Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica
Prof. Juan Carlos Vila Bravo

4^{ta} Lista de exercicios de cálculo II

Integrais Duplas:

1. Calcule $\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$, se:

   (a)$f(x,y) = x^2y^3$ e $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$

   (b)$f(x,y) = x^2 + 4y$ e $\mathcal{R} = [0,2]\times[0,3]$

   (c)$f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2+1}$ e $\mathcal{R} = [-1,1]\times[-1,1]$

   (d)$f(x,y) = e^{xy}(x^2+y^2)$ e $\mathcal{R} = [-1,3]\times[-2,1]$

2. Calcule o volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $z = f(x,y)$ e inferiormente pelo retângulo dado:

   (a)$f(x,y) = 2x + 3y + 6$ e $\mathcal{R} = [-1,2]\times[2,3]$

   (b)$f(x,y) = y^2 - x^2$ e $\mathcal{R} = [-1,1]\times[1,3]$

   (c)$f(x,y) = \sqrt{9-y^2}$ e $\mathcal{R} = [0,4]\times[0,2]$

   (d)$f(x,y) = \cos(2x) + \text{sen }(2y)$ e $\mathcal{R} = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$

   (e)$f(x,y) = x\text{sen }y$ e $\mathcal{R} = [0,\pi]\times[0,\pi]$

3. Calcule as seguintes integrais mudando a ordem de integração:

   $(a)\ \int_0^1\Big(\int_x^1 \dfrac{\text{sen }y}{y}dy\Big)dx$

   $(b)\ \int_0^1\Big(\int_y^1 \text{sen }(x^2)dx\Big)dy$

   $(c)\ \int_0^2\Big(\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\ \ dy\Big)dx$

   $(d)\ \int_0^2\Big(\int_x^2 e^{-y^2}\ \ dy\Big)dx$

   $(e)\ \int_0^2\Big(\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\text{sen }x\ \ dx\Big)dy$

   $(f)\ \int_0^3\Big(\int_9^{y^2} y\cos(x^2)dx\Big)dy$

4. Calcule as seguintes integrais sabendo que $\mathcal{R}$ é limitada pelas curvas dadas

$(a)\ \displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} y\,dxdy$	$y = 2x^2 - 2,\ \ y = x^2 + x$
$(b)\ \displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} xy\,dxdy$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0$ com $x \geq 0,\ y \geq 0$
$(c)\ \displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} x\,dxdy$	$x = y^2,\ \ x = 1$
$(d)\ \displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} x\cos(y)\,dxdy$	$y = 0,\ \ y = x^2$ e $x = 1$
$(e)\ \displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} (y^2 - x)\,dxdy$	$y^2 = x,\ \ x = 3 - 2y^2$

5. Determine o volume dos seguintes sólidos:
   (a) Limitado superiormente por $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pela região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.
   (b) Limitado superiormente por $z = 3x^2 + y^2$ e inferiormente pela região limitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$.
   (c) Limitado por $y^2 + z^2 = 4,\ x = 2y,\ x = 0,\ z = 0$, no primeiro octante.
   (d) Limitado por $z = x^2 + y^2 + 4,\ x = 0,\ y = 0, z = 0$ e $x + y = 1$.
   (e) Limitado por $x^2 + y^2 = 1,\ y = z,\ x = 0$ e $z = 0$ no primeiro octante.

6. Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas

$(a)\ y = x^{3/2},\ \ y = x$	$(b)\ 2x - 3y = 0,\ \ x + y = 5,\ \ y = 0$
$(b)\ xy = 9,\ \ y = x,\ \ y = 0,\ \ x = 9$	$(c)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$(d)\ y = 4 - x^2,\ \ y = x^2 - 14$	$(e)\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2,\ x = 0,\ \ y = 0$

7. Use uma integral dupla em coordenadas polares para encontrar o volume do sólido limitado pelos gráficos das equações dadas.
   (a) $z = xy,\ \ x^2 + y^2 = 1$(primeiro octante)
   (b) $z = x^2 + y^2 + 1,\ \ z = 0,\ \ x^2 + y^2 = 4.$
   (c) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ z = 0,\ \ x^2 + y^2 = 25$
   (d) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ z = 0,\ \ x^2 + y^2 \geq 4,\ \ x^2 + y^2 \leq 16$
   (e) Encontre a de modo que o volume dentro do hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ seja a metade do volumedo hemisfério.

8. Determine o centro de massa da lãmina plana $\mathcal{R}$, no plano xy e densidade $f(x, y)$.
   (a)$\mathcal{R}$ é limitado por $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro quadrante e $f(x, y) = xy$.

(b)$\mathcal{R}$ é limitado por $y = x$ e $y = x^2$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Integrais Triplas:

9. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2\, dx\, dy\, dz$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dz\, dy\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^\pi \int_0^{1-x} x^2 \text{sen}\,(y)\, dz\, dx\, dy$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^{1/y} \text{sen}\,(y)\, dz\, dx\, dy$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^1 \int_0^x \int_0^y x^2 z^4\, dz\, dx\, dy$

10. Considere o sólido limitado por $x + y + z = 3$, $x + y - z = 3$ e os planos coordenado. Calcule o volume do sólido, fazendo:

(a) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dz \Big) dy \Big) dx$ (b) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dx \Big) dy \Big) dz$

(c) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dy \Big) dx \Big) dz$ (d) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dx \Big) dz \Big) dy$

11. Faça a mudança de variável necessária para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x\, dz\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} x\, dz\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

12. Calcule as seguintes integrais sabendo que $\mathcal{S}$ é um sólido limitado pelas superfícies dadas

(a) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} x\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ e pelos parabolóide $z = x^2 + y^2$.

(b) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} x\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelo parabolóide $x = 4z^2 + 4y^2$ e pelo plano $x = 4$.

(c) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} 6xy\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ está acima da região plana limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 1$ e abaixo do plano $z = 1 + x + y$.

(d) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} xy\; dx\; dy\; dz$, onde $\mathcal{S}$ é o tetraedro de vértices $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

13. Determine o volume dos sólidos $\mathcal{S}$ descritos abaixo:

(a) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e o parabolóide $z=x^2+y^2$.

(b) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cilindro $x=y^2$ e pelos planos $z=0$ e $x+z=1$.

(c) $\mathcal{S}$ é limitado pelas superfícies $z=8-x^2-y^2$ e $z=x^2+3y^2$.

(d) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cilindro $y=\cos(x)$ e pelos planos $z=y,\ x=0,\ x=\pi/2$ e $z=0$.

(e) $\mathcal{S}$ é limitado pelas superfícies $z=4-x^2-y^2$ e $z=y$, esta situado no interior do cilindro $x^2+y^2=1$ e $z\geq 0$.

(f) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, pelo cilindro $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}=x$ e pelo plano $z=0$.

(g) $\mathcal{S}=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ z\geq 1,\ x+y+z\leq 7,\ x\geq y^2\ \}$

(h) $\mathcal{S}=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leq 1\ \text{ e }\ z^2\leq x^2+y^2\ \}$

(i) $\mathcal{S}=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leq 4\ \text{ e }\ x^2+y^2\leq 2y\ \}$

(j) $\mathcal{S}=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\geq 4,\ \ x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2\leq 2\ \text{ e }\ z\leq\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$.

14. Calcule as seguintes integrais triplas abaixo, usando uma mudança de variáveis conveniente

(a) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}}\sqrt{x^2+y^2}\; dx\; dy\; dz$, onde $\mathcal{S}$ é a região contida dentro do cilindro $x^2+y^2=16$ e entre os planos $z=4$ e $z=5$.

(b) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} z\; dx\; dy\; dz$, onde $\mathcal{S}=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq 0,\ x^2+y^2\geq 1/4\}$

(c) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}}\frac{1}{z^2}\; dx\; dy\; dz$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelas superfícies $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ e $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

(d) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} xyz\; dx\; dy\; dz$, onde $\mathcal{S}=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$

———————————————-2005———————————————

15. Calcule as seguintes integrais:

$$a)\ \int_0^1\int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}dxdy, \qquad\qquad b)\ \int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy$$

16. Calcule a integral
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$$
por meio de coordenadas polares.

17. Esboce o sólido no primeiro octante, delimitado pelos planos
$$z = x+y+1, \quad z=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad x+y=1$$
e calcule o volume.

18. Esboce e calcule, por integração tripla, o volume do sólido interseção dos paraboloides
$$z \leq 1-x^2-y^2, \ \text{ e } \ z \geq x^2+y^2-1$$

19. Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante do plano xy limitada pelas hipérboles $xy=1$, $xy=9$ e pelas retas $y=x$, $y=4x$. Use a transformação $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$ com $u>0$ e $v>0$ para reescrever
$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dxdy$$
como uma integral sobre a região apropriada $\mathcal{R}'$ do plano uv. Depois calcule a integral sobre $\mathcal{R}'$.

20. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo plano $x+y=4$ e pelo cilindro $y^2+4z^2=16$.

21. Encontre o volume do sólido limitado acima pela superficie $x^2+y^2+z^2=z$ e abaixo pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

22. Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante do plano xy limitada pelas retas $y=2x-2$, $y=2x$, $y=4$, $y=0$. Use a transformação $x=u+v$, $y=2v$ com $u>0$ e $v>0$ para reescrever
$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{2x-y}{2}\right)dxdy$$
como uma integral sobre a região apropriada $\mathcal{R}'$ do plano uv. Depois calcule a integral sobre $\mathcal{R}'$.

23. A integral abaixo não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral
$$\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}dydx$$

24. Na seguinte integral. Esboce a região de integração, mude a integral cartesiana para uma integral polar equivalente. Então calcule a integral polar

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} xy^2 dxdy.$$

25. Esboce o sólido no primeiro octante, delimitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelo plano $z=x+4$ e calcule o volume.

26. Esboce e calcule, por integração tripla, o volume do sólido interseção das esferas:

$$x^2+y^2+z^2\leq 1, \quad \text{e} \quad x^2+y^2+z^2\leq 2z$$

——————————————— 2006 ———————————————

27. (1 ponto) Determine a área da região limitadas pelas curvas:

$$\mathcal{C}_1 : 2x = y^2+2 \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 : x = y+5$$

28. (2 pontos) Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a seguinte integral:

$$\int_0^1\int_{y^{1/3}}^{1} \frac{2\pi \text{ sen } (\pi x^2)\, dxdy}{x^2}$$

29. (2 pontos) Esboce a região de integração e calcule a integral mudando previamente para coordenadas polares

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2\; dy\; dx}{(1+x^2+y^2)^2}$$

30. (2 pontos) Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z=9-x^2-y^2$ e pelo plano xy, utilizando coordenadas cilíndricas.

31. (2 pontos)Escreva a integral tripla $I=\iiint_{\mathcal{R}}(6+4y)\; dV$, onde $\mathcal{R}$ é uma região no primeiro octante limitada pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos coordenados.

    a) Em coordenadas cartesianas,
    d) Em coordenadas cilindricas
    c) Em coordenadas esfericas,
    d) Calcule uma das integrais

32. (2-ptos) Encontre o volume da região cortada do cilindro $x^2+y^2=4$ pelo plano $z=0$ e pelo plano $x+z=3$.

33. (2-ptos)Encontre o volume do sólido limitado acima pela superficie $x^2+y^2+z^2=z$ e abaixo pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

——————————————— 2007 ———————————————

34. Encontre o volume do sólido cortado do primeiro octante pela superfície $z = 4 - x^2 - y$.

35. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

$$I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$$

36. Calcule a integral

$$I = \int\int_D (x+y)^2 \text{sen}^{\,2}(x-y) dx dy,$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < \pi\}$

37. Encontre o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

38. Determine o volume do solido W, onde W é limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ e o plano $z = 10$.

39. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

$$I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

40. Calcule o volume do solido, no primeiro octante, delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e pelas superfícies cilindricas $z = 1 - x^2$ e $x = 1 - y^2$.

41. Calcule

$$\int_{\mathcal{R}}\int (2x^2 - xy - y^2) dx dy,$$

onde $\mathcal{R}$ é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y + 2x = 4$, $y + 2x = 7$, $x - y = 2$ e $x - y = -1$.

42. Esboce a região de integração e troque a ordem de integração das seguintes integrais.

a) $I = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy\, dx$

b) $J = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx\, dy$

43. Calcule o volume do solido, no primeiro octante, delimitado pelas superfícies cilindricas $z = 1 - y^2$; $x = y^2 + 1$ e $x = -y^2 + 9$.

44. Calcule
$$\int\int_{\mathcal{R}} (x^2 - y^2)dxdy,$$
onde $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$

45. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral
$$I = \int_0^{\frac{1}{16}} \int_{y^{\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5)dx\ dy$$

46. Encontre o volume do sólido cuja base é a região no plano xy que é limitada pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela reta $y = 3x$ enquanto o topo do sólido é limitado pelo plano $z = x + 4$.

47. Encontre o centroide da região "triangular" limitada pelas retas $x = 2$, $y = 2$ e pela hipérbole $xy = 2$ no plano xy.

48. Seja $\mathcal{D}$ a região limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 2y$. Escreva as integrais triplas iteradas nas ordens $dzdxdy$ e $dzdydx$ que dão o volume de $\mathcal{D}$. Não calcule as integrais.

49. Encontre o volume da região cortada do cilindro elíptico sólido $x^2 + 4y^2 < 4$ pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

50. Encontre o volume do sólido dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

51. Encontre o centro de massa de uma lâmina fina limitada pela parábola $x = y - y^2$ e pela reta $x + y = 0$ se a densidade for $\delta(x, y) = x + y$.

52. Calcule a seguinte integral tripla: $I = \int\int\int_W xy^2z^3dxdydz$ onde W é a região no primeiro octante limitada pela superfície $z = xy$ e os planos $y = x$, $x = 1$ e $z = 0$.

53. Escreva a integral tripla $I = \iiint_{\mathcal{R}} (3 + 2y)\ dV$, onde $\mathcal{R}$ é uma região no primeiro octante limitada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos coordenados.

$a)$ Em coordenadas cartesianas, $b)$ Em coordenadas cilindricas,

$c)$ Em coordenadas esfericas, $d)$ Calcule uma das integrais

54. Calcule a seguinte integral tripla, usando uma mudança de variáveis conveniente
$$J = \int\int\int_S xyz\ dxdydz$$
onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

55. **Regiões Transformadas para Duas Variáveis**

(i) Resolva o sistema

$$u = 2x - 3y, \qquad v = -x + y$$

para x e y em termos de u e v. Depois encontre o valor do jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

(ii) Encontre a imagem pela transformação $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ do paralelo gramo $\mathcal{R}$ no plano xy com fronteira $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ e $y = x + 1$. Esboce no plano uv a região transformada.

56. **Integrais triplas**

iii) Esboce e calcule, por integração tripla, o volume do sólido interseção das esferas:

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1, \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 < 2z$$

——————————————— 2008 ———————————————

57. Esboce a região de integração e escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida. Depois calcule a integral

$$I = \int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos(x^2)dxdy$$

58. Encontre a área da região 'triangular' no plano xy limitada à direita pela parábola $y = x^2$, à esquerda pela reta $x + y = 2$ e acima pela reta $y = 4$

59. Calcular o volume do sólido comprendido entre os parabolóides $z = 3x^2 + 8y^2$ e $z = 9 - x^2 - y^2$.

60. Encontre o volume da região no primeiro octante que está entre os cilindros $x^2+y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e que é limitada abaixo pelo plano xy e acima pela superfície $z = xy$.

61. Escreva uma integral tripla para calcular o volume do solido cortado do cilindro espeso $x^2 + y^2 \leq 4$ pelos cones $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ em:

(a) coordenadas cartesianas.

(b) coordenadas cilindricas.

(c) Coordenadas esfericas.

(d) Encontre o volume calculando uma das integrais triplas.

62. Esboce a região de integração e escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida. Depois calcule a integral

$$I = \int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{y^3 - 1}dydx$$

63. Encontre a área da região limitada pelos gráficos das seguintes equações dadas:

$$xy = 9, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 9$$

64. Encontre o volume da região no primeiro octante que está entre os cilindros $x^2+y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e que é limitada abaixo pelo plano xy e acima pela superfície $z = xy$.

65. Encontre o volume do sólido S limitado superiormente pelo parabolóide $z = 1-x^2-y^2$ e inferiormente pelo plano $z = 1 - y$.

66. Escreva uma integral tripla para calcular o volume do solido cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ em:
    (a) coordenadas cartesianas.
    (b) coordenadas cilindricas.
    (c) Encontre o volume calculando uma das integrais triplas.

67. uma caixa cilindrica de base circular tem volume de 27 m^3. Se o material usado nos lados custa 2 reais o m^2 e o material usado na base inferior e superior custa 2 e 4 reais o m^2 respectivamente. Quais devem ser as dimensões do cilindro mais barato.

68. Esboce a região de integração e escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida.

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

69. Esboce a região de integração e escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida. Depois calcule a integral

$$I = \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \text{sen}\,(xy) dy dx$$

70. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo plano $x = 3$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - y^2$.

71. Encontre o volume do sólido limitada acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

72. Encontre o volume do sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

73. Esboce a região de integração e calcule a integral:

$$I = \int\int_{\mathcal{R}} (3 - 3x) dx dy$$

onde $\mathcal{R}$ é uma região limitada pelas retas:

$$x + y = 1, \quad -x - y = 1, \quad -x + y = 1, \quad x - y = 1$$

74. Esboce a região de integração e escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida.

$$I = \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

75. Calcule a área do subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ abaixo, usando integrais duplas:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy \leq 2, \quad x \leq y \leq x+1, \quad x \geq 0\}$$

76. Calcule a seguinte integral dupla, usando mudança de variáveis apropriadas

$$I = \iint_{\mathcal{R}} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy$$

onde $\mathcal{R}$ é um triângulo de vértices $(0,0),\ (0,2),\ (2,0)$.

77. Calcule o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelas superfícies

$$z = 1 - y^2, \quad x = y^2 + 1 \ \ e \ \ x = -y^2 + 9$$

78. Determine a área da região $\mathcal{D}$ do plano xy definida por:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + (y-2)^2 \leq 4 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \geq 4\}$$

79. Determine a área da região no primeiro quadrante do plano xy, limitada pelas curvas $y = x^2,\ \ y = x^2 + 1,\ \ x + y = 1$ e $x + y = 2$.

80. Determine o volume do solido limitados pelas superficies:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2y \ \text{ e } \ z^2 = x^2 + y^2$$

81. Escreva uma integral tripla para calcular o volume do solido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e os cones $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.
    (a) coordenadas cartesianas.
    (b) coordenadas cilindricas.
    (c) Coordenadas esfericas.
    (d) Encontre o volume calculando uma das integrais triplas.

82. Invertendo a ordem de integração, calcule a seguinte integral:

$$\int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \text{sen}\,(xy)\, dy \right) dx$$

83. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo plano $x = 3$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - y^2$.

84. Considere a região V no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelo plano $y = 1 - x$ e pela superfície $z = \cos(\frac{\pi x}{2})$, com $0 \leq x \leq 1$. Escreva expressões para o volume de V na forma:

a) $\displaystyle\int_{\cdots}^{\cdots} \Big(\int_{\cdots}^{\cdots} \Big(\int_{\cdots}^{\cdots} ...dz \Big) dy \Big) dx$

b) $\displaystyle\int_{\cdots}^{\cdots} \Big(\int_{\cdots}^{\cdots} \Big(\int_{\cdots}^{\cdots} ...dx \Big) dy \Big) dz$

85. Use uma transformação de coordenadas apropriada para calcular a seguinte integral:

$$I = \iint_{\mathcal{R}} (2x^2 - xy - y^2)\; dxdy$$

para a região $\mathcal{R}$ no primeiro quadrante limitada pelas retas

$$y = -2x + 4, \;\; y = -2x + 7, \;\; y = x - 2 \quad \text{e} \quad y = x + 1.$$

86. Encontre o volume da região limitada abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 + 1$.

87. Dado a seguinte integral: $I = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx$

(i) Esboce a região de integração.

(ii) Inverta a ordem de integração.

(iii) Calcule a integral.

88. Encontre o volume do sólido que é limitado acima pelo cilindro $z = 4 - x^2$, dos lados pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e abaixo pelo plano xy. Faça um esboço do sólido.

89. Considere a região :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; x + y + 2z \leq 1, \;\; x + y - 2z \leq 1, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0\}$$

(i) Esboce a região S.

(ii) É possivel determinar o volume da região S. ? Se sua resposta é afirmativa, calcule-o.

90. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $x + z = 2$ e $x = 2$ para $z \geq 0$.

91. Calcule a seguinte integral dupla

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\; dx\; dy$$

onde $\mathcal{D}$ é a região no primeiro quadrante limitada pelas hipérboles

$$x^2 - y^2 = 1, \;\; x^2 - y^2 = 9, \;\; xy = 2 \quad \text{e} \quad xy = 4$$

92. Calcule o volume do solido $\mathcal{S}$ descrito abaixo:

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^3 \leq 4,\ \ x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

93. Escreva uma integral tripla para calcular o volume do solido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ em:

    (a) coordenadas cartesianas.

    (b) coordenadas cilindricas.

    (c) Coordenadas esfericas.

    (d) Encontre o volume calculando uma das integrais triplas.

94. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $z = x + 4$ e $z = 0$.

95. Determine a área da região no primeiro quadrante do plano xy, limitada pelas curvas

$$x^2 - y^2 = 1,\ \ x^2 - y^2 = 9,\ \ xy = 2 \quad \text{e} \quad xy = 4$$

96. Calcule o volume do solido $\mathcal{S}$ descrito abaixo:

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ \ x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

97. Escreva uma integral tripla para calcular o volume do solido

$$\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \ \text{ e } \ z^2 \leq x^2 + y^2\}$$

    (a) coordenadas cartesianas.

    (b) coordenadas cilindricas.

    (c) Coordenadas esfericas.

    (d) Encontre o volume calculando uma das integrais triplas.

98. Invertendo a ordem de integração, calcule a seguinte integral:

$$\int_0^1 \Big(\int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx \Big) dy$$

99. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo plano $y + z = 2$ e pelo cilindro parabólico $x = 4 - y^2$.

100. Considere a região V no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelos planos $y = 1$, $x = 1$ e pela superfície $z = y^2$. Escreva expressões para o volume de V na forma:

    a) $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \Big(\int_{\dots}^{\dots} \Big(\int_{\dots}^{\dots} \dots dz \Big) dy \Big) dx$

    b) $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \Big(\int_{\dots}^{\dots} \Big(\int_{\dots}^{\dots} \dots dx \Big) dy \Big) dz$

101. Use uma transformação de coordenadas apropriada para calcular a seguinte integral:

$$I = \int\!\!\int_{\mathcal{R}} (3x^2 + 14xy + 8y^2)\, dxdy$$

para a região $\mathcal{R}$ no primeiro quadrante limitada pelas retas

$$2y = -3x + 2, \;\; 2y = -3x + 6, \;\; 4y = -x \quad \text{e} \quad 4y = -x + 4.$$

102. Encontre o volume da região limitada abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$.

103. Calcule a seguinte integral, para a região D indicada:

$$\int\!\!\int_{\mathcal{D}} \cos(y^3) dxdy; \;\; \mathcal{D} \text{ limitada por } \; y = \sqrt{x}, \;\; y = 2 \;\text{ e }\; x = 0$$

104. Encontre o volume do sólido cortado da coluna quadrada $|x| + |y| \leq 1$ pelos planos $z = 0$ e $3x + z = 3$.

105. Encontre o volume do sólido dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

——————————— 2009 ———————————

106. Esboce a região de integração e mude a ordem de integração para calcular a seguinte integral:

$$\int_0^3 \Big(\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\, dy \Big) dx$$

107. Esboce a região limitada pelas parábolas. Depois expresse a área da região como uma integral dupla iterada e calcule a integral.

$$\mathcal{P}_1 : x = y^2, \qquad \mathcal{P}_2 := 2y - y^2$$

108. Esboce a região de integração e mude a ordem de integração para calcular a seguinte integral:

$$\int_0^2 \Big(\int_x^2 e^{-y^2}\, dy \Big) dx$$

109. Esboce a região limitada pelas retas e curvas dadas. Depois expresse a área da região como uma integral dupla iterada e calcule a integral.

$$\mathcal{C}_1 : xy = 9, \qquad \mathcal{C}_2 : y = x, \qquad \mathcal{C}_3 : y = 0, \qquad \mathcal{C}_4 : x = 9$$

110. Calcule: $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_{\Omega} x\; dxdydz$, onde Ω é o sólido limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

111. Calcule o volume do sólido limitado acima pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e abaixo pelo plano xy e que esta fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

112. Calcule: $\displaystyle\int\int\int_{\Omega} x \; dxdydz$, onde Ω é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

113. Calcule o volume do sólido limitado por $z = x^2 + 9y^2$ e $z = 18 - x^2 - 9y^2$.

114. **Área por Integração Dupla:**
   (a) Esboce a região no primeiro quadrante, limitada pelas retas $x = 0$, $y = x + 1$, $y = x$ e a curva $xy = 2$.
   (b) Expresse a área da região como uma integral dupla iterada.
   (c) Calcule a integral.

115. **Invertendo a Ordem de Integração:**

Dado a seguinte integral: $$I = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} \sqrt{1 - y^2} \; dy \; dx$$
   (a) Esboce a região de integração.
   (b) Escreva uma integral dupla equivalente com a ordem de integração invertida.
   (c) Calcule a integral

116. **Volume:**
   (a) Esboce o sólido contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e limitado pelos planos $z = 1$ e $y + z = 5$.
   (b) Expresse o volume do sólido como uma integral tripla.
   (c) Calcule a integral.

117. Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelos gráficos de $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.
   (a) Esboce a região a região $\mathcal{R}$.
   (b) Expresse a área da região $\mathcal{R}$ como uma integral dupla iterada.
   (c) Calcule a integral

118. (a) Esboce o sólido contido no cilindro $y = -\cos x$, com $\dfrac{-\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ e limitado pelos planos $z = 0$ e $z = -2y$.
   (b) Expresse o volume do sólido como uma integral tripla.
   (c) Calcule a integral.

119. Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelos gráficos de $y = 4 - x^2$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$.
   (a) Esboce a região a região $\mathcal{R}$.
   (b) Expresse a área da região $\mathcal{R}$ como uma integral dupla iterada.
   (c) Calcular a área da região $\mathcal{R}$.

120. (a) Esboce o sólido no 1^o octante limitado pelos planos coordenados e os gráficos das equações: $z = x^2 + y^2 + 1$ e $2x + y = 2$.
   (b) Expresse o volume do sólido como uma integral tripla.
   (c) Calcule a integral.

121. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral dupla:
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^2 e^x \, dx \, dy$$

122. D é o prisma cuja base é
o triângulo no plano xy
limitado pelo eixo x e
pelas retas $y = x$ e $x = 1$
e cujo tope está no plano
$z = 2 - y$.

123. Encontre o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados e pela superfície $z = 2 - x^2 - y$

124. Escreva uma integral tripla iterada para calcular o volume do solido
$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \; z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \;\text{ e }\; z \geq 0\}$$
   (a) Em coordenadas cartesianas.
   (b) Em coordenadas cilindricas.
   (c) Em Coordenadas esfericas.
   (d) Calcule uma das integrais

125. Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelos gráficos de $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.
   (a) Esboce a região a região $\mathcal{R}$.
   (b) Expresse a área da região $\mathcal{R}$ como uma integral dupla iterada.
   (c) Calcular a área da região $\mathcal{R}$.

126. (a) Esboce o sólido no 1^o octante limitado pelos planos coordenados e os gráficos dos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.
   (b) Expresse o volume do sólido como uma integral tripla.
   (c) Calcule a integral.

127. Dado a seguinte integral: $\quad I = \displaystyle\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{1-y^2}\, dy\, dx$

(a) Esboce a região de integração.

(b) Escreva uma integral dupla equivalente com a ordem de integração invertida.

(c) Calcule a integral

———————————————2010———————————————-

128. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

, esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

129. Determine a área da regiaõ limitada pelas curvas:

$$y^2 = 4x \quad \text{e} \quad x^2 = 4y.$$

130. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$.

131. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral dupla:

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\, dx\, dy$$

132. Use integral dupla para definir a área da região $\mathcal{R}$ abaixo da parábola $y = 4x - x^2$, acima do eixo x e acima da reta $y = -3x + 6$. Não precisa calcular a integral

133. Use uma integral dupla
para encontrar o volume do
sólido no primeiro octante
limitada pelos planos
coordenados e pela superfície
$z = 4 - x^2 - y$. (ver a fig.)

134. Encontre o volume do sólido limitado pelas seguintes superficiés:

$$\text{cilindro: } x^2 + 4y^2 = 4, \qquad \text{plano: } z = 0, \qquad \text{plano: } x + z = 4$$

135. Dado o sólido limitado abaixo pelo plano xy, dos lados pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e acima pelo cone $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$.

(a) Encontre os limites de integração em coordenadas esféricas para a integral que calcula o volume do sólido dado.

(b) Calcule a integral.

136. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral dupla:

$$\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\, dy\, dx$$

137. Use integral dupla para definir a área da região limitada pelas curvas

$$xy = 9,\ y = x,\ y = 0 \ \text{ e } \ x = 9.$$

138. Use uma integral tripla para definir o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos:

$$x + y + 2z = 2 \quad \text{e} \quad 2x + 2y + z = 4$$

139. A região cortada do cilindro elíptico sólido $x^2 + 4y^2 \leq 4$ pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

140. Dado o sólido limitado abaixo pela esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ e acima pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (a) Encontre os limites de integração em coordenadas esféricas para a integral que calcula o volume do sólido dado.

   (b) Calcule a integral.

141. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral dupla:

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$$

142. Determine a área da região limitada pelas curvas:

$$\mathcal{C}_1 : \ 4x + 4 - y^2 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 : \ x + y - 2 = 0$$

143. Encontre o volume do sólido limitado pelas seguintes superficiés:

$$\text{cilindro: } x^2 + y^2 = 1, \qquad \text{plano: } z = 0, \qquad \text{superficie: } z = 4e^{(-x^2-y^2)}$$

144. Encontre o volume do sólido limitado pelas seguintes superficiés:

$$\text{cilindro: } x^2 + 4y^2 = 4, \qquad \text{plano: } z = y, \qquad \text{plano: } z = 2y$$

145. Calcule

$$I = \int\int\int_S x^2 \ dxdydz$$

onde S é um sólido em $\mathbb{R}^3$ limitado pelo plano xy e os hemisférios $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

146. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral dupla:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\, dx\, dy$$

147. Determine o volume do sólido, abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices em $(1,1),\ (4,1)$ e $(1,2)$.

148. Utilize coordenadas cilíndricas para determinar o volume do sólido dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

149. Encontre o volume do sólido limitado pelas seguintes superficiés:

$$\text{cilindro: } x^2 + 4y^2 = 4, \qquad \text{plano: } z = 1, \qquad \text{plano: } z + y = 6$$

150. Encontre o volume da região menor cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ pelo plano $z + y = 2$.

151. Calcule a integral iterada.

$$\int\int_R \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dxdy, \text{ onde } R = [1,4] \times [1,2].$$

152. Esboce a região de integração e faça a mudança da ordem de integração.

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 f(x,y)\, dx\, dy$$

153. Encontre o volume do sólido limitado pelas seguintes superficiés:

$$\text{cilindros: } z = x^2, \quad y = x^2 \qquad \text{e} \qquad \text{planos: } z = 0, \quad y = 4$$

154. Utilize coordenadas cilíndricas para determinar o volume do sólido acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

155. Determine a àrea da região limitada pelas curvas:

$$y = x^2, \;\; x + y = 2 \;\text{ e }\; y = 0$$

156. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies:

$$z = 4 - x^2, \;\; x + y = 2, \;\; x = 0, \;\; y = 0, \;\; z = 0$$

157. Determinar o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = y^2 + 4x^2$ e pelo plano $z = 4$.

158. Determinar o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = y^2 + x^2$ e pelo plano $z = 2x + 2y - 1$.

159. Calcule o volume do sólido interior a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e exterior a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

160. Seja $\mathcal{S}$ o sólido no primeiro octante limitado pelos gráficos das equações:

$$z = 4 - y^2, \quad x + y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0 \ \text{ e } \ z = 0.$$

(a)(5-ptos) Esboce o sólido $\mathcal{S}$.

(b)(20-ptos) Determine o volume do sólido $\mathcal{S}$.

(c)(20-ptos) Determine a área superficial do sólido $\mathcal{S}$.

(d)(5-ptos) Se a densidade em cada ponto $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ é dada por $\rho(x, y, z) = x^2y^2z^2$,estabeleça, mas não calcule a integral necessária para a determinação da massa do sólido $\mathcal{S}$.

——————————— 2011 ———————————

161. Determinar o volume do sólido delimitado pelos cilindros $z = x^2, \quad y = x^2$ e pelos planos $z = 0, \quad y = 4$. Esboce o sólido.

162. Encontre o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelo plano $x + y = 4$ e pelo cilindro $y^2 + 4z^2 = 16$. Esboce o região.

163. Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido compreendido entre os parabolóides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - x^2 - y^2$. Esboce o sólido.

164. Encontre o volume da região cortada do cilindro elíptico sólido $x^2 + 4y^2 \leq 4$ pelo plano xy e pelo plano $z + x = 2$. Esboce o sólido.

165. Calcule a massa do sólido que tem o formato da região

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z \ \}$$

e cuja densidade é $\rho(x, y, z) = z$. Esboce o sólido $\mathcal{S}$.

166. Inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}} \, dx \, dy$$

167. Esboce a região limitada pelos gráficos das eqauções dadas e cálcule sua área com auxílio de integrais duplas.

$$y = x, \quad y = 3x \ \text{ e } \ x + y = 4$$

168. Esboce o sólido.no primeiro octante limitado pelos gráficos das equações dadas e calcule seu volume

$$z = 4 - x^2, \quad x + y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0 \ \text{ e } \ z = 0$$

169. Determine o volume do sólido interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

170. Determine o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

171. Seja $\mathcal{S}$ o sólido no primeiro octante limita pelos planos coordenados, pelo plano $y + z = 2$ e pelo cilindro $x = 4 - y^2$.

    (a) Esboce o sólido $\mathcal{S}$.

    (b) Encontre o volume do sólido $\mathcal{S}$.

    (c) Encontre a área superfícial do sólido $\mathcal{S}$.

172. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

, esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

173. Determine a área da regiaõ limitada pelas curvas:

$$y^2 = 4x \quad \text{e} \quad x^2 = 4y.$$

174. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$.

——————————————— 2012 ———————————————-

175. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

176. Determine a área da regiaõ limitada pelas retas:

$$y = x, \quad y = 3x \quad \text{e} \quad x + y = 4.$$

177. Parabolóide e Cilindro: Encontre o volume da região limitada acima pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e abaixo pelo plano xy e que esta fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

178. Calcule o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelas superfícies

$$z = 1 - y^2, \quad x = y^2 + 1 \;\; e \;\; x = -y^2 + 9$$

179. Determinar a área da região do plano $z = y + 1$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

180. Esboce a região de integração e escreva uma integral dupla equivalente com a ordem de integração invertida:

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\, dy$$

181. Determine a área da regiao limitada pela parábola $x = -y^2$ e pela reta $y = x + 2$.

182. Encontre o volume da região limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pelo triângulo delimitado pelas retas $y = x$, $x = 0$ e $x + y = 2$ no plano xy.

183. Encontre o volume do sólido limitado abaixo pelo plano xy, dos lados pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e acima pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

184. Calcule a seguinte integral mudando a ordem de integração:

$$\int_0^9 \left(\int_{\sqrt{y}}^3 \text{sen}\,(x^3)\, dx \right) dy$$

185. Calcule a área da região limitada pelas curvas:

$$x = 4y - y^2 \ \text{ e } \ x + y = 6$$

186. usando integrais duplas, determine o volume do sólido em $\mathbb{R}^3$ abaixo da superfície $z = 3x + y$ e acima da região Ω do plano xoy, onde:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x^2 + 9y^2 \leq 36,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

187. Encontre o volume do sólido que esta dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

188. Determinar o volume do sólido limitada pela superfície $z^2 = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

189. Calcule a massa do sólido que tem o formato da região

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z \right\}$$

e cuja densidade é $\rho(x, y, z) = z$. Esboce o sólido S.

Lembrar que $massa(S) = \displaystyle\iiint_S \rho(x, y, z) dxdydz$

190. Calcule a seguinte integral mudando a ordem de integração:

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 e^{xy}\, dx \right) dy$$

191. Calcule a área da região limitada pelas curvas:

$$y = x^2, \quad x + y = 2 \quad \text{e} \quad y = 0$$

192. Esboce o sólido, no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 2x$, $y = 0$ e $z = 0$, e encontre o seu volume.

193. Calcule valor da integral

$$\int\int\int_E y^2 z^2 dxdydz$$

onde E é delimitado pelo paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$.

194. Calcule a massa do sólido W inferior ao cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e limitado pela esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, sendo a densidade $\delta(x, y, z) = z^2$.Lembrar:

$$\text{massa}(w) = \int\int\int_w \delta(x, y, z) dxdydz$$

——————————————— 2013 ———————————————-

195. A integral abaixo não pode ser calculada exatamente , em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada.

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\, dx\, dy$$

   (a) Esboce a região de integração.
   (b) Faça a mudança da ordem de integração e calcule a integral.

196. Determine o volume do sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$ e pelo cilindro parabólico $z = 4 - x^2$.

197. A integral abaixo não pode ser calculada exatamente , em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

   (a) Esboce a região de integração.
   (b) Faça a mudança de variaveis em coordenadas polares e calcule a integral.

198. Use coordenadas cilindricas para calcular a seguinte integral tripla

$$\int\!\!\int_{S}\!\!\int \sqrt{x^2+y^2}\; dx\; dy\; dz$$

onde S é sólido delimitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2 - 4$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

199. Use coordenadas esfericas para calcular o volume do sólido que esta dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

200. Calcule a integral, fazendo uma mudança de variáveis apropriada.

$$\int\!\!\int_{R} \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx\; dy$$

onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ e $(0, 1)$.

201. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\; e^{2y}}{4-y}\; dy\; dx.$$

Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

202. Determine a área da regiaõ limitada pelas curvas:

$$y^2 = 4x \quad \text{e} \quad x^2 = 4y.$$

203. Determine o volume do sólido abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1), (4, 1)$ e $(1, 2)$.

204. Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ e pelo plano $z = 7$.

205. Determinar o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = y^2 + 4x^2$ e pelo plano $z = 4$.

206. Calcule o volume do sólido interior a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e exterior a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

207. A integral abaixo não pode ser calculada exatamente , em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada.

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\; dx\; dy$$

(a) Esboce a região de integração.

(b) Faça a mudança da ordem de integração e calcule a integral.

208. Esboce a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$. Depois expresse a área da região como uma integral dupla iterada e calcule a integral.

209. Encontre o volume da região limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pelo triângulo delimitado pelas retas $y = x$, $x = 0$ e $x + y = 2$ no plano xy.

210. A integral abaixo não pode ser calculada exatamente , em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

(a) Esboce a região de integração.

(b) Faça a mudança de variaveis em coordenadas polares e calcule a integral.

211. Use coordenadas cilindricas para calcular a seguinte integral tripla

$$\int_S\int\int \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$$

onde S é sólido delimitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2 - 4$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

——————————— 2014 ———————————

212. Calcule a seguinte integral mudando a ordem de integração

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$$

213. Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas:

$$\text{A parábola} \;:\; y = 4 - x^2 \quad \text{e a reta} \;:\; y = 3x$$

214. Determine o volume do sólido delimitado pelas superfícies cilíndricas parabólicas $z = x^2,\ y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$.

215. Use coordenadas cilindricas para calcular a seguinte integral tripla

$$\int_S\int\int e^z\, dx\, dy\, dz$$

onde S é sólido delimitado pelos parabolóides $z = 1+x^2+y^2$, pelo cilindro $x^2+y^2 = 5$ e pelo plano xy.

216. Use coordenadas esfericas para calcular a seguinte integral tripla:

$$\int_S\int\int x^2\, dx\, dy\, dz$$

onde S é sólido delimitado pelo plano xz e os hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.

——— Problema Quente: Cálculo. James Stewart..pag 945 ———

217. O plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, com $a>0,\ b>0,\ c>0$ corta o elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

em dois pedaços. Encontre o volume do pedaço menor.

218. Calcule a integral trocando a ordem de integração

$$\int_0^1\int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx$$

219. Calcule $\displaystyle\int\int_D (x+2y)dx\,dy$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y=x^2$ e $y=1+x^2$.

220. Calcule a integral $\displaystyle\int\int_R (2x-y)dx\,dy$ colocando-a em coordenadas polares. onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2+y^2=4$ e as retas $x=0$ e $y=x$.

221. Calcule a integral $\displaystyle\int\int\int_S (x+y+z)dx\,dy\,dz$ colocando-a em coordenadas cilíndricas, onde S é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z=4-x^2-y^2$.

222. Encontre o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelo plano $x+z=4$ e pelo cilindro $x^2+4y^2=16$.

223. Calcule a integral trocando a ordem de integração

$$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xy\,e^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$$

Passos a seguir: Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral.

224. Calcule a área sa região limitada pelas seguintes parábolas $x=y^2$ e $x=2y-y^2$.

Passos a seguir: Esboce a região limitada pelas parábolas. Depois expresse a área como uma integral dupla iterada e calcule a integral.

225. Calcule a integral $\displaystyle\int\int\int_S x^2dx\,dy\,dz$ colocando-a em **coordenadas cilíndricas,** onde S é o sólido que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z=2\sqrt{x^2+y^2}$.

226. Calcule a integral $\displaystyle\int\int\int_S x^2dx\,dy\,dz$ colocando-a em **coordenadas esféricas,** onde S é o sólido limitado pelo plano $z=0$ e os hemisférios $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ e $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

227. Encontre o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$, $x + z = 4$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

228. O plano $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, corta o elipsoide sólido

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1$$

em dois pedaços. Encontre o volume do pedaço menor.

229. Calcule a integral trocando a ordem de integração

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} \; dy \; dx$$

Passos a seguir: Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral.

230. Calcule a área da região limitada pelas seguintes parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Passos a seguir: Esboce a região limitada pelas parábolas. Depois expresse a área como uma integral dupla iterada e calcule a integral.

231. Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

232. Calcule a integral $\displaystyle\int\int\int_S e^z dx \; dy \; dz$ colocando-a em **coordenadas cilíndricas,** onde S é o sólido que está delimitado pelo parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 5$ e pelo plano xy.

233. Utilize **coordenadas esféricas** para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

234. Inverter a ordem de integração da seguinte integral

$$\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) \; dy \; dx$$

Passos a seguir: Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração.

235. Calcule a seguinte integral dupla : $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x \; dxdy$, onde a região de integração $\mathcal{D}$ é dado por todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x + y \geq 2$ e $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$

Passos a seguir: Esboce a região $\mathcal{D}$. Depois colocar os limites de integração na integral dupla e calcule a integral.

236. Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z = 2$, $y = 2x$, $y = 0$ e $z = 0$.

237. Calcule a integral $\displaystyle\int\int\int_S e^z dx \; dy \; dz$ colocando-a em **coordenadas cilíndricas,** onde S é o sólido que está delimitado pelo parabolóide $z = 3 + x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano xy.

238. Inverter a ordem de integração da seguinte integral

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\ dy\ \ dx$$

Passos a seguir: Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração.

239. Calcule a seguinte integral dupla : $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} xy\ dxdy$, onde $\mathcal{D}$ é região do plano xy limitada pelas retas $y = x$, $y = 2x$ e $x + y = 2$.

Passos a seguir: Esboce a região $\mathcal{D}$. Depois colocar os limites de integração na integral dupla e calcule a integral.

240. Determine o volume do prisma $\mathcal{D}$ cuja base é o triângulo no plano xy limitado pelo eixo x e pelas retas $y = x$ e $x = 1$ e cujo topo está no plano $z = 2 - y$.

——————————— 2015 ———————————

241. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\ dx\ dy$$

esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

242. Determine a área da regiaõ limitada pelas curvas:

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 4x - x^2.$$

243. Seja $\mathcal{D}$ a região limitada pelas curvas $y + x = 1$, $y + x = 2$, $y = x$ e $y = 0$, calcule:

$$\int\int_{\mathcal{D}} \frac{y\ \ln(x+y)}{x^2}\ dx\ dy$$

244. Determine o volume do sólido situado acima do plano xy e limitado pelos gráfico de $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 2y$.

245. Determine o volume do sólido $\mathcal{S}$, onde:

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\ \text{ e }\ x^2 + y^2 \geq 9\}$$

246. Encontre o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelo plano $x + z = 4$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 16$.

247. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y\, e^{x^2}}{x^3}\, dx\, dy$$

esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

248. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\ \ dx$$

esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

249. Determine o volume do sólido dentro do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

250. A seguinte integral não pode ser calculada exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integraçaõ dada:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx.$$

Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

251. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$.

252. Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+y^2}$.

253. Esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{1+y^3}\, dy\, dx.$$

254. Encontre o volume do sólido limitada pelos paraboloides $z = 3x^2+3y^2$ e $z = 4-x^2-y^2$.

255. Calcule a integral

$$\int\int\int_{\mathcal{S}} x^2\, dx\, dy\, dz$$

onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelo plano xz e pelos hemisférios

$y = \sqrt{9-x^2-z^2}$ e $y = \sqrt{16-x^2-z^2}$.

256. Encontre o volume do sólido delimitado pelo parabolide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y$ e $z = 2 + y$.

257. Calcule a $\displaystyle\int\int\int_D (x^3 + xy^2)dV$,

onde D é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

258. Calcule a $\displaystyle\int\int\int_S (9 - x^2 - y^2)dV$,

onde S é o hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$.

259. Determine a área da regiaõ limitada pelas curvas: $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$.

260. Determinar o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 7$.

261. Encontre o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x + z = 1$, $y + 2z = 2$.

262. Encontre o volume da região comum aos interiores dos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

263. Encontre o volume da região limitada acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

264. Encontre o volume do sólido limitado acima pelo cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, dos lados pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e abaixo pelo plano xy

2017

265. Calcule a integral trocando a ordem de integração

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 y \cos(x^3 - 1)\, dx\, dy$$

266. Determine a área da região limitada pelas curvas: $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$

267. Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0,\ y = 1,\ y = x,\ z = 0$

268. Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido limitados pelos paraboloides $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = 2x^2 + 2y^2$

269. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo plano $x + y = 4$ e pelo cilindro $y^2 + 4z^2 = 16$.

270. Encontre o volume do sólido limitado acima pela superficie $x^2 + y^2 + z^2 = z$ e abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

271. Seja $\mathcal{S}$ o sólido limitado pelo paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ e pelo plano $x = 0$, calcule:

$$\int\int\int_{\mathcal{S}} y^2\ z^2\ dx\ dy\ dz$$

272. Determine o volume do solido limitados pelas superficies:

$$z = 0,\ \ x^2 + y^2 = 2y\ \text{ e }\ z^2 = x^2 + y^2$$