

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} Lista de exercicios de Cálculo Diferencial e Integral II

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por:

$$(a) f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$$

$$(b) f(x, y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x}$$

$$(c) f(x, y) = \frac{xy}{x-2y}$$

$$(d) f(x, y) = \ln(xy - 1)$$

$$(e) f(x, y) = \frac{\ln(x-2y)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$(f) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

$$(g) f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|} \quad (h) f(x, y) = \sqrt{|x| + |y| - 2}$$

2. Trace um esboço das curvas/superfícies de nível de cada uma das seguintes funções:

$$(a) f(x, y) = xy$$

$$(b) f(x, y) = 4x^2 + 9y^2;$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x^2}{y^2+1}$$

$$(d) f(x, y) = (x - y)^2;$$

$$(e) f(x, y, z) = x + 2y + 3z, \quad (f) f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2;$$

$$(g) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z, \quad (h) f(x, y, z) = x - y;$$

LIMITE E CONTINUIDADE

3. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + x^2 + y}, \quad Rpta :$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}; \quad Rpta :$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad Rpta :$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y}; \quad Rpta :$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad Rpta :$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}; \quad Rpta :$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad Rpta :$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}; \quad Rpta :$$

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad Rpta :$$

$$(j) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}; \quad Rpta :$$

4. Discuta a continuidade das seguintes funções:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (d) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIAIS E DIFERENCIABILIDADE

5. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função dada em todos os pontos do seu domínio

$$(a) f(x, y) = 5x^2y^4 + xy^3 + 4 \quad (b) f(x, y) = \cos(xy)$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} \quad (d) f(x, y) = \ln(xy - 1)$$

$$(e) f(x, y) = xye^{xy} \quad (f) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$(g) f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z) \quad (h) f(x, y, z) = xyz^2 \tan(yz)$$

6. utilize derivação implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$

$$(a) \sqrt{xy} = 1 = x^2y \quad (b) \cos(x - y) = xe^y$$

7. Utilize derivação implícita para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$(a) x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (b) x - z = \arctan(yz)$$

8. O que significa uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ser diferenciável em $(x_0, y_0) \in U^\circ$? Que relação existe entre a diferenciabilidade, continuidade e as derivadas parciais de f em um ponto?

$$9. \text{ Seja } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

prove que:

$$(a) f_x(0, 0) \text{ e } f_y(0, 0) \text{ existem e}$$

$$(b) f(x, y) \text{ não é diferenciável em } (0, 0). \text{ Por que?}$$

10. Mostre que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy}{2x^2 + 3y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

possui derivadas parciais em $(0, 0)$, mais não é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

11. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

(a) Verifique que $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$ e que existem as derivadas parciais $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

(b) É $f(x, y)$ diferenciável em $(0, 0)$? Por que?

REGRA DA CADEIA E VETOR GRADIENTE

12. Calcule $\frac{dz}{dt}$, usando a regra da cadeia:

(a) $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$

(b) $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}$, $x = \ln t$, $y = t$

(c) $z = e^{1-xy}$, $x = t^{1/3}$, $y = t^3$

13. Calcule $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$ usando a regra da cadeia

(a) $w = xy + yz + xz$ onde $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ e $z = v$.

(b) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ onde $x = ue^v \sin u$, $y = ue^v \cos u$ e $z = ue^v$.

(c) $w = \cos x \sin y$ onde $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$.

14. Use a regra da cadeia para calcular $\left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=1/4}$, se $w = r^2 - r \tan \theta$, $r = \sqrt{s}$, $\theta = \pi s$

15. Use a regra da cadeia para calcular $\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=2, \theta=\pi/6}$ e $\left. \frac{dz}{d\theta} \right|_{r=2, \theta=\pi/6}$; se

$$z = xye^{x/y}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

16. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto P ,

(a) $z = xe^{x^2-y^2}$, $P(2, 2, 2)$

(b) $z = \frac{1}{xy}$, $P(1, 1, 1)$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $P(-3, 0, 4)$

(d) $y + x = 2xz$, $P(4, 4, 1)$

(e) $\cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$, $P(0, 1, 2)$

17. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, em (x_0, y_0, z_0) , pode ser escrito na forma $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$

18. Considere a superfície de equação $xyz = 1$. Encontre as equações dos planos tangentes a esta superfície que são paralelos ao plano $x + y + z + 100 = 0$.

19. Encontre o ponto na superfície $3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - z = 5$ onde o plano tangente é horizontal.

20. determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico da função $f(x, y) = xy$.

21. De um funil cônico escoar água à razão de $18\pi\text{cm}^3/\text{seg}$. Se a geratriz faz com o eixo do cone um ângulo $\alpha = \pi/3$, determine a velocidade com que baixa o nível de água no funil, no momento em que o raio da base do volume líquido é igual a 6cm .
22. Um lado de um retângulo mede $x = 20\text{mts}$ e aumenta a uma velocidade de $5\text{mts}/\text{seg}$, o outro lado mede $y = 30\text{mts}$ e diminui a uma velocidade de $4\text{mts}/\text{seg}$. Com que velocidade varia o perímetro e a área desse retângulo?
23. a altura de um cone circular reto é 15cm e está aumentando a $1\text{cm}/\text{seg}$. O raio da base é 10cm e está diminuindo a $0.5\text{cm}/\text{seg}$. Qual a taxa de variação do volume em relação ao tempo neste instante.
24. Em um instante dado, o comprimento de um lado de um triângulo retângulo é de 10cm e cresce à razão de $1\text{cm}/\text{seg}$; O comprimento do outro lado é de 12cm e decresce à razão de $2\text{cm}/\text{seg}$. Calcule a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de 12cm , medido em radianos, no instante dado.

DERIVADA DIRECIONAL

25. O que é o vetor gradiente de uma função $f(x, y)$? Como ele está relacionado às derivadas direcionais de uma função?
26. Calcule a derivada direcional de f em P na direção dada.
- (a) $f(x, y) = \sin(xy^2)$; $P(\frac{\pi}{4}, 2)$; vetor na direção $\vec{u} = \vec{i}$.
- (b) $f(x, y) = 3x^2 + 4x - y^2$; $P(1, 2\sqrt{3})$; vetor na direção $\frac{\pi}{6}$.
- (c) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x$; $P(1, 0, 0)$; vetor de P a $(2, 2, 1)$.
27. Determine as direções em que f cresce e decresce mais rapidamente no ponto P , bem como as correspondentes derivadas direcionais (taxa de variação de crescimento) máxima e mínima respectivamente em P .
- (a) $f(x, y) = x^3 - y^2$, $P(1, 1)$
- (b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $P(3, 4)$
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $P(1, -1, 1)$
28. Seja $f(x, y) = x^2y$. Se $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, escreva a fórmula para a derivada direcional de f em $(1, -1)$ em termos de a e b . Em que direção devemos seguir a fim de que a taxa de variação de f seja 2? .

29. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

- (a) $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$? Por que?
- (b) $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0)$? Por que?
- (c) Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (d) $f(x, y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0, 0)$?

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

30. Nos itens abaixo calcule as derivadas parciais indicadas;

(a) $f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y}$, f_x, f_y, f_{xx}

(b) $f(x, y) = \ln(x^2y^2)$, h_{12}, h_{21}, h_{212}

(c) $f(x, y) = y^3e^{-5x}$, $f_{xyy}(0, 1), f_{xxx}(0, 1), f_{yyxx}(0, 1)$

31. Verifique que as funções abaixo satisfazem a equação de Laplace: $z_{xx} + z_{yy} = 0$

(a) $z = e^x \sin y$, (b) $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

32. Dado $w = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$, verifique que w satisfaz a equação diferencial parcial:

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 5w$$

33. Use diferenciação implícita para determinar: $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

(a) $xy + yz = xz$

(b) $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y + z)$

(c) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$ (d) $xyz = \cos(x + y + z)$

LINEARIZAÇÃO E DIFERENCIAIS

34. Determine a linearização das seguintes funções, ao redor dos pontos dados:

(a) $f(x, y) = \sin(xy)$, $P(0, 1)$

(b) $f(x, y) = xyz$, $P(1, 1, 1)$

(c) $f(x, y, z) = xy^3 + \cos(\pi z)$, $P(1, 3, 1)$ (d) $f(x, y, z) = (xy)^z$, $P(12, 10, 1)$

35. Calcule, aproximadamente:

(a) $M = 0.98 \times 0.99 \times 1.02$

(b) $N = (12.03 \times 10.04)^{1.08}$

(c) $P = 3.001 \times (2.0023)^3 + \cos((1.002)\pi)$

36. Se $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, determine os valores de Δf e df , quando (x, y) varia de $(2, -1)$ a $(1.99, -0.98)$

37. Nos itens abaixo, encontre a linearização L da função f em P_0 . Então encontre um limitante superior para a magnitude $|E|$ do erro na aproximação $f \approx L$ na região $\mathcal{R}$

(a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5$, em $P_0(1, 2)$, $\mathcal{R} : |x - 2| \leq 0.1, |y - 1| \leq 0.1$

(b) $f(x, y) = 1 + y + x \cos y$, em $P_0(0, 0)$, $\mathcal{R} : |x| \leq 0.2, |y| \leq 0.2$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz + \frac{z^2}{4}$, em $P_0(1, 1, 2)$,

$\mathcal{R} : |x - 1| \leq 0.01, |y - 1| \leq 0.01, |z - 2| \leq 0.08$

38. Você planeja calcular a área de um retângulo comprido e fino a partir de medidas de seu comprimento e largura. Qual dimensão você deve medir com mais cuidado? Justifique sua resposta.

39. Ao redor do ponto $P_0(1, 0)$, a função $f(x, y) = x^2(y + 1)$ é mais sensível a variações em x ou em y ?. Qual razão entre dx e dy fará df igual a zero no ponto $P_0(1, 0)$?
40. Sua empresa produz latas de refrigerantes padrão que tem 20cm de altura com raio de 3cm . Qual é a sensibilidade do volume da lata em relação a pequenas variações do raio e da altura?