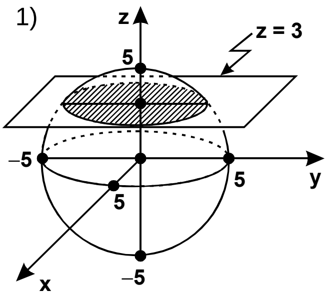
No entanto, no E^3, adotando um conceito bastante intuitivo, uma curva pode ser concebida geometricamente como interseção de duas superfícies. O sistema constituído pelas equações de duas superfícies distintas e interceptantes em mais de um ponto, fornece a equação cartesiana da curva:

$$\text{curva}\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Exemplos

Há poucos bancos com sombra no caminho da vitória.

1)



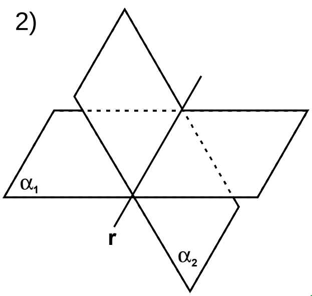
A figura ao lado mostra na área hachurada um círculo, fruto da interseção de uma esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $z = 3$.

Equação da curva no E^3:

$$\text{circunferência}\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO:
Para $z = 3$ tem-se a equação $x^2 + y^2 + (3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, que representa umcírculo de raio igual a 4 no plano $z = 3$.

2)



Uma reta (que é um caso particular de curva) pode ser determinada pela interseção de dois planos não paralelos:

$$r:\begin{cases} \alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Exercícios

"Gasta-se menos tempo fazendo a coisa certa, do que explicando porque a fizemos errada."
H. W. Longfellow

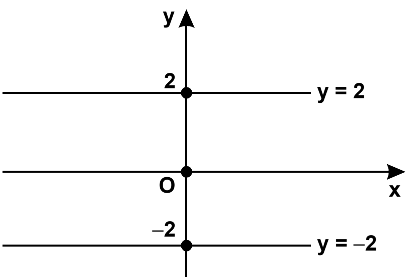
01. Pede-se a soma das assertivas verdadeiras:
01) A superfície quádrica $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$ é simétrica ao plano cartesiano xz;
02) A superfície $x^3 + y - 3z = 0$ é simétrica em relação à origem;
04) A superfície quádrica $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$ passa pela origem, é simétrica em relação aos planos xz e xy e em relação ao eixo x;
08) A superfície quádrica $2x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4 = 0$ não passa pela origem e é simétrica em relação aos eixos e planos coordenados e em relação à origem;
16) A equação $x^2 - y^2 = 2$ representa no E^3 uma hipérbole;
32) Toda superfície cilíndrica é uma quádrica;
64) A superfície quádrica $y^2 + z^2 = 2x$ é simétrica em relação aos planos xz e xy, em relação ao eixo x e passa pela origem.

Resp.: 79 (V, V, V, V, F, F, V)

02. Verificar se os pontos A = (1, 1, 0) e B = (1, 1, 3) pertencem à superfície quádrica S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z - 3 = 0$.

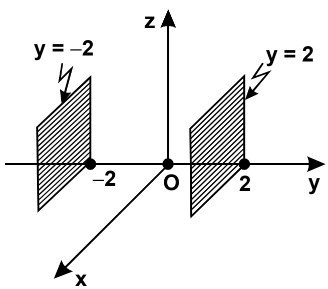
Resp.: $A \in S$; $B \notin S$.

03. Representar no E^2 e no E^3 a equação $y^2 - 4 = 0$.
Resp.:
a) no E^2



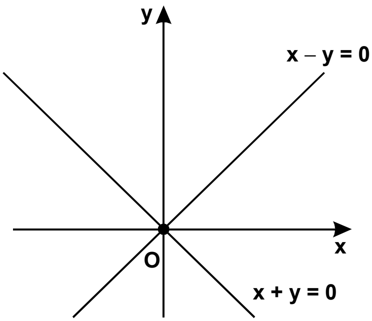
(duas retas paralelas)

b) no E^3



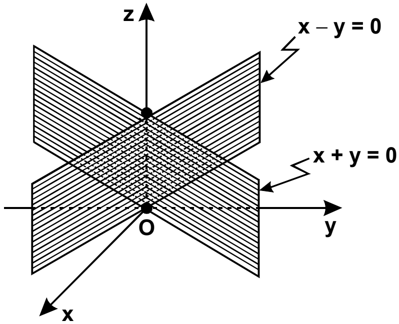
(dois planos paralelos)

04. Representar no E^2 e no E^3 a equação $x^2 - y^2 = 0$.
Resp.:
a) no E^2



(duas retas bissetrizes dos quadrantes)

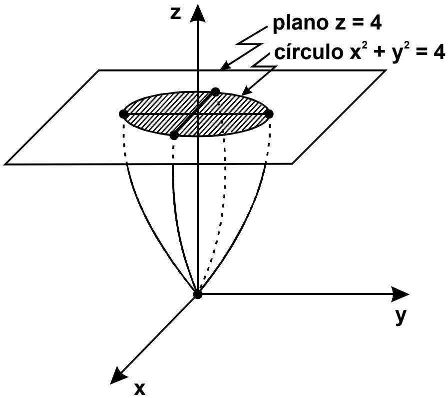
b) no E^3



(dois planos bissetores dos oitantes)

05. Identificar a curva $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$

Resp.: Para $z = 4$ tem-se $x^2 + y^2 = 4$, que representa um círculo de $R = 2$ no plano $z = 4$.



OBSERVAÇÃO:
A equação $z = x^2 + y^2$ representa um paraboloide conforme ilustra a figura acima.

Série B

"Quem quer fazer alguma coisa, encontra um meio. Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa."
Provérbio árabe

06. Calcular as equações cartesianas da curva dada por suas equações paramétricas.

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = \dfrac{t}{3} + 2 \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$$

Resp.: $\begin{cases} x^2 + 4x - z + 5 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$

SUGESTÃO:
Da 1.ª equação tem-se t = x + 2, o qual é substituído nas outras duas equações.

07. Achar a equação do lugar geométrico dos pontos do E^3 cujas distâncias ao ponto A = (2, 1, –3) equivale ao triplo da distância ao eixo y.

Resp.: $8x^2 - y^2 + 8z^2 + 4x + 2y - 6z - 14 = 0$

SUGESTÃO:
a) Seja P = (x, y, z) o ponto procurado;
b) d(P, A) = 3d(P, y)

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2} = 3\sqrt{x^2 + z^2}$$

quadrando e desenvolvendo tem-se a resposta (veremos que esta superfície quádrica representa umhiperbolóide de uma folha).

08. Uma partícula se move de tal forma que a sua distância ao eixo x é igual a sua distância ao plano z = 3. Encontrar a equação da trajetória desta partícula.

Resp.: $y^2 + 6z - 9 = 0$ (quádrica)

09. Calcular a equação do lugar geométrico gerado por um ponto que se desloca no E^3 de tal modo que a soma das distâncias aos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 3, 0)$ é 5.

Resp.: $96x^2 + 84y^2 + 84z^2 - 60x - 320y - 280z + 32yz - 225 = 0$

SUGESTÃO:
a) Seja o ponto $P = (x, y, z)$ o ponto procurado;
b) $d(P, A) + d(P, B) = 5$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2} = 5$$

desenvolvendo tem-se a resposta (tal superfície quádrica é uma elipsóide).

7. INTERSEÇÕES DA SUPERFÍCIE COM OS EIXOS COORDENADOS

O ponto de interseção de uma superfície com o eixo z tem abscissa e ordenada nulas. Genericamente, na obtenção do ponto de interseção de uma superfície com um eixo coordenado, anulam-se as variáveis não homônimas do eixo considerado.

Exemplo

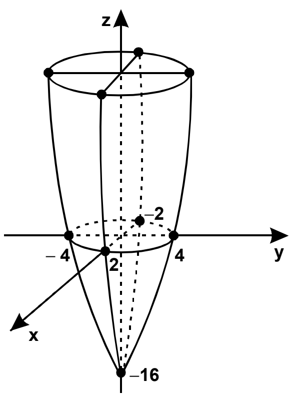
"A vitória é constituída de 20% de inspiração e 80% de transpiração".

Achar as coordenadas dos pontos de interseção da superfície quádrica $4x^2 + y^2 - z = 16$ com os eixos coordenados.

RESOLUÇÃO:

a) com o eixo $x \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$
b) com o eixo $y \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$
c) com o eixo $z \Rightarrow -z = 16 \Rightarrow z = -16$

GRÁFICO: (Parabolóide) $\Rightarrow$

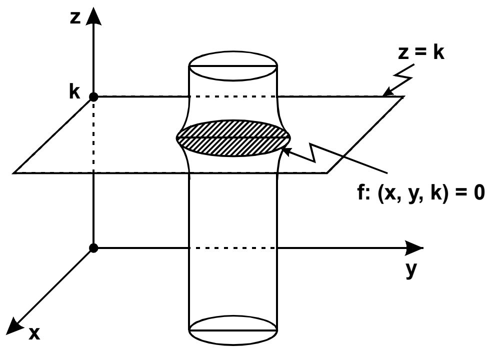


8. INTERSEÇÃO DA SUPERFÍCIE COM PLANOS
(Traços da superfície)

Ao se representar graficamente uma superfície é assaz importante se conhecer as suas curvas de interseção com os planos coordenados ou então com planos paralelos aos planos coordenados. Tais curvas são denominadas de **traços** da superfície no plano. **O traço de uma superfície quádrica é sempre uma cônica.** A demonstração é trivial. Podemos ter uma idéia da forma da superfície f(x, y, z) = 0, efetuando-se sua interseção com o plano z = k, k ∈ R.

Ao se substituir na equação f(x, y, z) = 0, a cota z por k, obtemos f(x, y, k) = 0, que representa uma **curva** no plano z = k.

É bastante simples se obter o traço de uma superfície com o plano coordenado xy: na equação dada faz-se z = 0, obtendo-se f(x, y, 0) = 0. Genericamente, na obtenção do traço da superfície com um plano coordenado anula-se a variável que não figura no plano considerado.



Exemplo

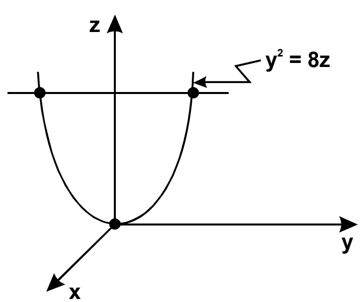
"Quem não cresce pelo amor, crescerá pela dor."
Sabedoria popular

1. Achar os traços da superfície quádrica (denominada parabolóide) $x^2 + y^2 = 8z$.

a) **no plano yz**

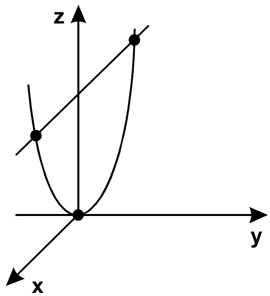
Substituindo x = 0 na equação dada tem-se $y^2 = 8z$, a qual representa uma parábola no plano yz.

A parábola é o **traço** da superfície no plano yz.



b) **no plano xz**

Na equação dada fazendo $y = 0$ tem-se a parábola $x^2 = 8z$, que é o **traço** da superfície no plano xz.

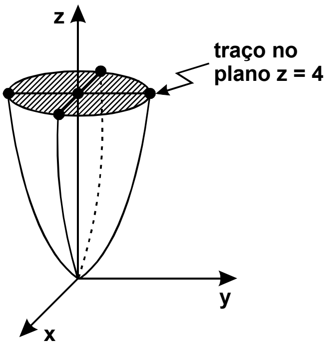


c) **no plano xy**

Para $z = 0$ resulta a equação $x^2 + y^2 = 0$, só verificada pelo ponto $O = (0, 0)$.

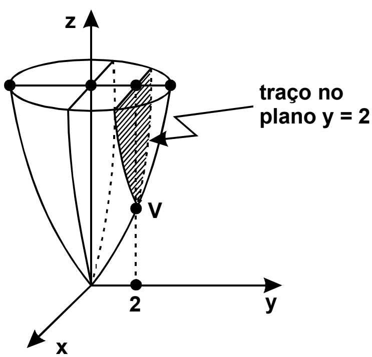
d) **no plano z = 4**

Levando $z = 4$ na equação da superfície quádrica resulta a equação $x^2 + y^2 = 32$, a qual representa um círculo no plano $z = 4$.



e) **no plano y = 2**

Para $y = 2$, a equação dada se transforma em $x^2 + 4 = 8z$ ou $x^2 = 4(2z - 1)$, a qual representa uma parábola de vértice $V = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)$, no plano $y = 2$.



OBSERVAÇÃO:
A equação da quádrica $x^2 + y^2 = 8z$ só tem existência real (domínio) para $z \geq 0$ e é simétrica em relação aos planos yz e xz.

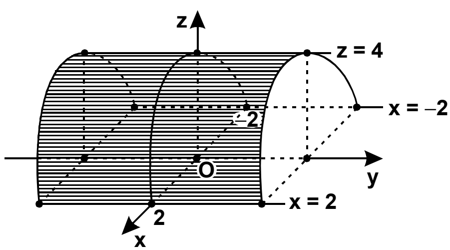
2.Dada a superfície quádrica $\mathbf{x^2 + z - 4 = 0}$, calcular:
a) **as interseções com os eixos cartesianos:**
Resolução:
• com o eixo x $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
• com o eixo y $\Rightarrow$ não há interseção
• com o eixo z $\Rightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

b) **os traços nos planos coordenados:**
• no plano xy $(z = 0) \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$ retas de equações $x = 2$ e $x = -2$
• no plano xz $(y = 0) \Rightarrow$ parábola $x^2 = 4 - z$ de vértice $V = (0, 0, 4)$ e concavidade voltada para baixo.
• no plano yz $(x = 0) \Rightarrow$ reta $z = 4$.

c) **a condição de existência (domínio)**
A superfície quádrica $x^2 = 4 - z$ só tem existência para $4 - z \geq 0$ ou $z \leq 4$.

d) **a simetria:** A quádrica $x^2 + z - 4 = 0$ é simétrica em relação aos planos xz e yz e emrelação ao eixo z.

e) **a figura** (denominada superfície cilíndrica parabólica)**:**



Exercícios

"El amor es la sabedoria del tonto y la locura del sabio."
Provérbio espanhol

01. Obter os pontos de interseção da quádrica $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 6y + z + 6 = 0$ (esfera) com o eixo das abscissas.

Resp.: (2, 0, 0) e (3, 0, 0)

02. Dada a equação da superfície quádrica $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 7y - 4z - 21 = 0$, identificar a equação do traço no plano $y = 2$.

Resp.: Equação do traço no plano $y = 2$: $x^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$, que representa uma circunferência de $C = (-1, 2, 2)$ e $R = 2$.

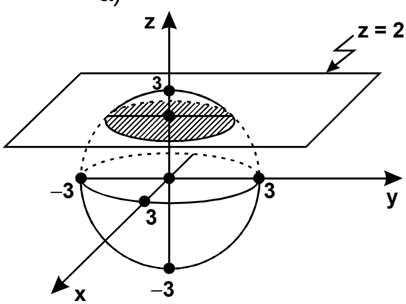
03. Achar a equação do traço da quádrica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (esfera de $R = 3$):

a) no plano $z = 2$;

b) no plano xy. Representar graficamente.

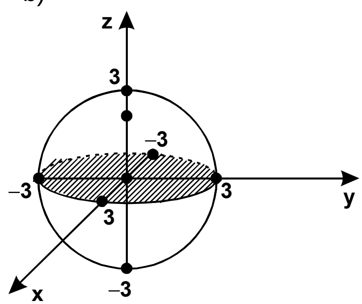
Resp.

a)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{(circunf.)}$$

b)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{(circunf.)}$$

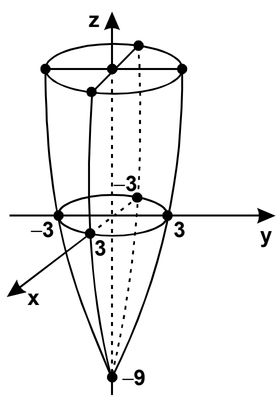
04. A figura ao lado representa um parabolóide (superfície quádrica). Considerando as interseções com os eixos e planos cartesianos, bem como o domínio, a sua equação **pode** ser:

a) $x^2 + y^2 - z + 9 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 - z - 9 = 0$

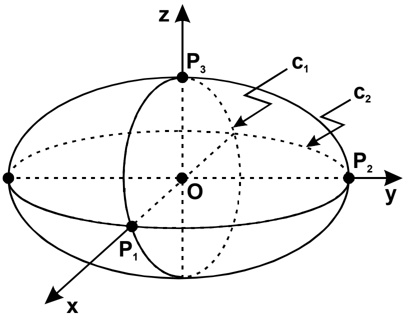
c) $x^2 + y^2 - z - 9 = 0$

d) $2x^2 + y^2 - z - 9 = 0$



Resp.: c

05. Tem-se abaixo uma superfície quádrica de equação
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$ (elipsóide). Pedem-se:



a) as coordenadas dos pontos P_1, P_2 e P_3;
b) a equação da curva c_1;
c) a equação da curva c_2;
d) o estudo da simetria.

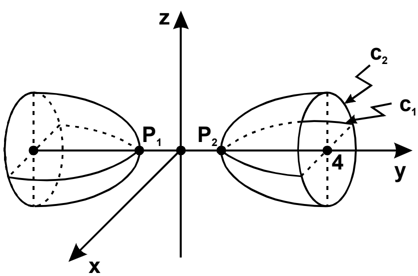
Resp.:
a) $P_1=(2, 0, 0)$; $P_2=(0, 5, 0)$ e $P_3=(0, 0, 3)$;

b) $c_1\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 & \text{(elipse no plano xz);}\\ y=0\end{cases}$

c) $c_2\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1 & \text{(elipse no plano xy);}\\ y=0\end{cases}$

d) a superfície é simétrica em relação à origem; também o é em relação aos eixos e planos cartesianos.

06. Figura-se no presente exercício uma superfície quádrica de equação $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$ (hiperbolóide de duas folhas). Pedem-se:



a) as coordenadas de P_1 e P_2;
b) a equação da curva c_1;
c) a equação da curva c_2;
d) a simetria em relação aos eixos e planos coordenados e à origem.

Resp.:

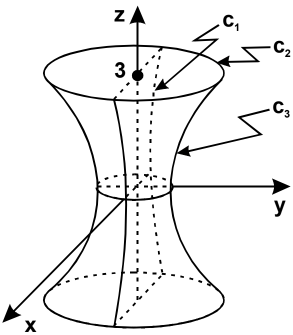
a) $P_1 = (0, -\sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$;

b) $c_1 \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (hipérbole no plano xy);

c) $c_2 \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ (elipse no plano $y = 4$);

d) a superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, planos coordenados e à origem.

07. No presente exercício figura-se uma superfície cognominada hiperbolóide de uma folha, cuja equação é $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$. Solicitam-se:



a) os pontos de interseção com os eixos x, y e z;
b) a equação da curva c_1;
c) a equação da curva c_2;
d) a equação da curva c_3;
e) o estudo da simetria.

Resp.:

a) (2, 0, 0); (–2, 0, 0); (0, 2, 0); (0, –2, 0); não há interseção com o eixo z;

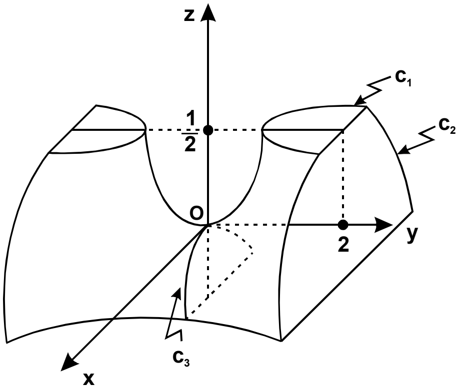
b) $c_1 \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ (hipérbole no plano xz);

c) $c_2 \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = 3 \end{cases}$ (círculo de $R = 2\sqrt{2}$ no plano $z = 3$);

d) $c_3 \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ (hipérbole no plano yz);

e) A quádrica é simétrica em relação à origem. Também o é em relação aos eixos e planos cartesianos.

08. Abaixo representa-se a quádrica $z = -\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4}$ (parabolóide hiperbólico ou sela de cavalo). Pedem-se:



a) a equação da curva c_1;
b) a equação da curva c_2;
c) a equação da curva c_3.

Resp.:

a) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left(\text{hipérbole no plano } z = \dfrac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x^2 = -z + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (parábola de concavidade voltada para baixo e $V = (0, 2, 1)$)

c) $\begin{cases} x^2 = -z \\ y = 0 \end{cases}$ (parábola de concavidade voltada para baixo e $V = (0, 0, 0)$)

TEMPOS DE GLOBALIZAÇÃO

Certo dia, ao querer respirar os ares do mundo, o rato saiu de seu esconderejo. Após um tempo de silêncio absoluto, ouviu um latido. E pensou: "se há cachorro, é porque o gato anda longe...". Qual o quê! Mal olhou para o lado e só ouviu o miado valente do gato abocanhando-lhe a um só golpe. Ainda assim, o rato conseguiu perguntar:

– Desde quando você é bicho que late?

A resposta do gato foi contundente:

– Nestes tempos de globalização, quem não fala duas línguas, morre de fome...

A VOLUNTARIOTERAPIA

"O trabalho voluntário é para mim uma prece silenciosa. Deveis encontrar uma causa generosa à qual sacrificareis tempo e dinheiro, porque é assim que conhecereis a alegria de dar. Mais do que vossas posses, é quando derdes de vós próprios é que realmente dais."

(Gibran Khalil Gibran (1893 - 1931), poeta escritor e filósofo libanês).

"Quem é voluntário não só dá, recebe muito mais" – proclama Zilda Arns. A entidade que esta senhora, sempre com a aparência feliz, preside – a Pastoral da Criança – é composta por 150.000 voluntários e atende a mais de um milhão de famílias aomódico custo de R$ 0,87 por criança/mês.

Mais surpreendente e encantadora é a alegria com que estes voluntários praticam e relatam suas atividades. São pessoas que carregam dentro de si uma energia positiva muito forte. Não se apequenam ante as vicissitudes da vida. São entusiastas. Aliás, entusiasmo é uma palavra belíssima que provém do grego – en-theo – que literalmente significa "deus dentro de si". Para os gregos politeístas, quem carrega a chama esplendorosa do entusiasmo tem umdeus dentro de si.

Na convivência com jovens que praticam ações comunitárias, ouvimos três frases que encerram grandes verdades:

– "Você já viu umvoluntário triste quando emação?"

– "Existe terapiamelhor que fazer o bem?"

– "Quando estou praticando o voluntariado esqueço os meus problemas. Até porque meus problemas são pequenos diante da realidade que estou atuando."

O Brasil não é um país pobre, mas sim injusto. A bem verdade, este país será salvo não apenas pelos governantes, mas pelas ações concretas de cada um de nós. Não podemos ficar indiferentes à cruel realidade de nossas crianças, carentes não só de alimento, saúde e boas escolas, mas desprovidas de todo o tipo de esperança. Milhares de brasileiros estão fazendo a sua parte, mas é pouco para uma nação com milhões de jovens, com tempo disponível, bem instruídos, bem nutridos e, no entanto, excessivamente hedonistas e alheios aos problemas sociais.

E também fico me perguntando se nós educadores, pais e líderes comunitários não estamos falhando em preparar às nossas crianças e adolescentes um caminho por demais florido e pavimentado, se não estamos falhando com nosso pouco envolvimento em ações voluntárias. Não podemos ignorar que a generosidade e também a falta de iniciativa são características da juventude. São enfáticos os dados de uma pesquisa que realizamos com 1900 alunos de 3 escolas de Curitiba que mostraram que apenas 8% dos jovens participam de ações comunitárias. No entanto, 71% gostariam de participar, mas boa parte não sabe como.

É imprescindível que o jovem tenha sempre metas, objetivos, para o dia, para o mês, para o ano e para a vida. A ação organizada unida ao entusiasmo produz uma força hercúlea. Mesmo tropeçando em pedras, que siga resoluto em direção ao topo da montanha. E, em tudo que julgar importante, que vá além da sua obrigação.

O voluntariado é um dever de consciência social, prática da cidadania e garantia de um futuro melhor para os nossos filhos. Ademais é uma gratificante terapia que cresce anualmente à razão de 20% no Brasil.

E para concluir, belas e oportunas são as palavras de Dalai-lama: “A ajuda aos semelhantes lhe traz sorte, amigos e alegrias. Sem ajuda aos semelhantes você acabará imensamente solitário.”

O autor

CAPÍTULO 9

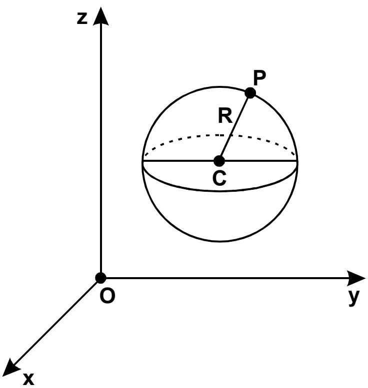
Superfície Esférica

1. INTRODUÇÃO

No estudo analítico, os termos círculo e circunferência são empregados sem a distinção que faz a Geometria propriamente dita. Destarte, reporta-se à equação $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ como a equação de uma circunferência ou então, de um círculo de centro $C = (\alpha, \beta)$ e raio R. Analogamente, utilizar-se-á indistintamente os termos esfera e superfície esférica. Ipso facto, empregaremos adiante indistintamente os termos cilindro e superfície cilíndrica, bem como cone e superfície cônica.

2. DEFINIÇÃO

Superfície esférica ou esfera é o lugar geométrico dos pontos do E^3, cuja distância a umponto fixo (centro) é constante.



Fixado o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no E^3, seja $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ o ponto fixo, $P = (x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica e $R > 0$ o raio. Analiticamente tem-se:

$d(C, P) = R$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = R$$

ou

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \quad \text{(I)}$$

Desenvolvendo a equação acima:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \quad \text{(II)}$$

onde $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$.

Reciprocamente, uma equação do 2.° grau nas variáveis x, y e z representa uma superfície esférica se:

1) os coeficientes de x^2, y^2 e z^2 forem iguais e não nulos;
2) a equação não contiver termos em xy, xz e yz;
3) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$.

3. CÁLCULO DOCENTRO E DO RAIO

Dada a equação da esfera: $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ (III)
Comparando (II) e (III) tem-se:

$$-2\alpha = A \Rightarrow \alpha = \frac{A}{-2}$$

$$-2\beta = B \Rightarrow \beta = \frac{B}{-2}$$

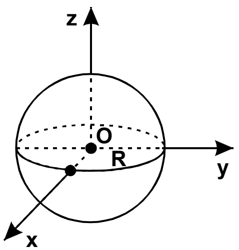
$$-2\gamma = C \Rightarrow \gamma = \frac{C}{-2}$$

$$\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = D \Rightarrow R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - D}$$

OBSERVAÇÃO:
O radicando $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - D$ pode ser:
1) positivo e a eq. (II) representa uma esfera real;
2) nulo e a eq. (II) representa umponto;
3) negativo e a eq. (II) representa uma esfera imaginária.

4.CASOS PARTICULARES

a) Esfera com centro na origem O = (0, 0, 0)



Em (I) fazendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, obtém-se:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

que é a equação de uma esfera com centro na origem do sistema cartesiano e raio R.

b) Esfera que passa pela origem O = (0, 0, 0)

A terna (0, 0, 0) verifica a eq. (II) $\Leftrightarrow \delta = 0$. Destarte, a equação de uma esfera que passa pela origem é desprovida de termo independente.

Exercícios Resolvidos

"Não é difícil ser bom; o difícil é ser justo."
Victor Hugo (1802-1885), escritor francês.

1. Calcular o centro e o raio da esfera:
$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 18y - 9z + 18 = 0$

RESOLUÇÃO:

a) Cálculo do centro da esfera

Dividindo a equação dada por 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \underset{A}{\underset{\downarrow}{2x}} + \underset{B}{\underset{\downarrow}{6y}} - \underset{C}{\underset{\downarrow}{3z}} + \underset{D}{\underset{\downarrow}{6}} = 0$$

$$\alpha = \frac{A}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\beta = \frac{B}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$\gamma = \frac{C}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Então o centro é $C = \left(1, -3, \dfrac{3}{2}\right)$

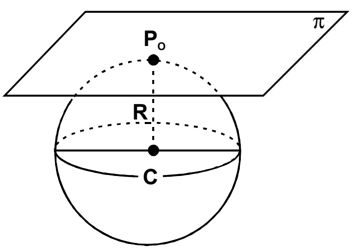
b) Cálculo do raio

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - D = 1 + 9 + \frac{9}{4} - 6 = \frac{25}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

2. Achar a equação da esfera de $C = (1, 0, 3)$ e tangente ao plano π: $2x + y - 2z + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO:

a) $R = d(C, \pi)$



Fórmula da distância de ponto a plano:

$$R = d(C, \pi) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$R = \frac{|2(1) + 1(0) - 2(3) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{3}{3} = 1$$

b) Equação da esfera de $C = (1, 0, 3)$ e $R = 1$

$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 3)^2 = 1$

ou

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 9 = 0$ (Resp.)

3. Calcular a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $D = (1, 2, 3)$.

RESOLUÇÃO:

Quatro pontos não coplanares determinam uma esfera. Equação da esfera procurada:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$

a) $A = (1, 0, 0) \in$ esfera:

$1 - 2\alpha + \delta = 0$ ①

b) $B = (0, 1, 0) \in$ esfera:

$1 - 2\beta + \delta = 0$ ②

c) $C = (0, 0, 1) \in$ esfera:

$1 - 2\gamma + \delta = 0$ ③

d) $D = (1, 2, 3) \in$ esfera:

$1 + 4 + 9 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + \delta = 0$ ④

e) De ①, ② e ③:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\delta + 1}{2} \quad ⑤$$

f) Levando ⑤ em ④ obtém-se:

$$\delta = \frac{8}{5} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{13}{10} \quad ⑥$$

g) Substituindo ⑥ na equação da esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{13x}{5} - \frac{13y}{5} - \frac{13z}{5} + \frac{8}{5} = 0$$

ou

$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 13x - 13y - 13z + 8 = 0$ (Resp.)

Exercícios

> ***"Aqueles que não querem fazer devem abrir caminho para aqueles que estão fazendo."***
> Do filme de motivação Paradigmas.

1. Dada a equação da esfera $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 2y + 6z + 1 = 0$, pedem-se: a) o raio; b) a área da superfície esférica; c) o volume da esfera.

Resp.: a) $R = \sqrt{3}$; b) $S = 4\pi R^2 = 12\pi$u.a.; c) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$u.v.

2. Achar a equação da esfera de diâmetro AB, sendo A = (1, 2, –3) e B = (3, 4, 9).

Resp.: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=38$

3. Dê as condições para que a quádrica $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ represente uma superfície esférica.

Resp.: $A = B = C \neq 0$ e $D = E = F = 0$

4. Determinar a equação da esfera de centro C = (1, –2, –5) e que passe pela origem.

Resp.: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+10z=0$

5. Obter a equação da esfera de C = (–2, –3, 1) e tangente ao plano yz.

Resp.: $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$

6. Seja C = (2, 3, 5) o centro de uma esfera. Calcular a equação de sua superfície, sabendo que a esfera é tangente ao plano cartesiano xy.

Resp.: $x^2+y^2+z^2-4x-6y-10z+13=0$

7. Calcular a equação da esfera que seja concêntrica à esfera $x^2+y^2+z^2-4x-6y-6z-16=0$ e que passe pelo ponto P = (1, 4, –3).

Resp.: $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=38$

8. Obter a equação da esfera que passe pela origem do sistema cartesiano e seja concêntrica com $2x^2+2y^2+2z^2-4x+8y+2z+1=0$.

Resp.: $(x-1)^2+(y+2)^2+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{21}{4}$

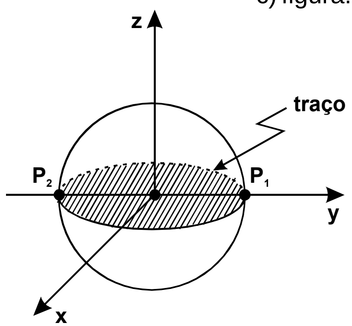
9. Verificar se as equações abaixo representam esferas reais, imaginárias, um ponto ou não representam esferas:

a) $x^2+y^2+z^2-2x+3y-5z-3=0$
b) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+14=0$
c) $x^2+y^2+z^2-4x-y+2z+10=0$
d) $x^2+y^2-z^2-4x+2y+3z-5=0$
e) $x^2+y^2+z^2-4xy+z-2=0$

Resp.: a) esfera real; b) um ponto P = (1, 2, –3); c) uma esfera imaginária; d) não é esfera; e) não é esfera.

10. Dada a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, calcular:
a) os pontos de interseção da esfera com o eixo das ordenadas;
b) a curva de interseção da esfera com o plano xy;
c) fazer a figura.

Resp.: a) $P_1 = (0, 5, 0)$ e $P_2 = (0, -5, 0)$;
b) $x^2 + y^2 = 25$ (círculo de $R = 5$);
c) figura:



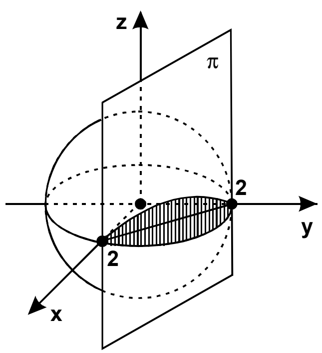
11. Calcular o valor de k para que a equação
$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + z + k = 0$ represente uma esfera de raio 2.

Resp.: $k = \dfrac{-47}{8}$

12. Obter a equação da curva interseção da esfera
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ com o plano cartesiano xy.

Resp.: círculo: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

13. Achar a equação da curva interseção da esfera com o plano paralelo ao eixo z, ao lado figurados.



Resp.: círculo: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ (esfera)} \\ x + y - 2 = 0 \text{ (plano)} \end{cases}$

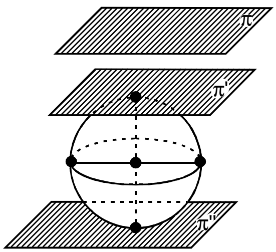
14. Conhecida a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, obter a equação de uma esfera concêntrica à mesma e tangente ao plano $x + y - z + 1 = 0$.

Resp.: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{16}{3}$

15. Obter a equação dos planos tangentes à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ e que sejam paralelos ao plano π: $2x - y - z + 1 = 0$.

Resp.: $2x - y - z \pm \sqrt{6} = 0$

SUGESTÃO:



a) Centro e raio da esfera: $C = (1, 2, 0)$ e $R = 1$

b) Equação de π': $2x - y - z + d = 0$

c) $d(C, \pi') = R$

$$\frac{|2(1) + (-1)2 + (-1)0 + d|}{\sqrt{4+1+1}} = 1 \Rightarrow d = \pm\sqrt{6}$$

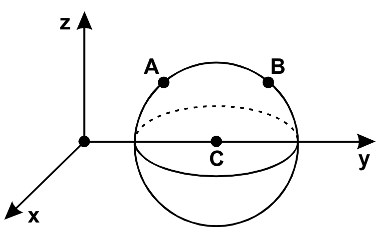
Série B

"Duvidar de tudo ou acreditar em tudo são atitudes preguiçosas. Elas nos dispensam de refletir."
Henri Poincaré - matemático francês.

16. Obter a equação da esfera que passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (3, 1, 5)$ e cujo centro se encontra sobre o eixo y.

Resp.: $x^2 + (y - 15)^2 + z^2 = 230$

SUGESTÃO:



a) Centro da esfera
$C = (0, y, 0)$

b) $d(C, A) = d(C, B)$
$\vdots$
$y = 15$

c) $R = d(C, A) = \sqrt{230}$

17. Uma superfície esférica passa pelos pontos $P_1 = (0, 0, 2)$, $P_2 = (1, 0, 2)$ e $P_3 = (1, 3, 3)$ e tem o centro no plano xz. Calcule a sua equação.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 7)^2 = \frac{101}{4}$$

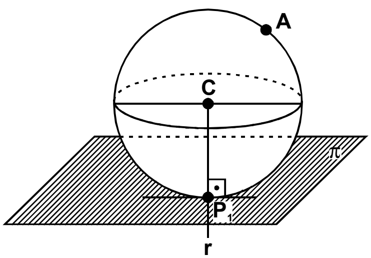
18. Achar a equação da esfera que passa pelos pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 2)$ e $C = (1, 0, 2)$ e cujo centro pertence ao plano xy.

$$\text{Resp.: } (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{21}{4}$$

19. Calcular a equação da esfera que passe pelo ponto $A = (0, 3, 2)$ e tangente ao plano $\pi: x + y - z = 0$ no ponto $P_1 = (0, 1, 1)$.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

SUGESTÃO:



a) Equação de r: lembremos da equação de uma reta que passa por um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e que seja perpendicular ao plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ (vide cap. 8 do livro Álgebra vetorial e G.A.).

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

No exercício em pauta:

$$r: \frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

b) Mas o centro $C = (\alpha, \beta, \gamma) \in r$:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta - 1}{1} = \frac{\gamma - 1}{-1} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = \beta - 1 \\ \beta = -\beta + 2 \end{cases} \qquad (1)$$

c) Mas a $d^2(C, A) = d^2(C, P_1)$

$$(\alpha - 0)^2 + (\beta - 3)^2 + (\gamma - 2)^2 = (\alpha - 0)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2 \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2): $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

d) $R = d(C, P_1) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

20. Uma esfera é passante por $A = (0, 2, 3)$ e tangente ao plano $x + y + z - 3 = 0$ em seu ponto $B = (0, 1, 2)$. Obtenha a equação da esfera.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

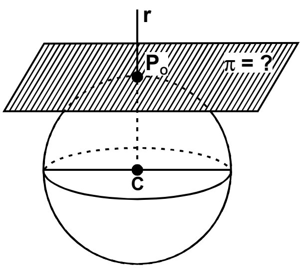
21. Calcular a equação da esfera que passa pelo ponto $A = (2, 3, 5)$ e é tangente ao plano $\pi: x + y + z - 3 = 0$ no ponto $B = (1, 0, 2)$.

$$\text{Resp.: } \left(x - \frac{33}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{14}\right)^2 + \left(z - \frac{47}{14}\right)^2 = \frac{1083}{196}$$

22. Achar a equação do plano π tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2 = 0$ em seu ponto $P_o = (1, 2, 3)$.

Resp.: $\pi: x + y - 3z + 6 = 0$

SUGESTÃO:



a) Cálculo do centro da esfera:
$C = (2, 3, 0)$

b) Equação da reta r (reta por dois pontos: C e P_o):

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-3}$$

Donde $\ell = 1$, $m = 1$ e $n = -3$

c) Equação do plano π: O plano π é perpendicular à reta r (ver cap. 8, do livro Álg. Vetorial e G.A.):

$\pi: \ell x + my + nz + d = 0$

$: 1(x) + 1(y) + (-3)z + d = 0$

Mas $P_o = (1, 2, 3) \in \pi$:
$1(1) + 1(2) - 3(3) + d = 0 \Rightarrow d = 6$

23. Pede-se a equação do plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8z = 0$ na origem do sistema cartesiano.

Resp.: $3x - 4z = 0$

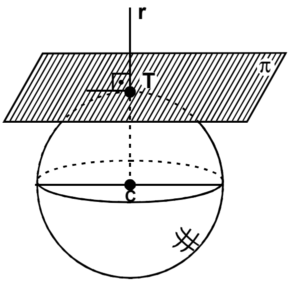
24. Ache o valor de k para que o plano $2x + y - 2z - k = 0$ seja tangente à superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Resp.: $k = \pm 15$

25. A esfera $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2$ e o plano $\pi: y + z - 1 = 0$ são tangentes no ponto T. Calcular as coordenadas de T.

Resp.: $T = (1, 0, 1)$

SUGESTÃO:



a) Centro da esfera
$C = (1, -1, 0)$

b) Cálculo da reta r (reta que passa pelo ponto C e é perpendicular a π):

$$r: \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

c) Cálculo da interseção da reta r com o plano π:

$$\begin{cases} r: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1} \\ \pi: y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima:
$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 1$ (coord. de T).

25. Achar o ponto de tangência T da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $2x + y - 2z - 15 = 0$.

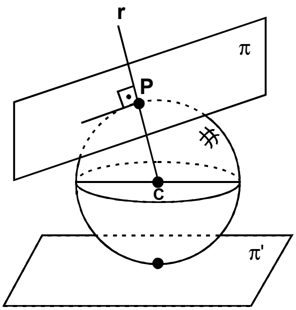
Resp.: $T = \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{-10}{3}\right)$

26. Obter a equação da esfera tangente ao plano $\pi: x + y - 2 = 0$ no ponto $P = (0, 2, 0)$ e também ao plano $\pi': x + z + 1 = 0$.

Resp.: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + z^2 = \frac{2}{9}$$

SUGESTÃO:



a) Cálculo da reta r (reta que passa por P e é perpendicular ao plano π):

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$$

b) Mas $C = (\alpha, \beta, \gamma) \in r$:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta - 2}{1} = \frac{\gamma}{0}$$

$$\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = \alpha + 2 \quad ①$$

c) $d(C, \pi) = d(C, \pi')$

$$\left|\frac{1(\alpha) + 1(\beta) + 0(\gamma) - 2}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{1(\alpha) + 0(\beta) + 1(\gamma) + 1}{\sqrt{2}}\right| \quad ②$$

d) Resolvendo ① e ②:

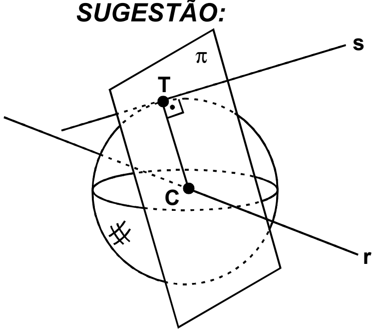
$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow R = d(C, P) = \sqrt{2}$$

$$\alpha' = \frac{-1}{3} \Rightarrow B' = \frac{5}{3} \Rightarrow \gamma' = 0 \Rightarrow R' = d(C', P) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

27. Uma esfera tem o centro na reta $r: x = y = z$ e é tangente à reta $s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$ no ponto $T = (0, 1, 2)$. Calcule a equação da esfera.

Resp.: $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{36}$

SUGESTÃO:



a) Cálculo de π (plano que passa por T e é perpendicular à reta s):

$\pi: 2x + 3y + z + d = 0$

$T \in \pi \Rightarrow 2(0) + 3(1) + 2 + d = 0$

$\Rightarrow d = -5$

$\pi: 2x + 3y + z - 5 = 0$

b) Cálculo de C:

$$\begin{cases} r: \ x = y = z \\ \pi: \ 2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

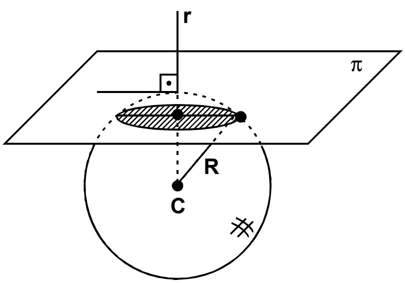
c) Cálculo de R:

$$R = d(C, T) = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

28. Achar o centro e o raio do círculo interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 0$ com o plano $\pi: x + 2z + 1 = 0$.

Resp.: $C' = \left(\frac{11}{5}, 1, \frac{-8}{5}\right)$ e $R' = \frac{\sqrt{170}}{5}$

SUGESTÃO:



a) Centro e raio da esfera:
$C = (3, 1, 0)$ e $R = \sqrt{10}$

b) Cálculo da reta r (reta que passa por C e é perpendicular a π):

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$$

c) Cálculo de C':

$$\begin{cases} r: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z}{2} \\ \pi: \ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$y = 1 \Rightarrow x = \frac{11}{5} \Rightarrow z = \frac{-8}{5} \text{ (coordenadas do centro C')}.$$

d) Cálculo de R':
Pelo Teorema de Pitágoras:
$R'^2 = R^2 - d^2(C, C')$

29. Achar o centro e o raio do círculo interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z = 14$ com o plano $x + y - 4 = 0$.

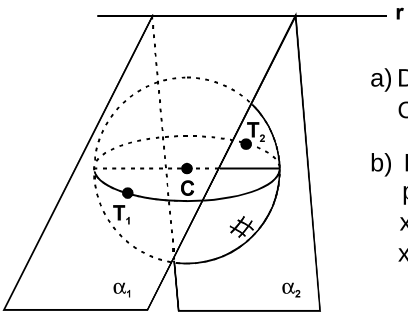
Resp.: $C' = (3, 1, 3)$ e $R' = 5$

30. Obter as equações dos planos conduzidos pela reta

$r: \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e tangentes à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4 = 0$.

Resp.: $x + 2y + z - 5 = 0$ e $2x + y - z - 7 = 0$

SUGESTÃO:



a) Da esfera
$C = (1, -1, 0)$ e $R = \sqrt{6}$

b) Equação do feixe de planos que passam por r:
$x - z - 3 + \lambda(y + z - 1) = 0$ ou
$x + \lambda y + (-1 + \lambda)z - 3 - \lambda = 0$ (plano π)

c) $d(C, \pi) = R$

.
.
.

$\lambda_1 = 2$ ou $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

CRITÉRIOS

O leão reuniu a bicharada, no aprazível córrego da floresta, para definir quem seria o rei da selva.

Sem cerimônias, determinou o único requisito para concorrer:

– Tem que ter juba! Quem tem juba? - Um a um, os animais foram desistindo.

Até que um deles se manifestou:

– Oba! Oba! Eu tenho juba! - saltitou de alegria o mico-leão dourado.

– Você não vale! Você é macaco - rebateu, de pronto, o leão.

Moral da história: muitas vezes, os critérios são estabelecidos ao sabor das conveniências.

Adaptado pelo autor.

OS VERDADEIROS LÍDERES NÃO TÊM O APLAUSO DO SEU TEMPO, MAS O TÊM DA HISTÓRIA.

"Nas veias dos demagogos não corre o leite da ternura humana e sim, o vinagre da burrice ou o veneno da hipocrisia."

Roberto Campos (1917-2001)

Há governantes, líderes comunitários, empresários que vão além do seu tempo, deixando para trás uma maioria míope e reivindicadora. Têm postura de estadistas. São alvos da incompreensão, maledicência, isolamento e agressões. Num movimento pendular sobre suas cabeças, a espada de Dâmocles oscila entre o desagradável e o plausível, este, porém, muitas vezes inconseqüente.

Quando os bons dirigentes propõem mudanças, encontram uma resistência feroz por parte de muitos e o apoio tíbio de uns poucos. Confortam-se com o dever cumprido e com o julgamento da posteridade. Sim, a História – essa "juíza imparcial" – repara injustiças, mas tem o péssimo hábito de andar tão devagar que raramente alcança os grandes líderes emvida.

Há um descompasso entre o aplauso do seu tempo e o aplauso da História. Destarte, o populismo e a demagogia aliciam os líderes fracos como o canto da sereia. "Ainda não descobri a maneira infalível de governar. Mas aprendi a fórmula certa de fracassar: querer agradar a todos, ao mesmo tempo" – discursava apropriadamente John F. Kennedy (1917-1963), meses antes de ser abatido por tiros certeiros em Dallas.

Em 44 a.C., o mais renomado imperador romano, Caio Júlio César, foi atraiçoado por 23 punhaladas, vítima de uma conspiração. Suas palavras derradeiras demonstram antes de tudo um coração dilacerado pela ingratidão, especialmente de Brutus, filho único e adotivo: Tu quoque, Brutus, fili mi! (Até tu, Brutus, filho meu!).

"Você pode enganar todo o povo durante algum tempo e parte do povo durante todo o tempo, mas não pode enganar todo o povo todo o tempo"– se faz oportuno Abraham Lincoln, o mais venerado presidente dos EUA. Poucos desconhecem as suas vicissitudes: perdeu para Deputado Estadual, Deputado Federal, Senador e foi assassinado por um fanático sulista em um teatro de Washington. Lincoln costumava repetir que se fosse responder a todas as críticas que lhe eram dirigidas, não trataria demais nada.

Winston Churchill, ao assumir o governo de coalizão em 1940, proclamou em seu histórico discurso: I have nothing to offer but blood, toil, sweat and tears (Eu não tenho nada a oferecer, a não ser sangue, trabalho, suor e lágrimas). Churchill hodiernamente considerado o maior líder do século XX, conheceu o gosto amargo do ostracismo e da ingratidão dos ingleses: sofreu derrotas em 4 eleições.

E o que dizer do maior estadista indiano? Para Mahatma Gandhi, a pobreza é a pior forma de violência. Acusado de traidor por fanáticos hindus, em 1948 foi vitimado pelas balas de um deles. Logo ele, o apóstolo da não-violência, que costumava catequizar: "olho por olho e o mundo acabará inteiramente cego."

Também se faz apropriado uma breve incursão no reino animal. Em algumas regiões inóspitas da Ásia, há manadas de cavalos selvagens que galopam céleres as pradarias e montanhas guiados por um deles. É o cavalo líder e, quando este expõe os demais a uma situação de grande risco de vida, toda a tropa golpeia o líder com coices e patadas.

Um bando de macacos sempre escolhe um líder-olheiro, experiente e vivaz. Este é severamente punido se for negligente, não alertando a tempo a iminência de um perigo ou razia.

Se os animais são implacáveis com os erros e omissões de suas lideranças, nós, racionais, não deixamos por menos: defenestramos governantes. Collor e De la Rua são os exemplos mais eloqüentes.

Parafraseando Dante, os piores lugares do inferno deveriam ser reservados a governantes populistas, pois geram miséria, inflação e comprometem gerações. O conspícuo filósofo grego Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) já advertia que "a demagogia é a perversão da democracia".

É indispensável que o Presidente da República mantenha a sanidade da moeda. A inflação, de acordo com a tese publicada por Joelmir Beting, é a principal motivadora de desigualdades. Um massacre social consentido que durou 30 anos: 1,1 quatrilhão por cento de inflação no período de 1964 a 1994! Não tendo conta em banco, os mais pobres não podiam usufruir dos benefícios da correção monetária.

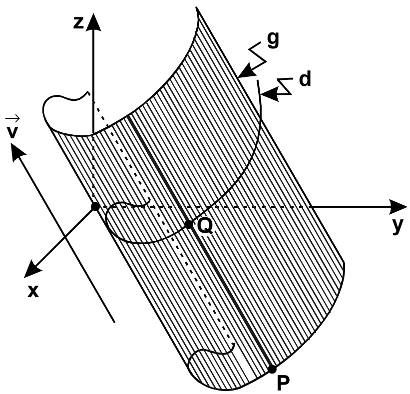
Do autor

CAPÍTULO 10

Superfície Cilíndrica

1. DEFINIÇÃO

Superfície cilíndrica ou cilindro é a superfície gerada por uma reta móvel (denominada geratriz) que se apóia sobre uma curva fixa (denominada diretriz), conservando-se paralela a uma direção dada.



Na figura ao lado tem-se:

Diretriz: a diretriz **d** é representada por uma curva plana fixa no E^3. A diretriz é dada pela interseção de 2 superfícies:

$$d\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Geratriz: a geratriz **g** é a reta móvel, cuja direção é a do vetor $\vec{v} = (\ell, m, n)$ e que desliza sobre a diretriz, mantendo a sua direção. Na figura limitou-se o comprimento das geratrizes, mas deve ficar entendido que elas se prolongam indefinidamente.

A superfície cilíndrica pode ser circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica, conforme a diretriz seja um círculo, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Em particular, se a diretriz for uma reta a superfície cilíndrica é um plano.

2. EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Retornando à figura, considere:

P = (X, Y, Z) um ponto genérico pertence à geratriz;

Q = (x, y, z) o ponto de interseção da diretriz **d** com a geratriz que passa por P.

Os vetores (Q – P) e $\vec{v}$ são paralelos:

$(Q - P) = t\vec{v}$

$\mathbf{Q = P + t\vec{v}}$

Substituindo as coordenadas cartesianas:

$$x = X + \ell t$$
$$y = Y + mt$$
$$z = Z + nt$$

Tais equações denominadas de **paramétricas** são levadas nas equações da diretriz:

$$d \begin{cases} f_1(X + \ell t, Y + mt, Z + nt) = 0 \\ f_2(X + \ell t, Y + mt, Z + nt) = 0 \end{cases}$$

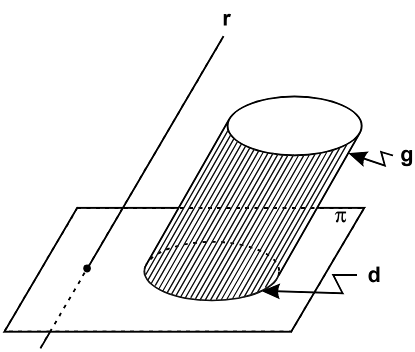
Numa das equações acima isola-se o parâmetro **t**, o qual é substituído na outra equação, obtendo-se a superfície cilíndrica correspondente, que assume a forma $F = (X, Y, Z) = 0$.

Exercício Resolvido

"Seja você mesmo, mas não seja sempre o mesmo."
Gabriel, o Pensador.

Achar a equação do cilindro de geratrizes paralelas à reta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ e cuja diretriz é a curva de interseção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $\pi: x - y + z = 0$.

RESOLUÇÃO:



A interseção do plano π com a esfera é uma circunferência, que constitui a diretriz.

a) Equação paramétricas
Da reta r obtém-se:
$\ell = 1$, $m = 3$ e $n = 1$

Então:
$$x = X + 1 \cdot t$$
$$y = Y + 3 \cdot t$$
$$z = Z + 1 \cdot t$$

b) A diretriz é representada pelas equações:

$$d\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

c) Substituindo as equação paramétricas em d:

$$d\begin{cases} (X+t)^2 + (Y+3t)^2 + (Z+t)^2 = 4 & (1) \\ (X+t) - (Y+3t) + (Z+t) = 0 & (2) \end{cases}$$

d) Equação da superfície cilíndrica:
Isolando "t" de (2):
$t = X - Y + Z$ (3)

Levando (3) em (1):
$(2X - Y + Z)^2 + (3X - 2Y + 3Z)^2 + (X - Y + 2Z)^2 = 4$

ou desenvolvendo-se os quadrados:
$\mathbf{7X^2 + 3Y^2 + 7Z^2 - 9XY + 13XZ - 9YZ - 2 = 0}$
(Equação que representa uma superfície circular de diretrizes paralelas à reta r).

Exercícios

"A coisa mais importante que um pai pode fazer pelos filhos é amar a mãe deles."
H. Jackson Brown

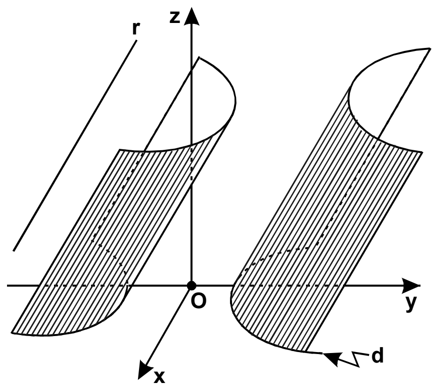
01. Achar a equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao vetor $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e cuja diretriz seja a curva de interseção do plano $x - y + z = 0$ com a superfície quádrica $x = yz$.

Resp.: $X^2 + 2Y^2 + Y - Z - 3XY + XZ - YZ = 0$

02. Determinar a equação de uma superfície cilíndrica cuja diretriz é a hipérbole $4x^2 - y^2 = 3$, no plano xy, e cujas geratrizes são paralelas à reta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

Resp.: $4X^2 - Y^2 + \frac{15}{4}Z^2 + 8XZ - YZ - 3 = 0$

SUGESTÃO:



a) Equações da diretriz:

$$d\begin{cases}4x^2 - y^2 = 3\\ z = 0\end{cases}$$

b) Equações paramétricas:

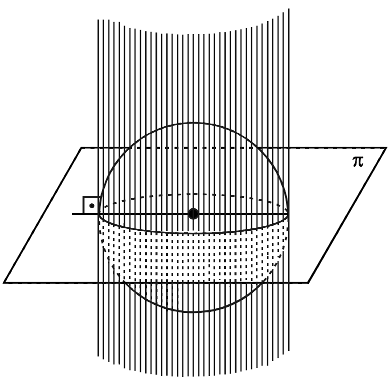
$$\begin{cases}x = X + 2t\\ y = Y + 1t\\ z = Z - 2t\end{cases}$$

c) Substitua as equações paramétricas nas equações da diretriz.

03. A diretriz de uma superfície cilíndrica é a curva interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano π: $x + y - z = 0$. As geratrizes são perpendiculares ao plano π. Escrever a equação da superfície cilíndrica.

Resp.: $X^2 + Y^2 + Z^2 - XY + XZ + YZ - 6 = 0$

SUGESTÃO:



Lembrar-se da condição de ortogonalidade de reta e plano:

$\ell = a = 1, m = b = 1$ e

$n = c = -1$

04. Calcular a equação da superfície cilíndrica cujas geratrizes são perpendiculares ao plano $2x + y + 3z + 5 = 0$ e cuja diretriz é a curva

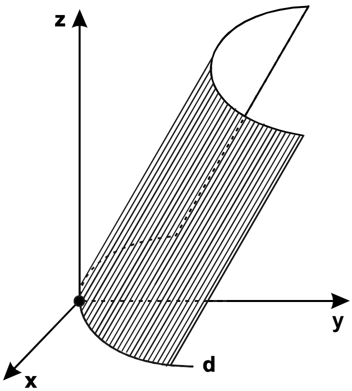
$$d\begin{cases} x^2 - xy^2 + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resp.: $(3X - 2Z)^3 - (3X - 2Z)(3Y - Z)^2 + 54 = 0$
(Não é superfície quádrica)

05. A equação $9x^2 + z^2 - 6xz - 27y + 9z = 0$ representa uma superfície cilíndrica. Determinar a equação da diretriz no plano xy.

Resp.: $d\begin{cases} x^2 = 3y \\ z = 0 \end{cases}$

SUGESTÃO:

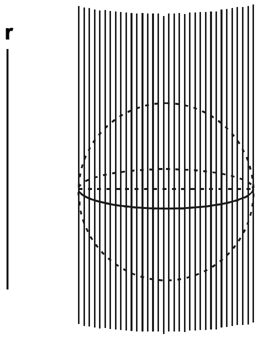


Só para efeito de ilustração (sem preocupação de escala), observe a figura: trata-se de uma superfície cilíndrica parabólica, cuja diretriz é a parábola $x^2 = 3y$ no plano xy (de equação $z = 0$).

06. Calcular a equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas à reta $r: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$ e circunscreve a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resp.: $2X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2 = 0$

SUGESTÃO:



a) Equação paramétricas

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + t \\ z = Z + t \end{cases}$$

b) Substituindo as equações paramétricas na equação da esfera, obtém-se uma equação do 2.º grau em **t**. A condição de tangência é que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ da equação do 2.º grau em **t** seja nulo.

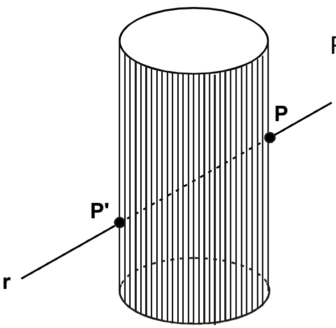
07. Achar a equação da superfície cilíndrica circunscrita ao parabolóide $x = y^2 + z^2$ e cujas geratrizes sejam paralelas à reta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Resp.: $36Y^2 + 16Z^2 - 52X + 8Y + 12Z - 48YZ - 1 = 0$

08. Pede-se a equação do cilindro cujas geratrizes têm a direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e que circunscreva a superfície quádrica $x^2 + y^2 + 2xz - 2 = 0$.

Resp.: $X^2 + Y^2 - Z^2 + 2XY + 2YZ + 2XZ - 4 = 0$

09. A figura abaixo representa uma superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 36 = 0$. Achar as coordenadas dos pontos P e P', interseção da superfície cilíndrica com a reta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.



Resp.: $P = (4, 4, 2)$ e $P' = (-4, -4, -2)$

SUGESTÃO:

Na equação dada faz-se $x = 2z$ e $y = 2z$.

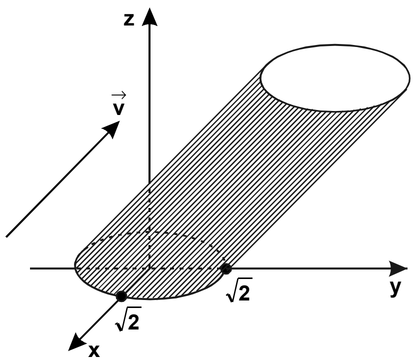
Série B

"Suaviter in modo, fortiter in re."
(Suave no modo, forte na ação) – Aforisma latino.

10. Calcular a direção das geratrizes do cilindro $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 2yz - 2 = 0$. Achar também a equação da diretriz no plano xy.

Resp.: $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $d \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \text{ (círculo)} \\ z = 0 \end{cases}$

SUGESTÃO:



a) Cortamos a superfície cilíndrica com um dos planos coordenados. Seja xy tal plano, de equação z = 0. A diretriz tem equação:

$$d \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

b) O vetor $\vec{v} = (\ell', m', n')$ procurado tem coordenadas proporcionais, e ipso facto, uma das coordenadas pode ser reduzida à unidade:
$\vec{v} = (\ell, m, 1)$.

c) Equações paramétricas:

$$x = X + \ell t$$
$$y = Y + mt$$
$$z = Z + 1t$$

d) Levando as equações paramétricas nas equações da diretriz:

$$d \begin{cases} Z + t = 0 \Rightarrow t = -Z \quad (1) \\ (X + t)^2 + (Y + mt)^2 - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

e) Substituindo ① em ②:

$(X - Zt)^2 + (Y - Zt)^2 - 2 = 0$

desenvolvendo:

$X^2 + Y^2 + (\ell^2 + m^2)Z^2 - 2\ell XZ - 2mYZ - 2 = 0$

f) Comparando esta equação com a equação dada:

$$\begin{cases} \ell^2 + m^2 = 2 & ③ \\ -2\ell = -2 \Rightarrow \ \ell = 1 \\ -2m = 2 \ \Rightarrow \ m = -1 \end{cases}$$

O sistema é compatível, pois $\ell = 1$ e $m = -1$ verificam a equação ③ e destarte $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

OBSERVAÇÃO:
Para $z = 0$, tem-se a equação da diretriz no plano xy: $x^2 + y^2 = 2$, que representa um círculo de centro na origem e $R = \sqrt{2}$. Isto posto, a equação dada representa uma superfície cilíndrica circular cujas geratrizes têm a direção do vetor $\vec{v} = (1, -1, 1)$. Na figura, ao se representar o vetor $\vec{v}$, não houve a preocupação quanto à sua escala. Se o sistema não fosse compatível, a superfície dada não seria cilíndrica.

11. Determinar a reta que passa por $P = (1, 5, -3)$ e que dá a direção das geratrizes do cilindro $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 + z - 2y = 0$.

Resp.: $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+3}{2}$

12. Pergunta-se se a equação $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz + 3 = 0$ representa uma superfície cilíndrica?

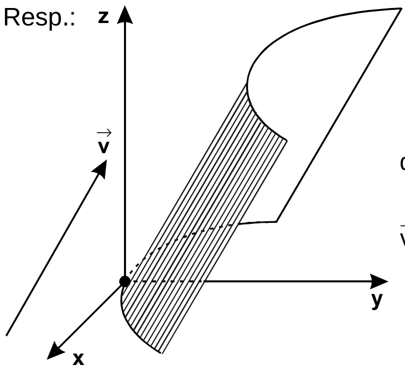
Resp.: A equação dada é a de uma superfície cilíndrica.

13. Verificar se a equação $3x^2 - 6x - 3y - yz + 3 = 0$ representa uma superfície cilíndrica.

Resp.: A equação dada **não** é a de uma superfície cilíndrica (o sistema não é compatível). Veremos no próximo capítulo que se trata de uma superfície cônica.

14. Calcule a diretriz (no plano xy), a geratriz e esboce o gráfico da superfície cilíndrica $16x^2 + z^2 - 8xz - 48y + 12z = 0$.

Resp.:



$$d \begin{cases} x^2 = 3y \\ z = 0 \end{cases}$$

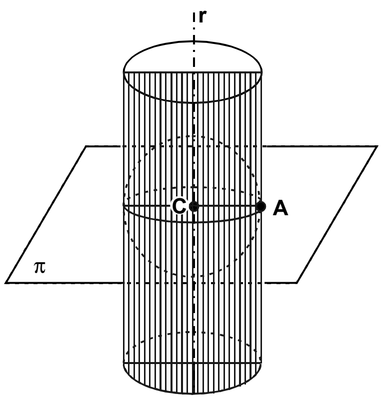
$$\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) \text{ ou } \vec{v} = (1, 1, 4)$$

15. Achar a equação da superfície cilíndrica de rotação que passa pelo ponto $A = (2, 0, 1)$ e que tem para eixo a reta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+2}{1}$.

Resp.: $X^2 + 2Y^2 + Z^2 - 2XZ - 6X + 8Y + 6Z + 5 = 0$

SUGESTÃO:

A superfície cilíndrica procurada circunscreve uma esfera de centro $C \in \pi$ e cujo $R = d(C, A)$.



a) Cálculo do plano π (passa por A e é perpendicular a r):
$\pi: 1(x) + 0(y) + 1(z) + d = 0$
Mas $A \in \pi: 1(2) + 0(0) + 1(1) +$
$+ d = 0 \Rightarrow d = -3$
$\pi: x + z - 3 = 0$

b) Equação da esfera:
Cálculo de C ($\cap$ de π com r)

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = -2 + t \end{cases}$$

c) Substituindo as equações paramétricas de r na equação de π, obtém-se $t = 2$ e $C = (3, -2, 0)$. Por sua vez $R = d(C, A) = \sqrt{6}$. Destarte, a esfera tem equação $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2 = 6$.

d) Equações paramétricas das geratrizes (paralelas a r):

$$\begin{cases} x = X + t \\ y = Y \\ z = Z + t \end{cases}$$

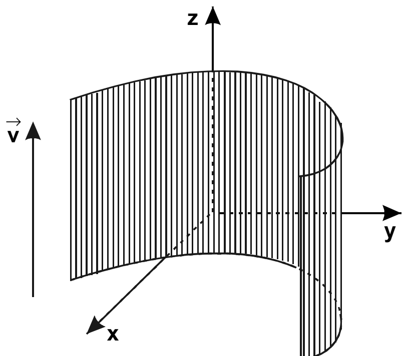
Substituindo as equações paramétricas acima na equação da esfera obtém-se uma equação do 2.º grau em **t**. Condição de tangência: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

3. SUPERFÍCIE CILÍNDRICA DE GERATRIZES PARALELAS AOS EIXOS CARTESIANOS

Teoria:

Abordaremos um tipo particular de superfície cilíndrica com relevante interesse para o Cálculo Diferencial e Integral:

No espaço tridimensional, uma equação cartesiana a duas variáveis representa uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo da coordenada ausente.



Isto posto, a equação $f(x, y) = 0$ representa uma superfície cilíndrica cujas geratrizes têm a direção do eixo z.

A justificativa teórica do que se expõe procede do fato de que as geratrizes sendo paralelas ao eixo z têm a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, n)$. Destarte, no desenvolvimento da teoria no início do presente capítulo substitua o vetor $\vec{v} = (\ell, m, n)$ por $\vec{v} = (0, 0, n)$.

Importante:

A equação $f(x, y) = 0$ apresenta uma dupla interpretação:

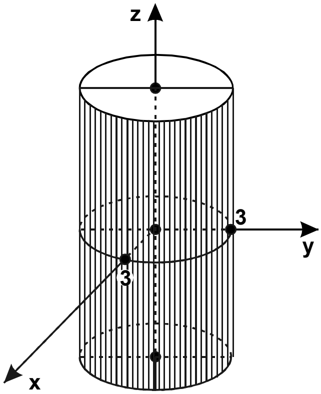
I) No E^2, $f(x, y) = 0$ representa uma curva no plano xy;

II) No E^3, $f(x, y) = 0$ representa uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo z e curva diretriz d $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Exemplos

"Na verdade, estar só é bom quando a gente quer, não quando falta companhia."

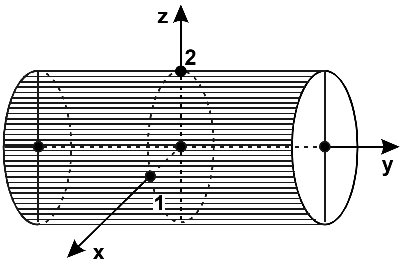
Roberto Shinyashiki (n.1952), psicoterapeuta e escritor.



1. A equação $x^2 + y^2 = 9$ representa no E^3 uma superfície cilíndrica circular, cuja diretriz é um círculo no plano xy (centro na origem e R = 3) e as geratrizes são paralelas ao eixo z.

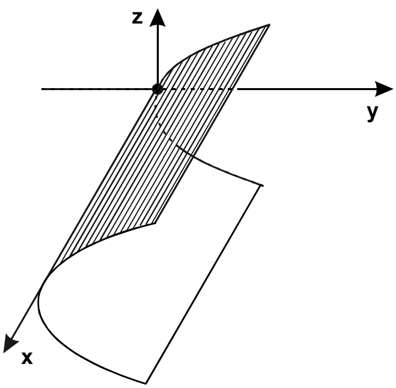
Enfatizando:

$$d \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$



2. A superfície $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$ tem como diretriz uma elipse no plano xz (com a = 2 e b = 1) e as geratrizes são paralelas ao eixo y.
Destaque-se que:

$$d \begin{cases} \frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



3. A superfície $z^2 = 2y$ tem como diretriz uma parábola no plano yz e cujas geratrizes são paralelas ao eixo x.
Equação da diretriz:

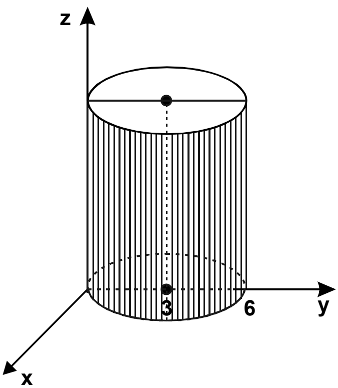
$$d \begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO:
Cumpre salientar, como é do seu conhecimento, que especificamente no $\mathbf{E}^2$, as equações $x^2 + y^2 = 9$, $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$ e $z^2 = 2y$ representam **cônicas** (respectivamente círculo, elipse e parábola).

Exercícios

"As mulheres foram feitas para serem amadas e não compreendidas."
Oscar Wilde (1854-1900), escritor inglês de origem irlandesa.

01. Abaixo figura-se uma superfície cilíndrica **circular**, cujas geratrizes são paralelas ao eixo z. Determine a equação da superfície cilíndrica e a equação de sua diretriz.

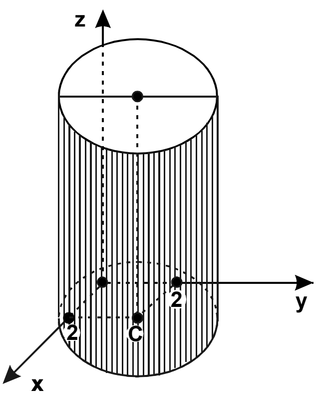


Resp.: $x^2 + y^2 - 6y = 0$ e

$$d \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

02. Representar a superfície cilíndrica $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Resp.:

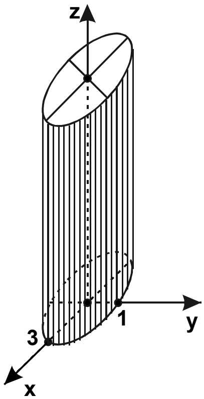


A superfície cilíndrica é **circular** e tem por diretriz uma circunferência no plano xy, C = (2, 2), R = 3 e geratrizes paralelas ao eixo z.

$$d \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

03. Representar a superfície cilíndrica $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ e achar a equação da diretriz.

Resp.:

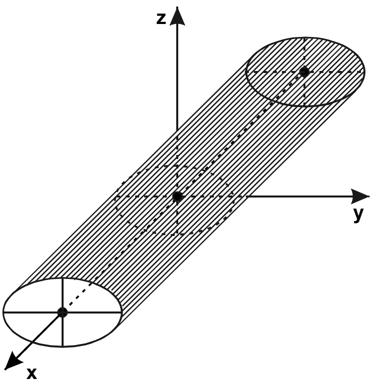


Superfície cilíndrica elíptica com geratrizes paralelas ao eixo z. A diretriz é uma elipse com centro em O = (0, 0), a = 3 e b = 1.

Equação da diretriz: $d\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1\\ z=0\end{cases}$

04. Figurar a superfície cilíndrica $2y^2+3z^2=3$.

Resp.:

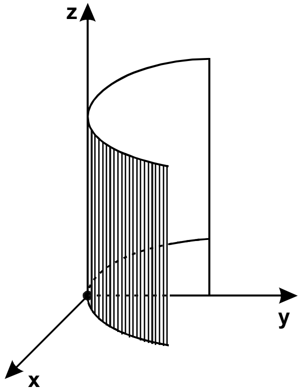


Trata-se de uma superfície cilíndrica elíptica em que o traço no plano yz é uma elipse com $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $b=1$ e as geratrizes são paralelas ao eixo das abscissas.

Equação da diretriz: $d\begin{cases}2y^2+3z^2=3\\ x=0\end{cases}$

05. Esboce o gráfico da superfície quádrica $y = 2x^2$.

Resp.:

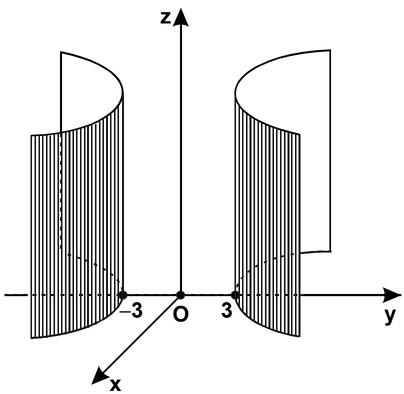


É uma superfície cilíndrica parabólica, cuja diretriz é a parábola $y = 2x^2$, pertencente ao plano xy e as geratrizes são paralelas ao eixo z.

Equação da diretriz: $d \begin{cases} y = 2x^2 \\ z = 0 \end{cases}$

06. Figurar a superfície $y^2 - x^2 = 9$

Resp.:



Superfície cilíndrica hiperbólica cuja diretriz é a hipérbole $y^2 - x^2 = 9$ no plano xy e as geratrizes são paralelas ao eixo coordenado z.

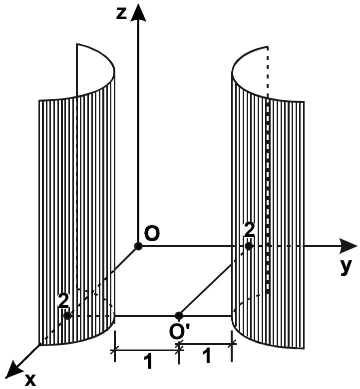
A hipérbole tem

$O = (0, 0)$ e $a = b = 3$.

Equação da diretriz: $d \begin{cases} y^2 - x^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$

07. Esboçar a superfície $(y - 2)^2 - (x - 2)^2 = 1$ e calcular a equação da diretriz.

Resp.:

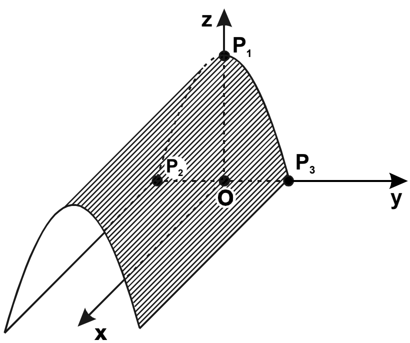


Superfície cilíndrica hiperbólica de geratrizes paralelas ao eixo z. A hipérbole pertence ao plano xy e tem O' = (2, 2) e a = b = 1.

Equação da diretriz: $d \begin{cases} (y-2)^2 - (x-2)^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

08. Esboce o gráfico da superfície cilíndrica $y^2 = 5 - z$. Ache os pontos de interseção com os eixos cartesianos.

Resp.:



É uma superfície cilíndrica parabólica cuja diretriz é a parábola $y^2 = 5 - z$ (de concavidade voltada para baixo) pertencente ao plano yz e geratrizes paralelas ao eixo x.

Equação da diretriz: $d \begin{cases} y^2 = 5 - z \\ x = 0 \end{cases}$

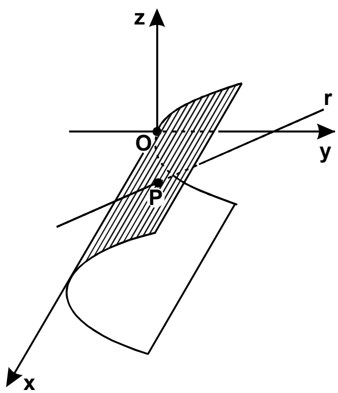
Pontos de interseção com os eixos:

$P_1 = (0, 0, 5)$; $P_2 = (0, -\sqrt{5}, 0)$ e $P_3 = (0, \sqrt{5}, 0)$

09. Achar as coordenadas do ponto P, interseção da superfície cilíndrica $y = z^2$ com a reta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{0}$.

Resp.: $P = (15, 16, 4)$

SUGESTÃO:



a) Equações paramétricas de r:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \qquad (1) \\ z = 4 \end{cases}$$

b) Substituir (1) na equação da superfície cilíndrica:
$2 + t = (4)^2 \Rightarrow t = 14 \quad (2)$

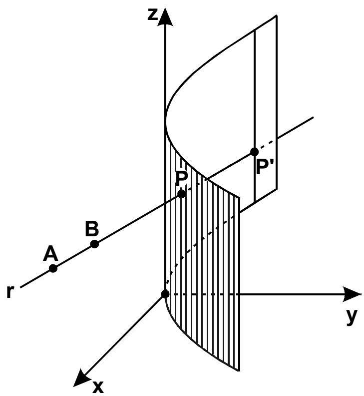
c) Levar (2) em (1).

OBSERVAÇÃO:
A reta r é paralela ao plano xy.

10. Achar as coordenadas dos pontos de interseção da superfície quádrica $x^2 - y^2 + 2z^2 + 1 = 0$ com a reta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$.

Resp.: $P = (-4, 5, 2)$ e $P' = (-25, 26, -5)$

11. Calcular os pontos de interseção da superfície cilíndrica parabólica de equação $x^2 = 4y$, presentemente representada com a reta que passa pelos pontos A = (11, 4, 2) e B = (5, 2, 2).



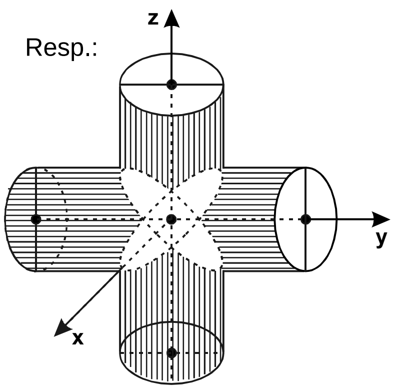
Resp.: $P = (2, 1, 2)$ e

$$P' = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{9}, 2\right)$$

12. Representar num sistema cartesiano do E^3 as equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Resp.:



2 cilindros cujo raio é 2.

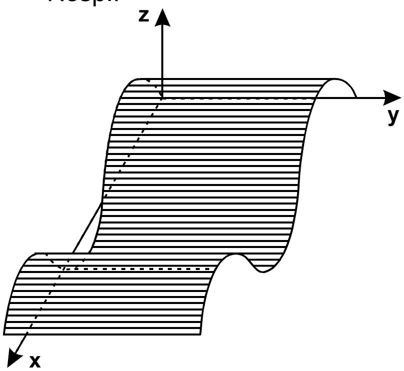
OBSERVAÇÃO:
Os cilindros secionam-se segundo duas elipses.

Série B

"Alguns homens parecem ter vindo ao mundo para fecundá-lo com suor e lágrimas. Surgem na face do planeta com a mais nobre e mais bela das intenções: a de torná-lo melhor. Semeiam o bem e plantam a bondade, pela palavra e pelo exemplo."
João Manoel Simões (n.1938), advogado
e escritor português radicado no Paraná.

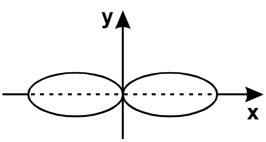
13. Representar a superfície z = sen x.

Resp.:

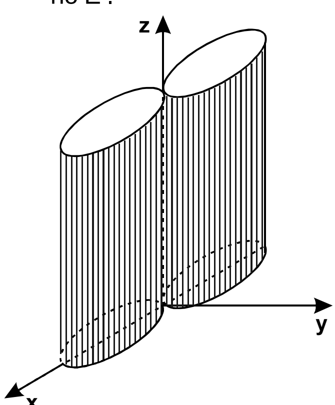


É uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo y e cuja diretriz é um senóide no plano xz (lembra uma placa ondulada de fibro-cimento).

14. A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ensina que a equação $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ - ao lado figurada - representa no E^2 uma curva denominada lemniscata (do grego - λεμνισ - que significa ornato, traço de fita). Representar esta mesma equação no E^3.



Resp.:



A IMPRENSA DE GUTENBERG E A INTERNET

" Meus filhos terão computadores sim, mas antes terão livros ".

(Bill Gates)

Até meados do séc. XV, a reprodução do conhecimento se fazia essencialmente através dos monges copistas, pontuados em algumas dezenas de mosteiros e universidades.

Em 1455, o ourives alemão Johann Gutenberg (c. 1437-1468) inventou a tipografia, cabendo-lhe o mérito de ser o primeiro (pelo menos no Ocidente) a utilizar tipos móveis metálicos feitos de uma liga especial de chumbo, estanho e antimônio. Projetou um novo tipo de prensa, baseada naquelas usadas para espremer uvas. Preparou uma tinta especial, à prova de borrões. Este sistema operacional de impressão funcionou tão bem que perdurou praticamente inalterado até 1811, quando outro alemão, Friedrich Koenig, substituiu a mesa de pressão por um cilindro com acionamento a vapor e capaz da fantástica tiragem de 1.100 cópias por hora.

Gutenberg dedicou um ano e meio para imprimir 200 lindíssimas Bíblias de 1282 páginas escritas em latim, utilizando tipos góticos com iluminuras. Sobreviveram apenas 12, impressas empergaminho.

Tive a ventura de conhecer um exemplar na mansão de Huntington, em Los Angeles. Confesso que fiquei extasiado diante de sua beleza plástica e gráfica. Obra de artista e gênio. Henry Huntington adquiriu esta preciosidade em 1919 pela bagatela de US$ 50.000.

– Quanto vale hoje? perguntei.

– Não há dinheiro que remova essa raridade respondeu solicitamente a diretora da Huntington Library.

Com a imprensa, o mundo sofreu uma vigorosa transformação e, de pronto, influiu extraordinariamente sobre o Renascimento. Tamanho foi o alcance e a influência da tipografia de Gutenberg, que foi considerada a maior revolução tecnológica do milênio, pois propiciou a democratização do conhecimento, com impressão emescala de livros e jornais.

Nessa época, a Europa possuía cerca de 50 milhões de habitantes. Só 15% sabiam ler, pois raramente conseguiam livros. O engenho de Gutenberg se propagou espantosamente e fez dobrar em poucos anos o número de europeus alfabetizados. Em1500, já circulavameiomilhão de livros.

Se vivemos hoje a Era do Conhecimento, é porque alçamos sobre ombros de gigantes do passado. A Internet representa um poderoso agente de transformação do nosso **modus vivendi et operandi**.

É um marco histórico, um dos maiores fenômenos de comunicação e uma das mais democráticas formas de acesso ao saber e à pesquisa. Mas, como toda a inovação, cabem ressalvas. Tem potencial, cuja medida não deve ser superdimensionada.

Seu conteúdo é fragmentado, desordenado e além do que cerca de metade de seus bites é descartável, é entulho, é lixo. Bem-vinda a Internet 2, a banda larga, a Web sem fio (wireless).

Segundo o Ibope, atualmente 80% dos brasileiros usuários da rede são das classes A/B; 16% da classe C; 4% das classes D/E. O alento vem por conta do aporte de novos internautas na população menos aquinhoada. "O importante se faz oportuno Joelmir Beting é organizar ações coletivas públicas e privadas, para que tenhamos a difusão dos micros e dos softwares didáticos no rodapé da pirâmide social".

Vivemos ainda uma fase de exclusão digital. Longe, portanto, do **homo digitalis**. Estudo da ONU relata que apenas 5% da população mundial usam o colorido mundo do www e que em apenas 6 países (EUA, Japão, Reino Unido, Alemanha, Canadá e Itália) concentram-se 82% dos internautas do mundo. Destarte, é falaciosa e prematura a assertiva de que o acesso on line representa um poderoso nivelador de oportunidades entre ricos e pobres. O gueto tecnológico e a estrutura de desigualdades sócio-educacionais entre os países permanecem inalterados.

"Aprender é como parto: é uma coisa linda, mas dói", ensina Pedro Demo. E não é barato! Ademais, para retirar uma comunidade do atraso não basta o aporte substancioso de recursos tecnológicos e financeiros. Requer pessoas comprometidas e altruístas, para alterar a cultura e o **status quo** de latência, apatia e sem iniciativas. Requer professores motivados, entusiasmados, com disposição alegre e com visão holística. Sem isso, é exigir que a comunidade levante seu corpo puxando os próprios cabelos.

Do Autor

CAPÍTULO 11

Superfície Cônica

1. DEFINIÇÃO

Superfície cônica ou cone é a superfície gerada por uma reta móvel (denominada geratriz) passante por um ponto fixo (vértice) e que se apóia numa curva dada (diretriz).

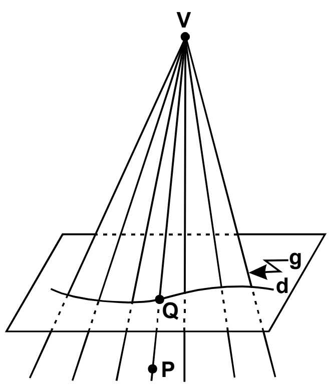
A diretriz **d** é representada por uma curva plana, fruto da interseção de duas superfícies:

$$d \begin{cases} f_1\,(x\,,\,y,\,z) = 0 \\ f_2\,(x\,,\,y,\,z) = 0 \end{cases}$$

Sendo a diretriz uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, ter-se-á respectivamente uma superfície cônica circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica. Quando a diretriz for uma reta, a superfície cônica se degenera num plano.

O vértice separa a superfície cônica em duas partes distintas, denominadas **folhas** e que são opostas pelo vértice. Em nome da simplificação, os cones são figurados costumeiramente apenas com uma folha, porém deve-se sempre admitir a existência de duas folhas.

2. EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE CÔNICA



Sejam:

P = (X, Y, Z) um ponto genérico pertencente à geratriz;

Q = (x, y, z) o ponto de interseção da geratriz que passa por P com a diretriz;

V = (x_o, y_o, z_o) as coordenadas do vértice V.

Na figura os vetores (Q – V) e (P – V) são paralelos:

(Q – V) = (P – V)t

Isolando-se Q:

Q = V + (P – V)t

Substituindo-se as coordenadas tem-se as **equações paramétricas:**

$$\mathbf{x = y_o + (X - x_o)t}$$
$$\mathbf{y = y_o + (Y - y_o)t}$$
$$\mathbf{z = z_o + (Z - z_o)t}$$

Tais equações são levadas nas equações da diretriz:

$$d\begin{cases} f_1(x_o + (X - x_o)t, y_o + (Y - y_o)t, z_o + (Z - z_o)t) = 0 \\ f_2(x_o + (X - x_o)t, y_o + (Y - y_o)t, z_o + (Z - z_o)t) = 0 \end{cases}$$

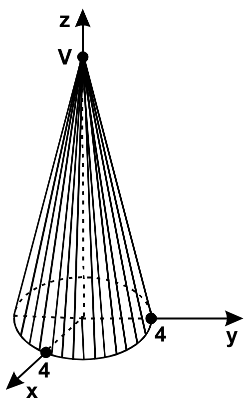
Numa das equações acima isola-se o parâmetro **t**, o qual é substituído na outra equação obtendo-se a superfície cônica correspondente, que assume a forma $F(X, Y, Z) = 0$.

Exercício Resolvido

"O céu não conhece fúria igual ao amor transformado em ódio."
Willian Congreve (1670-1729), dramaturgo inglês.

Calcular a equação da superfície cônica de $V = (0, 0, 5)$ e cuja diretriz é $d\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:



a) Equações paramétricas:

$$x = 0 + (X - 0)t = Xt$$
$$y = 0 + (Y - 0) = Yt$$
$$z = 5 + (Z - 5)t$$

b) Substituindo as equações paramétricas nas equações da diretriz:

$$d\begin{cases} X^2t^2 + Y^2t^2 = 16 & (1) \\ 5 + (Z - 5)t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{5}{5 - Z} & (2) \end{cases}$$

c) Levando ② em ①:

$$X^2\left(\frac{5}{5-Z}\right)^2 + y^2\left(\frac{5}{5-Z}\right)^2 = 16$$

desenvolvendo:

$$\mathbf{25X^2 + 25Y^2 - 16Z^2 + 160Z - 400 = 0}$$

A equação acima representa um cone. Trata-se de uma superfície quádrica. Rememoremos, porém, que nem sempre superfícies cilíndricas e cônicas constituem quádricas.

Exercícios

"Os que nada fazem supõem-se capazes de tudo fazer."
Spencer Tracy (1900-1967), ator norte-americano.

01. Calcular a equação da superfície cônica de V = (0, 0, –3) e cuja diretriz é o círculo d $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Resp.: $3X^2 + 3Y^2 - 2XZ - 6X = 0$

02. Determinar a equação do cone de V = (0, 1, 2) e diretriz o círculo $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

Resp.: $X^2 + Y^2 - 2XY + 2Y + 2Z - 3 = 0$

03. Pede-se a equação da superfície cônica com vértice na origem e cuja diretriz é a parábola $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$

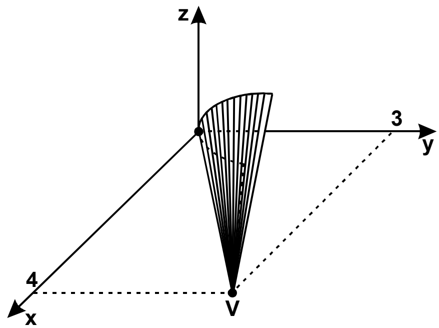
Resp.: $4X^2 - XY - YZ = 0$

04. Achar a equação da superfície cônica cujo vértice é V = (0, 0, 0) e diretriz a hipérbole $\begin{cases} xy = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

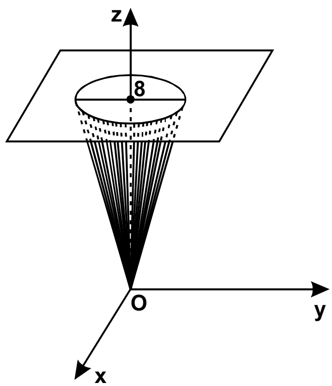
Resp.: $9XY = Z^2$

05. Representar a superfície cônica de V = (4, 3, 0) e d $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$

Resp.:



06. Calcular a equação do cone figurado, em que V = O = (0, 0, 0) e o plano z = 8 corta o cone segundo uma elipse de equação $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1.$

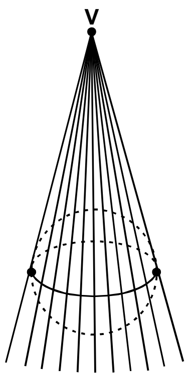


Resp.: $X^2 + 16Y^2 - Z^2 = 0$

07. Equação do cone de vértice na origem do sistema cartesiano e circunscrito à esfera $x^2 + y^2 + z^2 + x + y - z - 2 = 0$.

Resp.: $9X^2 + 9Y^2 + 9Z^2 + 2XY - 2YZ - 2XZ = 0$

SUGESTÃO:



a) Equações paramétricas:
$x = 0 + (X - 0)t = Xt$
$y = 0 + (Y - 0)t = Yt$
$z = 0 + (Z - 0)t = Zt$

b) Levando-se as equações paramétricas na equação da esfera e fatorando o parâmetro t:
$(X^2 + Y^2 + Z^2)t^2 + (X + Y - Z)t - 2 = 0$

c) A superfície será tangente à esfera se o discriminante da equação do 2.º grau em **t** for nulo:
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
$(X + Y - Z)^2 - 4(-2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$
Desenvolvendo tem-se a resposta.

Série B

"Não basta que a mulher de César seja honesta. Tem que parecer honesta."
Mote dos antigos romanos.

08. Equação da superfície cônica de V = (1, 2, 0) e circunscrita à superfície $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$

Resp.: $8X^2 + 2Y^2 - 9Z^2 - 8XY = 0$

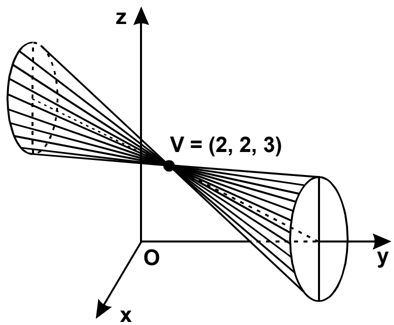
09. Calcular a equação do cone de V = (0, 0, 1) e circunscrita a uma esfera tangente ao plano xy e cujo centro é C = (2, –2, 3).

Resp.: $2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 - 16XY + 16XZ - 16YZ - 16X + 16Y - 4Z + 2 = 0$

10. Achar a eq. da superfície cônica de $V = (1, 0, 0)$ e cuja diretriz é a interseção da superfície $x = y^2 + z^2$ com o plano $y + z - 2 = 0$.

Resp.: $3Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ + 2Y + 2Z = 0$

11. Determinar a equação do cone representado ao lado, cuja diretriz $d \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

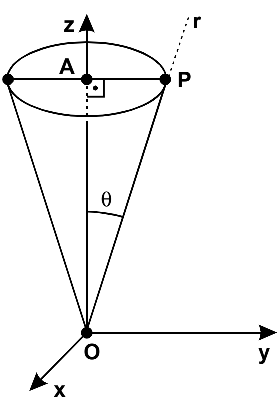


Resp.: $18X^2 + 16Y^2 + 9Z^2 + 24XY + 18YZ - 120X - 166Y - 90Z + 421 = 0$

12. Achar a equação do cone de vértice na O, gerado por uma reta, que gira em torno do eixo z, formando com este um ângulo θ.

Resp.: $x^2 + y^2 - (\text{tg}^2\,\theta)z^2 = 0$

SUGESTÃO:



a) Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico da superfície cônica e $A = (0, 0, z)$ a interseção do eixo z com um plano passante por P e ortogonal ao eixo z.

b) Do triângulo retângulo OAP:

$AP = (\text{tg}\,\theta)OA$

$\sqrt{x^2 + y^2} = (\text{tg}\,\theta)\sqrt{0 + 0 + z^2}$

quadrando tem-se a resposta.

Exemplo: Se $\theta = 45^\circ$ tem-se para eq. do cone: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, pois $\text{tg}\,45^\circ = 1$.

13. Obter a equação do cone de vértice V = (0, 1, 0) e diretriz

$$d \begin{cases} z^2 = x \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

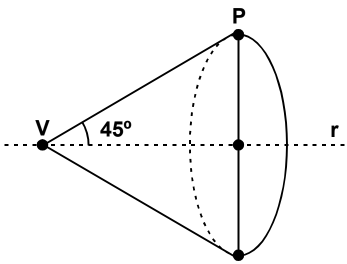
Resp.: $Z^4 - X^2Y^2 + 2X^2Y - 2XYZ^2 - X^2 + 2XZ^2 - X^2Z^2 = 0$

14. Calcular a equação do cone circular de V = (2, 0, –1) sabendo que as geratrizes formam com o eixo que é a reta r um ângulo de 45º.

Dada $r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{2}$

Resp.: $3x^2 + 5y^2 - 3z^2 - 20x + 10z - 8xz + 25 = 0$

SUGESTÃO:



a) vetor $\vec{r} = (1, 0, 2)$

b) Seja P = (x, y, z) um ponto genérico do cone:
$(P - V) = (x - 2, y, z + 1)$

c) $\cos 45º = \frac{\vec{r} \cdot (P - V)}{|\vec{r}||(P - V)|}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(x-2) + 2(z+1)}{\sqrt{5}\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2}}$$

Quadrando e desenvolvendo obtém-se a resposta.

15. Achar a equação do cone circular cujo vértice é o ponto V = (1, 0, –1) e cujas geratrizes formam um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ com a reta

$r: \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$.

Resp.: $15x^2 + 11y^2 - z^2 - 16yz - 30x - 16y - 2z + 14 = 0$

"Quem valoriza os privilégios acima dos princípios, acaba ficando também sem os privilégios."
Dwight Eisenhower (1890-1969), estadista americano.

3. RECONHECIMENTO DE UMA SUPERFÍCIE CÔNICA E CÁLCULO DO VÉRTICE

a) Equações homogêneas

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral define de forma ampla uma equação homogênea. No presente momento, interessa um tipo particular deste tipo de equação:

Uma equação algébrica racional e inteira é homogênea quando todos os termos forem do mesmo grau.

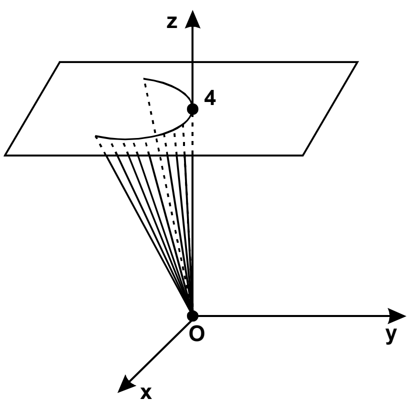
Exemplos:

1. $3x^4 - z^4 - 2x^2y^2 + 2xz^3 = 0 \Rightarrow$ equação homogênea do 4.º grau.
2. $x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y + xz^2 + xyz = 0 \Rightarrow$ equação homogênea do 3.º grau.

b) **Reconhecimento de uma superfície cônica e cálculo das coordenadas do vértice.**

I. Uma equação $F(x, y, z) = 0$, racional, inteira e homogênea é uma superfície cônica com vértice na origem.

Exemplos:



1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 3xz + yz = 0 \Rightarrow$ equação de uma superfície cônica com $V = (0, 0, 0)$.
2) $x^3 + 2x^2y + 3xz^2 + 4xyz = 0 \Rightarrow$ equação de uma superfície cônica com $V = (0, 0, 0)$.
3) A equação $x^2 + 2yz = 0$ representa uma superfície cônica com $V = (0, 0, 0)$. Fazendo por exemplo $z = 4$ tem-se a diretriz $x^2 = -8y$ que representa uma parábola no plano $z = 4$.

OBSERVAÇÃO:
Se faz oportuno exarar que uma equação homogênea pode representar apenas um ponto na origem. É o caso por ex. da equação $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$ só verificada pelo ponto $O = (0, 0, 0)$. A superfície cônica se degenera num ponto.

II. Não sendo homogênea a equação F = (x, y, z) = 0 efetua-se uma translação de eixos de tal sorte que a nova origem seja V = (x_o, y_o, z_o). Deve-se verificar se é possível encontrar valores reais para x_o, y_o, z_o que tornem homogênea a equação dada em relação às novas coordenadas.

Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \\ z = z_o + z' \end{cases}$$

Exercício Resolvido

"Segue sempre quem te dá pouco, e não quem muito te promete".
Provérbio Chinês.

Verificar se a equação $5x^2 + y^2 - 11z^2 - 16yz - 10x - 22z - 16y - 6 = 0$ representa um cone, e sendo, achar as coordenadas do vértice.

RESOLUÇÃO:

a) Fórmulas de translação:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \\ z = z_o + z' \end{cases}$$

b) Levando as fórmulas de translação na equação dada:

$$5(x_o + x')^2 + (y_o + y')^2 - 11(z_o + z')^2 - 16(y_o + y')(z_o + z') - 10(x_o + x') - 22(z_o + z') - 16(y_o + y') - 6 = 0 \; (*)$$

c) Fazendo os coeficientes de x', y' e z' igual a zero:

$$* \quad 10x_o - 10 = 0 \Rightarrow x_o = 1$$

$$\left.\begin{aligned} * \quad 2y_o - 16z_o - 16 &= 0 \\ * \; -22z_o - 16y_o - 22 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_o = 0 \text{ e } z_o = -1$$

d) Substituindo $x_o = 1$, $y_o = 0$ e $z_o = -1$ em(*) obtém-se:

$5x'^2 + y'^2 - 11z'^2 - 16y'z' = 0$

que representa uma **equação homogênea** do 2.º grau.

e) Resposta:

A equação dada representa uma superfície cônica de vértice V = (1, 0, –1).

OBSERVAÇÃO:
Em Cálculo Diferencial e Integral, as coordenadas do vértice de um cone dado por uma equação do 2.º grau com 3 variáveis podem ser obtidas mais facilmente derivando-se parcialmente cada variável.

Exercícios

NÃO ESTRAGUE O SEU DIA

A sua irritação não solucionará problema algum.

As suas contrariedades não alteram a natureza das coisas.

O seu mau humor não modifica a vida.

A sua dor não impedirá que o sol brilhe amanhã sobre os bons e os maus.

A sua tristeza não iluminará os caminhos.

O seu desânimo não edificará ninguém.

As suas lágrimas não substituem o suor que você deve verter em benefício da sua própria felicidade.

As suas reclamações, ainda que efetivas, jamais acrescentarão nos outros um só grama de simpatia por você.

Não estrague o seu dia. Aprenda com a Sabedoria Divina a desculpar infinitamente, construindo e reconstruindo sempre para o infinito Bem.

Psicografado pelo médium Francisco Cândido Xavier.

01. Dada a superfície quádrica $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 4 = 0$, achar as coordenadas do vértice e provar que representa uma superfície cônica.

Resp.: $V = (1, 2, -1)$

02. A equação $x^2 + y^2 - 2yz + 2y + 2z + m = 0$ representa uma superfície cônica. Calcular as coordenadas do vértice e a constante **m**.

Resp.: $V = (0, 1, 2)$ e $m = -3$

03. Determine o valor de **k** para que a equação $3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz + 4x + 8z + k = 0$ represente um cone e ache o vértice.

Resp.: $V = (0, -2, 2)$ e $k = -8$

04. Verificar se a equação $x^2 + y^2 - 8z^2 - 6x + 4y - 16z + 13 = 0$ representa uma superfície cônica.

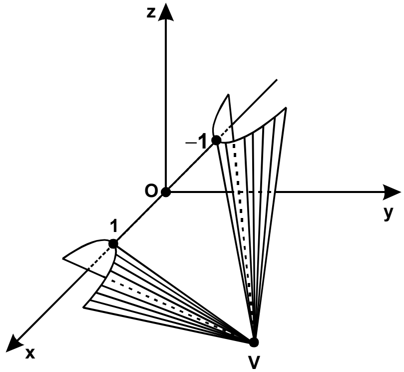
Resp.: Não representa uma superfície cônica.

SUGESTÃO:
Substituindo as fórmulas de translação na equação dada obtém-se $x_o = 3$, $y_o = -2$ e $z_o = -1$, que por sua vez não tornam homogênea a equação dada.

05. A equação $4x^2 - 4y^2 - 8z^2 + 4xz - 12yz - 1 = 0$ constitui um cone. Achar as coordenadas do vértice, a equação da diretriz no plano xy e fazer o desenho.

Resp.:
$V = (1, 3, -2)$

$$d\begin{cases} 4x^2 - 4y^2 = 1 \text{(hipérbole)} \\ z = 0 \end{cases}$$



06. A equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=0$ representa um cone elíptico com eixo coincidente com o eixo z e vértice na origem. Achar a equação do traço no: a) plano z = 5; b) plano xz. Fazer a figura.

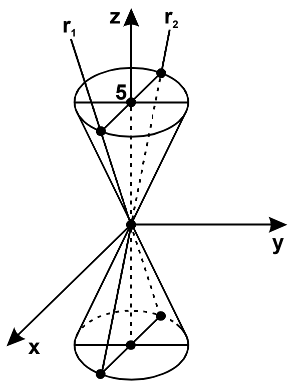
Resp.:

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \ \text{(elipse com } a=3 \text{ e } b=2) \\ z=5 \end{cases}$

b) $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{25}=0 \Rightarrow 25x^2-4z^2=0 \Rightarrow (5x+2z)(5x-2z)=0 \Rightarrow$

retas $r_1: 5x-2z=0$ e $r_2: 5x+2z=0$ no plano xz.

c) Figura:



07. Identificar o lugar geométrico dos pontos P = (x, y, z) que se movem no E^3 de tal sorte que a distância ao eixo x é igual ao triplo da distância ao eixo z.

Resp.: $9x^2 - y^2 + 8z^2 = 0$. Equação de um cone com V = (0, 0, 0) e eixo coincidente com o eixo cartesiano y.

SUGESTÃO:

$d(P, x) = 3d(P, y) \Rightarrow \sqrt{y^2+z^2} = 3\sqrt{x^2+z^2}$

"You are not my first love, but you are my last."
Canção Americana.

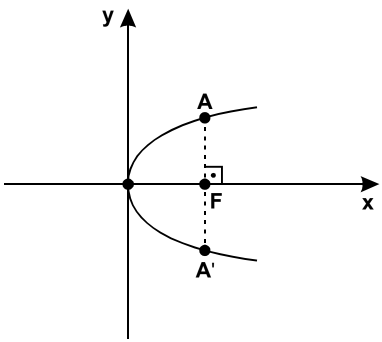
APÊNDICE

Etimologia de algumas palavras matemáticas

As palavras **parábola**, **elipse** e **hipérbole** foram inicialmente empregadas pelos pitagóricos e por Arquimedes, mas com outra acepção. Utilizavam-nas na solução de equações 2.º grau por aplicação de áreas.

Tal como as concebemos hoje, como fruto de seções a um cone dado, são devidas a Apolônio.

PARÁBOLA (do grego παραβολη, comparação, igualdade)



Deve-se à igualdade, comparação existente na equação da parábola de vértice na origem:

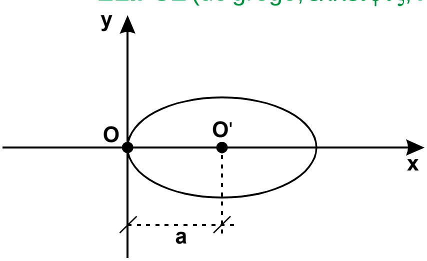
$$y^2 = 2px$$

onde 2p é o comprimento (ℓ) do lactus rectum (corda AA'). Como ℓ = 2p, a parábola pode ser escrita:

$$y^2 = \ell x$$

OBSERVAÇÃO:
*Como figura de linguagem em Português, entende-se parábola como uma narração que serve de **comparação** a outros no sentidomoral. Por exemplo, as parábolas do Evangelho.*

ELIPSE (do grego, ελλειψιζ, falta, omissão)



A elipse figurada tem um dos vértices na origem e o centro em O' = (a, 0).

Equação cartesiana da elipse:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Isolando o 2.º termo:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}$$

Desenvolvendo e ordenando o 2.º membro:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}$$

Isolando y^2:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

mas $\dfrac{2b^2}{a} = \ell$, onde ℓ é o comprimento do latus rectum, conforme se demonstrou na página 104, exercício 8.

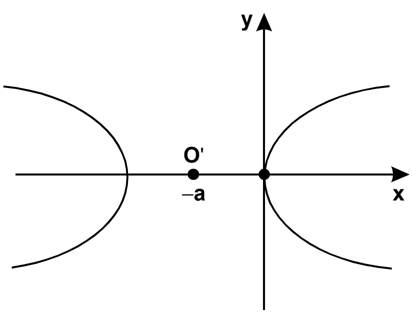
$$y^2 = \ell x - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Ou seja: $\boxed{y^2 < \ell x}$

Na elipse, o quadrado y^2 é menor (**falta** para se chegar à igualdade) que o retângulo ℓx.

OBSERVAÇÃO:
Como figura de linguagem em Português, significa omissão (falta) de uma ou mais palavras numa frase, sem lhe prejudicar a clareza. Exemplo:
"Os valorosos levam as feridas; e os venturosos, os prêmios."
(levam)

HIPÉRBOLE: (do grego, υπερβολη, **excesso**, **exagero**)



A hipérbole ao lado tem um dos vértices na origem e o centro em O' = (–a, 0).

Equação cartesiana da hipérbole.

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Seguindo o desenvolvimento adotado para a elipse,mutatis mutandis:

$$y^2 = \ell x + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

ou seja: $y^2 > \ell x$

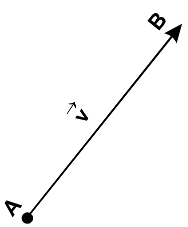
Na hipérbole, o quadrado y^2 é maior (**excesso** em relação à igualdade) que o retângulo ℓx.

OBSERVAÇÃO:
Como figura de linguagem em nosso vernáculo, significa exagero (excesso) de umpensamento. Exemplo:
"Quando ele morreu, as estrelas se transformaram em círios para lhes velarem o sono e os oceanos se tornaram mais salgados porque eram tudo lágrimas."

É oportuno lembrar que a maioria esmagadora das palavras usadas em Matemáticas (do grego, Mathematike) etimologicamente (do grego, etymologia) provém do latim, do grego e do árabe. Amiúde, tais palavras têm acepção bastante primitiva ou até bizarra.

Como em outras ciências, a Matemática apresenta formulações inicialmente tênues e difusas, percorre umespinhoso trajeto até atingir a magnitude de seu desenvolvimento. Na sua etiologia, a Matemática deve mais à intuição e à imaginação que à razão e à lógica. Alguns exemplos:

VETOR



Vetor é o particípio passado do verbo latino **vehere**, e significa **levado**, **transportado**.

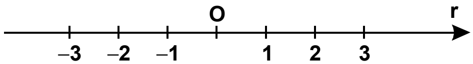
Assim, na figura ao lado, o ponto A é **levado**, é **transportado** até B através do vetor $\vec{v}$.

O conceito de vetor surgiu na mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin – o "Arquimedes holandês". Em 1586, apresentou, em sua **Estática** e **Hidrostática**, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo.

A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês Willian Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos lia grego, latim e hebraico), do alemão Hermann Grassmann e do físico norte-americano Josiah Gibbs.

ABSCISSA

Abscissa em latim significa **corte**, **incisão** (Silveira Bueno). Deve-se provavelmente ao fato de que a representação da abscissa (ou abcissa) na reta se faz através de umpequeno **corte**.



ÁLGEBRA (do árabe **al-jabr**) que significa **restauração**, **transposição**)

Parece referir-se à transposição de termos de um membro para outro da equação.

A palavra álgebra foi amplamente divulgada na Europa, através da célebre obra **Al-jabr w'al muqabalah** (transposição e cancelamento), escrita em 825 d.C. por **Al-Khowarismi**. Tratava especialmente da repartição de heranças, com aplicações da **álgebra**.

> ***OBSERVAÇÃO:***
> *Como **al-jabr** em árabe significa também restauração, popularizou-se na Era Medieval a profissão de **algebrista**. Qual a sua função? Restaurador ou consertador de ossos quebrados ou destroncados. Com esta conotação, o **algebrista** se faz presente em **Dom Quixote**.*

ALGARISMO

Esta palavra oriunda-se provavelmente do nome de um dos maiores algebristas árabes: **Al-Khowarismi**. Além da obra anteriormente mencionada, escreveu o livro que recebeu o título latino: **De numero hindorum** (sobre os números dos hindus).

Esta obra apresenta a morfologia de números muito próxima dos símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tais símbolos haviam sido criados pelos hindus, mas dado ao grande sucesso da obra em toda a Espanha, ficaram conhecidos como **algarismos arábicos**.

O monge a matemático francês Gerbert d'Aurillac tomou conhecimento dos algarismos indo-arábicos em Barcelona no ano de 980. No ano de 999, Gerbert foi eleito Papa (com nome de Silvestre II) e promoveu a divulgação de tais algarismos.

O zero aparece pela 1.ª vez num manuscrito muçulmano do ano de 873. Pecando por entusiasmo e exagero, um matemático afirmou: "o zero é a maior invenção daMatemática".

Conta Hygino H. Domingues que os números negativos surgiram na Índia, no século VII, para indicar débitos. Os gregos não os conheciam e tampouco foi fácil a sua assimilação na Europa. M. Stifel (1486-1567) os denominava de **números absurdos**; G. Cardano (1501-1576), de **números fictícios**, R. Descartes (1596-1650) chamava de **falsas** as raízes negativas de uma equação; B. Pascal (1623-1662) considerava a subtração “0-4” algo **sem sentido**.

Os **algarismos romanos** por sua vez tiveram influência dos etruscos. Pelos manuscritos da época, conclui-se que os algarismos romanos se consolidaram pelo ano 30 d.C.

O símbolo I (que representa o n.º 1) é uma das formas mais primitivas de se representar algo e tem origem incerta. Já o X (que representa o n.º 10) decorre da palavra latina **decussatio**, que significa **cruzamento em forma de X**. O V que representa o 5, os romanos tomaram a metade superior do algarismo X. O n.º 100, identificado pela letra C em algarismo romano, provém da inicial latina **centum** (cem). O algarismo romano M decorre da palavra latina **mille** (que significa 1.000).

GEOMETRIA (do grego **Geo**, **terra** e **metron**, **medida**)

“Os historiadores gregos, sem exceção, procuram colocar no Egito o berço da Geometria, atribuindo-a portanto, aos habitantes do vale do Nilo a invenção dessa ciência. As periódicas inundações desse célebre rio forçaram os egípcios ao estudo da Geometria, pois uma vez passado o período da grande cheia, quando as águas retornavam ao seu curso normal, era necessário repartir novamente as terras, perfeitamente delimitadas. A pequena faixa de terra, rica e fértil, era disputada por muitos interessados; faziam-se medições rigorosas a fim de que cada um, sem prejuízo dos outros, fosse reintegrado da posse exata de seus domínios (Thiré e Melo Souza).

O início da axiomatização da Geometria deve-se a Euclides (séc. III a.C.), que foi sinônimo de Geometria até o século XIX, quando foi parcialmente contestado o seu 5.º postulado por Riemann, Lobatchewski e Bolyai (são os criadores das geometrias não-euclidianas) que tem grande importância na Física e na Astronomia. Rememoremos o 5.º postulado (ou postulado das paralelas) de Euclides, cujo enunciando equivale ao seguinte: “por um ponto podemos traçar uma única paralela a uma reta dada”.

Numa de suas aulas no museu de Alexandria (que junto com a Biblioteca constituíam o que entendemos hoje por Universidade), Euclides demonstrava um dos teoremas e foi argüido por um discípulo:

–Mestre, qual a utilidade desta demonstração?

Imperturbável, Euclides chamou seu escravo e lhe disse:

– Dê uma moeda a esse jovem para que ele possa ter proveito com tudo que está aprendendo.

Platão (427-347 a.C.) – conspícuo filósofo grego – indagado certa vez sobre a atividade divina, respondeu: “Deus eternamente **geometriza**”.

O maior templo da Geometria foi a Biblioteca de Alexandria, no Egito, fundada em 290 a.C. por Ptolomeu.

Todos os grandes geômetras da antigüidade como Euclides, Arquimedes, Eratóstones, Apolônio, Papus, Diofanto, Cláudio Ptolomeu, Teon de Alexandria, Hipátia, etc., se debruçaram sobre os vetustos e novéis pergaminhos e papiros da Biblioteca. Esta, desgraçadamente, foi vítima da ganância inescrupulosa do povo romano e, mais tarde, do fanatismo religioso dos muçulmanos e cristãos.

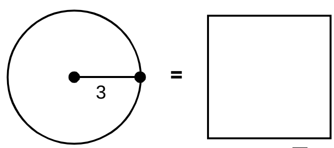
Ao longo de sua história, a Geometria glorifica dois problemas que se tornaram clássicos:

1.º) O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

Foi proposto inicialmente por Anaxágoras (499-428 a.C.). Aprisionado em Atenas por suas idéias muito avançadas para a época, afirmara que o Sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, maior que o Peloponeso (península do sul da Grécia) e que a Lua não tinha luz própria e a recebia do Sol. Anaxágoras foi professor de Péricles (490-429 a.C.), que o libertou da prisão. Ademais, exerceu forte influência no pirmeiro dos três grandes filósofos: Sócrates, Platão, Aristóteles.

Problema da Quadratura do círculo: dado um círculo, construir um quadrado de mesma área. Como os gregos desconheciam as operações algébricas e priorizavam a Geometria, propunham solução apenas com régua (sem escala) e compasso. No séc. XIX, demonstrou-se que nestas condições este problema é irresolúvel.

A solução é trivial se lançarmos mão dos recursos da álgebra:



$\ell = \mathbf{3}\sqrt{\pi}$

$S_{O} = S_{\square}$

$\pi R^2 = \ell^2$

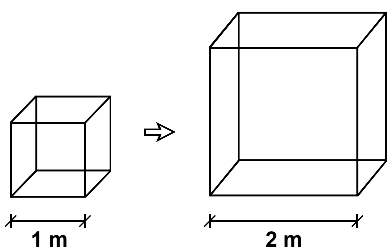
admitindo por ex. $R = 3$

$\pi(3)^2 = \ell^2$

$\ell = 3\sqrt{\pi}$ ou $\ell = 5{,}31$

2.º) PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO ou PROBLEMA DELIANO

Durante o cerco espartano da Guerra do Peloponeso, conta uma lenda que em 429 a.C. uma peste dizimou 25% da população de Atenas, matando inclusive Péricles. Diz-se que uma plêiade de sábios fora enviada ao oráculo de Apolo, em Delos (donde o nome deliano) para inquirir como a peste poderia ser eliminada.



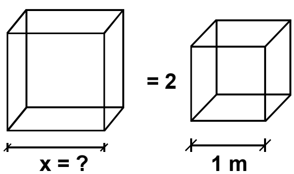
O oráculo respondeu que **o altar cúbico de Apolo deveria ser duplicado**. Os atenienses celeremente dobraram as medidas das arestas do cubo.

A peste, em vez de se amainar, recrudesceu. Qual o erro?
Em vez de dobrar, os atenienses octoplicaram o volume do altar.
Pois:
para $a = 1 \Rightarrow V_{cubo} = 1^3 = 1$
para $a = 2 \Rightarrow V_{cubo} = 2^3 = 8$

A complexidade do problema deve-se ao fato de que os gregos procuravam uma solução geométrica. E mais um complicador: com régua (sem escala) e compasso.

Ainda no século IV a.C., o geômetra grego Menaecmus (que juntamente com Platão foi professor de Alexandre, o Grande) resolveu o problema com o traçado de uma parábola e de uma hipérbole. Hodiernamente, tal solução é facilmente compreensível através da Geometria Analítica: Menaecmus obteve geometricamente o ponto de interseção da parábola $x^2 = 2y$ com a hipérbole $xy = 1$. A solução é $x = \sqrt[3]{2}$. Foi relativo o sucesso de Menaecmus entre os seus compatriotas: não se valeu de régua (sem escala) e compasso apenas!

A solução deste problema é trivial com os recursos da álgebra: procura-se a aresta (x) de um cubo, cujo volume seja o dobro do volume de um cubo de a = 1 ($V_{cubo} = a^3$):



$x^3 = 2(1)^3$

$x = \sqrt[3]{2} \cong 1{,}26$

OBSERVAÇÃO:
Em 1837, o francês Pierre L. Wantgel demonstrou que o problema deliano não admite solução com uso de régua e compasso apenas. Com somente 23 anos Wantzel, engenheiro da prestigiosa Ecole Polytechnique, pôs fim a discussões de quase dois milênios.
*Em seu excelente livro **O Romance das Equações Algébricas** (ed. Makron Books), Gilberto G. **Garbi** descreve que "esta limitação de apenas dois instrumentos espelhava o conceito de elegância com que os gregos tratavam das questões geométricas e, também, a atração tipicamente helênica que eles nutriam pelos desafios intelectuais, independentente de qualquer utilidade prática."*

TRIGONOMETRIA (do grego, **trigonos**, **triângulo** e **metron**, **medida**)

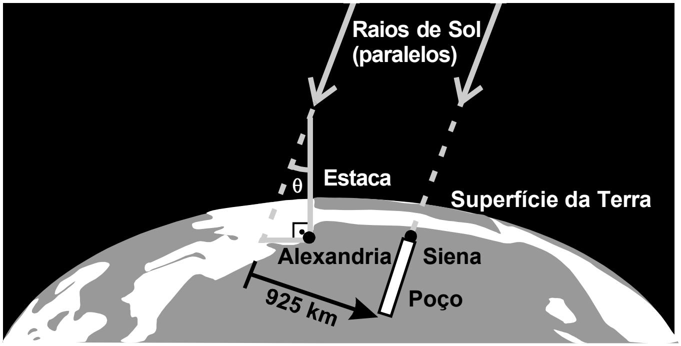
A Trigonometria derivou-se da Astronomia, uma vez que esta se preocupava emdeterminar as posições relativas dos corpos celestes.

Eratóstones (276-194 a.C.), que foi diretor da Biblioteca de Alexandria, comprovou, pela trigonometria, a esfericidade da Terra e mediu com engenhosidade e relativa precisão o perímetro de sua circunferência.

Num dos rolos de papiro, encontrou a informação de que na cidade de Siena (hoje Assuã), ao meio-dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano, 21 de junho, no hemisfério norte) colunas verticais não projetavam qualquer sombra; ou seja, o Sol se situava a prumo. Entretanto, o nosso conspícuo geômetra observou que no mesmo horário e dia, as colunas verticais da cidade de Alexandria projetavam uma sombra perfeitamentemensurável.

Aguardou o dia 21 de junho do ano seguinte e determinou que se instalasse uma grande estaca em Alexandria e que se escavasse um poço profundo emSiena.

Ao meio-dia, enquanto o Sol iluminava as profundezas do poço em Siena (fazia ângulo de 90º com a superfície da Terra), em Alexandria Erastóstones mediu o ângulo θ = 7º12', ou seja: 1/50 dos 360º de uma circunferência. Portanto, o comprimento do meridiano terrestre deveria ser 50 vezes a distância entre Alexandria e Siena.



Por tais cálculos, conjecturou que o perímetro da Terra seria de 46.250 km. Hoje sabemos que é de 40.076 km.

Precedeu a experiência umfeito digno de nota: Alexandria e Siena situavam-se a grande, porém, desconhecida distância. Para medi-la, Eratóstones determinou que uma equipe de instrutores com seus camelos e escravos a pé, seguissem em linha reta, percorrendo desertos, aclives, declives e tendo que, inclusive atravessar o rio Nilo. Distância mensurada:

5.000 estádios ou cerca de 925 km. Ademais, as cidades de Alexandria e Siena não estão sobre o mesmo meridiano como supunha Eratóstones, havendo uma diferença de quase 3.º.

Eratóstones foi um profissional brilhante e eclético: além de Matemática e diretor do mais notável Templo do Saber de todos os tempos, foi poeta, escritor, geógrafo e atleta. No entanto, teve um final de existência profundamente lamentável: suicidou-se após ter sido acometido por uma doença que o cegou.

MINUTOS E SEGUNDOS

Ao se representar θ = 32º52'25", dizemos que o ângulo θ tem 32 graus, 52 minutos e 25 segundos. Não há explicação razoável para a palavra grau. Há, porém, para minutos e segundos, de acordo com Carl B. Boyer.

No exemplo acima, o 52 era acompanhado da expressão latina partes **minuta** prima (primeira menor parte), e o 25 era acompanhado de outra expressão latina: partes minuta **segunda** (segunda menor parte).

LOGARITMO (do grego, **logos**, **estudo**, **razão**, **proporção** e **arithmos**, **números**)

A palavra logaritmo apareceu pela primeira vez na obra **Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio** (Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos), escrita por John Neper ou John Napier (1550-1617).

Neper não era nenhuma estrela de alguma constelação universitária. Proprietário rural na Escócia, barão e um homem polêmico (afirmava que o Papa era o anti-Cristo).

A sua obra supracitada foi publicada após 20 anos de minucioso e criterioso trabalho. Tinha por escopo servir à Navegação e à Astronomia. O matemático e astrônomo francês Pierre de Laplace (1749-1827) assim se reportava aos logarithmos: "ao encurtarem o trabalho, dobraram a vida dos astrônomos". Se hoje os logaritmos possuem uma importância bem menor, deve-se à eclosão das calculadoras e dos computadores. Estes, porém, seriammáquinas muito limitadas se não houvesse logaritmos, uma vez que muitas operações são efetuadas com a tábua de logaritmos, que integra os softwares.

Em 1615, Henry Briggs, professor de Geometria de Oxford, empreendeu uma longa viagem à Escócia e visitou John Neper em sua casa. Conta o historiador F. Cajori que o encontro foi emocionante: levaram 15minutos se abraçando, sem dizer uma palavra.

Briggs propôs o uso da base 10, dada uma maior facilidade nos cálculos. Em 1617, Briggs publicou o seu **Logarithmorum Chilias Prima**, que constitui a primeira tábua de logaritmos decimais, no caso de 1 a 1.000

e com 14 casas decimais.

Sete anos mais tarde, Briggs, em **Arithmetica Logarithmica**, efetua os cálculos dos logaritmos decimais de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Nesse livro pela primeira vez, apareceram as palavras **mantissa** e **característica**.

As tábuas logarítmicas lograram grande êxito, pois ensejavam enorme facilidade nos cálculos aritméticos.

Desconhecida de Neper, a chamada base dos logaritmos neperianos foi representada pela letra **e** por Euler (1707-1783) e supõe-se ser a letra inicial da palavra **exponencial** (por causa do limite exponencial cujo resultado é o próprio **e**) ou mesmo como uma auto-referência ao seu nome: Euler.

$$\text{A base } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}7182\ldots$$

SÍMBOLOS E NOTAÇÕESMATEMÁTICAS

Apropriadamente, já se definiu a Matemática como a “rainha e a serva de todas as ciências”. E o apanágio de sua majestade é o rigor, a lógica, a harmonia e sua linguagem precisa, universal e sincopada.

Sabemos que os gregos antigos promoveram um grande desenvolvimento à Geometria Plana e Espacial, mas não dispunham de uma notação algébrica ou simbologia adequadas.

Até o século XVI, toda a expressão matemática se fazia de uma forma excessivamente “verbal ou retórica”.

Por exemplo, em 1591, Viète para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia embomlatim:

5 in A quad. et 9 in A planu minus 5 aequatur 0. (5 em A quadrado e 9 emAplanomenos5éigualazero).

Além da prolixidade de comunicação entre os matemáticos, havia outras dificuldades, pois se utilizava de notações diferentes para indicar as mesmas coisas.

O maior responsável por uma notação matemática mais consistente e utilizada até hoje foi Leonhard Euler (1707-1783).

Recordemos as principais: f(x) (para indicar função de x); Σ (somatória e provém da letra grega sigma, que corresponde ao nosso S); i (unidade de imaginária igual a $\sqrt{-1}$); e (base do logaritmo neperiano e igual a 2,7182...); ℓx (para indicar o logaritmo de x); as letras minúsculas a, b, c para indicarem os lados de um triângulo e as letras maiúsculas A, B, C para os ângulos opostos. A letra π = 3,1415... que havia sido utilizada por William Jones em1706, teve o uso consagrado por Euler.

Euler nasceu em Basiléia, Suíça, e recebeu educação bastante eclética: Matemática, Medicina, Teologia, Física, Astronomia e Línguas

Ocidentais e Orientais. Foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel.

Extremamente profícuo, insuperável em produção matemática, Euler escrevia uma média de 800 páginas por ano e publicou mais de 500 livros e artigos. Em plena atividades intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (conseqüência de catarata). Mesmo assim continuou ditando aos seus filhos (eram 13).

Euler se ocupou com praticamente todos os ramos então conhecidos da Matemática a ponto de merecer do francês François Arago o seguinte comentário: "Euler calculava sem qualquer esforço aparente como os homens respiram e as águias se sustentam no ar."

Em 1748, publica sua principal obra com o título latino: **Introductio in Analysis infinitorum** (Introdução à Análise Infinita), considerada um dos marcos mais importantes da Análise como disciplina sistematizada. Destarte, Euler recebeu a alcunha de "Análise Encarnada".

A solução dos símbolos mais adequados foi acontecendo naturalmente ao longo de décadas ou séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. É evidente, porém, que pouco se pode afirmar com precisão nesta evolução. Alguns exemplos:

SÍMBOLO DE +: O primeiro a empregar o símbolo de + para a adição em expressões aritméticas e algébricas foi o holandês V. Hoecke em 1514. Há historiadores, porém, que creditam tal mérito a Stifel (1486-1567).

Uma explicação razoável é que até então, a adição de dois números, por exemplo 3 + 2 era representada por 3 **et** 2. Com o passar dos anos, a conjunção latina **et** (que significa e) foi sincopada para "t", donde se originou o sinal de +.

SÍMBOLO DE –: Pode ter sido fruto da evolução abaixo exposta, conforme se observa nos escritos dos matemáticos italianos da Renascença:

$$1.^{\text{o}})\ 5 \text{ minus } 2 = 3 \text{ (minus em latim significa menos)}$$

$$2.^{\text{o}})\ 5\overline{\text{m}}\ 2 = 3\ (\overline{\text{m}} \text{ é abreviatura de minus)}$$

$$3.^{\text{o}})\ 5 - 2 = 3 \text{ (sincopou-se o m da notação } \overline{\text{m}})$$

SÍMBOLO DA MULTIPLICAÇÃO: Relata Gabriel M. de Souza Leão que o símbolo de **x** em a x b para indicar a multiplicação foi proposto pelo inglês William Oughthed (1574-1660). É provável que seja originário de uma alteração do símbolo de +. O ponto em a . b foi introduzido por Leibniz (1646-1716).

SÍMBOLOS DA DIVISÃO: Fibonacci (séc. XII) emprega a notação

$\frac{a}{b}$ ou a/b, já conhecidas dos árabes. A notação a : b é devida a Leibniz em 1648. Já o inglês J. H. Rahn (1622-1676) emprega a notação a ÷ b.

SÍMBOLOS DE > OU <: O inglês Thomas Harriot (1560-1621) foi o introdutor dos símbolos de > ou < para indicar maior ou menor, respectivamente. No entanto, os símbolos ≥ ou ≤ surgiram mais tarde, em 1734, com o francês Pierre Bouguer.

SÍMBOLO π: É a inicial da palavra grega $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$, que significa circunferência. Sabemos que π = 3,1415926535... é um número irracional e é a razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

O aparecimento do símbolo π só aconteceu em 1706, e deve-se a Willian Jones, um amigo de Newton. No entanto, a consagração do uso do π deve-se aomatemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Em 1873, como muito se discutia sobre a irracionalidade do π, o inglês W. Shanks calculou o π com 707 casas decimais. Os cálculos eram laboriosos e feitos manualmente, e Shanks levou cerca de 5 anos para efetuá-los.

Em 1988, japonês Yasumasa Kanada conseguiu calcular o π com 200 milhões de casas decimais. O supercomputador usado por Y. Kanada levou apenas 6 horas para fazer os cálculos.

Não há evidentemente nenhum interesse prático em conhecer o π com tantas casas decimais. Serve como marketing entre os fabricantes de computadores.

Usando o π com 40 casas decimais, assegura Hygino H. Domingues, “o cálculo da medida da circunferência envolvendo todo o Universo conhecido dará o valor com a precisão da ordem do diâmetro de um próton. E este é menor que qualquer coisa que a vista humana possa enxergar.

Na antigüidade, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) foi o primeiro a utilizar um método não empírico e sim científico para o cálculo do π. Em seu tratado **Sobre as Medidas do Círculo**, Arquimedes em um círculo dado inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

ou

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$$

SÍMBOLOS DE $\sqrt{\ }$ (RAIZ): Apareceu pela primeira vez na obra **Die Coss** (1525), do matemático alemão C. Rudolff. Este sugeria o símbolo por sua semelhança com a primeira letra da palavra latina **radix** (raiz).

SÍMBOLO DE = (IGUALDADE): Tudo indica que o sinal de igualdade (**=**) foi introduzido por Robert Recorde (~1557), pois nada é *moare equalle a paire de paralleles* (nada é mais igual que um par de retas paralelas).

BIBLIOGRAFIA

1) BARSOTTI, Leo. *Geometria Analítica e vetores.* Curitiba, Artes Gráficas e Editora Unificado, 1984. 3.ª ed. v.2. 220 p.

2) BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial.* São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987. 2.ª ed. 383 p.

3) STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987. 2.ª ed. 291 p.

4) CAROLI, Alésio João de; CALLIOLI, Carlos Alberto, FEITOSA, Miguel Oliva. *Vetores, Geometria Analítica: teoria e exercícios.* São Paulo, Nobel, 1968. 6.ª ed. 212 p.

5) MURDOCH, David C. *Geometria Analítica: com uma introdução ao cálculo vetorial e matrizes.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1971. 2.ª ed. 296 p.

6) REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1984. 1.ª ed. 227 p.

7) RIGHETTO, Armando. *Vetores e Geometria Analítica.* São Paulo, IBEC, 1982. 5.ª ed. 384 p.

8) WEXLER, Charles. *Analytic Geometry.* Tokio, Adison-Wesley Publishing Company inc. 1964. 1.ª ed. 291 p.

9) GIACAGLIA, G. E. O. *Vetores e Geometria Analítica - Elementos de Álgebra Linear.* São Paulo, Nobel, 1985. 3.ª ed. 355 p.

10) SMITH, Percey; GALE, Arthur; NEELLEY, John. *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1971. 1.ª ed. 1957.

11) LEHMANN, Charles H. *Geometria Analítica.* México, UTEHA, 1953. 1.ª ed. 488 p.

12) MIDDLEMIS, Ross R. *Analytic Geometry.* Tokio, Mc Graw-Hill Book Company Inc, 1955. 2.ª ed. 310 p.

13) ZÓZIMO, Gonçalves Menna. *Geometria Analítica Plana: tratamento vetorial.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978. 1.ª ed. 248 p.

14) CABRERA y MEDICI. *Geometria Analítica.* Buenos Aires, 1947. 1.ª ed. 456 p.

15) BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1974. 1.ª ed. 488 p.

16) SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo, Mc Graw-Hill, 1987, 1.ª ed. v. 1. 829 p.

Unificado
ARTES GRÁFICAS E EDITORA

Impresso nas Oficinas das
Artes Gráficas e Editora Unificado