Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

5^{ta} Lista de exercicios de cálculo II

Curitiba, 02 de Junho de 2010

INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR:

1. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\sigma(t))||\,\sigma^{'}(t)||\, dt$, onde $f : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (função escalar) e $\mathcal{C}$ uma curva, definida pela função $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
   (a) $f(x, y) = 2xy^2$ e $\mathcal{C}$ é parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t), sen(t)),\ 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $A(2, 0)$ a $B(0, 2)$.
   (c) $f(x, y) = x + y$ e $\mathcal{C}$ é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$.
   (d) $f(x, y, z) = e^z$ e $\mathcal{C}$ é parametrizada por $r(t) = (1, 2, t^2)$, no intervalo $[0, 1]$.
   (e) $f(x, y, z) = x + y$ e $\mathcal{C}$ é a curva obtida pela intersecao de $z = x^2 + y^2,\ z \leq 2$ e $x = y,\ y \geq 0$.

REPRESENTAÇÃO PARAMETRICA DE UMA SUPERFÍCIE: $\mathcal{S}$

$$\varphi : D \longmapsto \mathcal{S} \ \text{ onde } \ \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathcal{S},\ \forall (u, v) \in D$$

2. Encontre uma parametrização da superfície:
   (a) Parabolóide: $z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
   (b) Tronco de cone: a porção do cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 2$ e $z = 4$.
   (c) Calota esférica: A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante entre o plano xy e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (d) Calota esférica: A porção superior cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ pelo plano $z = -2$.
   (e) Cilindro parabólico entre planos: A superfície cortada do cilindro parabólico $y = x^2$ pelos planos $z = 0$, $z = 3$ e $y = 2$.
   (f) Faixa cilíndrica circular: A porção do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy entre os planos $y = -2$ e $y = 2$.
   (g) Plano inclinado dentro de um cilindro: A porção do plano $x - y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 3$

ÁREA DE SUPERFÍCIES:

$$A(\mathcal{S}) = \iint\limits_{D} \left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right| du\, dv$$

3. Calcule a área das seguintes superfícies:
   (a) A porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) A porção do plano $z = -x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   (c) A superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitada pelo plano $z = 0$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (d) A superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre os planos $z = 0$ e $x + 2z = 3$.

   (e) A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entre os planos $z = -1$ e $z = \sqrt{3}$.

   (f) A porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.

   (g) A calota cortada do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (h) A superfície do parabolóide $z = 5 - \dfrac{x^2}{2} - y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE FUNÇÃO ESCALAR:

$$\iint\limits_{S} g\; ds = \iint\limits_{S} g(x,y,z)\; ds = \iint\limits_{D} g(\varphi(u,v)) \left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right| du\, dv$$

4. Integre a função dada sobre a superfície
   (a) $g(x,y,z) = x^2 + y^2$, sobre a esfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

   (b) $g(x,y,z) = xyz$, sobre a porção do plano $\mathcal{S} : x + y + z = 1$, no primeiro octante.

   (c) $g(x,y,z) = y^2 + z^2$, sobre a superfície do sólido limitado pela parte superior da esfera : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (d) $g(x,y,z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$, sobre a cúpula parabólica $z = 1 - x^2 - y^2, \;\; z \geq 0$.

   (e) $g(x,y,z) = \frac{xy}{z}$, sobre a superfície $\mathcal{S} : z = x^2 + y^2, \;\; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL:

5. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot \, dr = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma^{'}(t)\, dt$, onde $F : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (função vetorial) e $\mathcal{C}$ uma curva, definida pela função $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
   (a) $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ e $\mathcal{C}$ é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido antihorário.
   (b) $F(x, y) = (xy, -y)$ e $\mathcal{C}$ é formado pela reta que ligando $A(-3, -3)$ a $B(-1, 1)$ e pelo arco da parábola $y = x^2$ de $B(-1, 1)$ a $C(2, 4)$.
   (c) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ e $\mathcal{C}$ é o círculo centrado na origem, percorrida no sentido anti-horário.
   (d) $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ e $\mathcal{C}$ é o segmento de reta ligando $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 4)$.
   (e) $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - z^2)$ e C é a curva obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o plano $y = 1$, percorrida no sentido anti-horário

6. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\, dx + x^2\, dy$, onde $\mathcal{C}$ é a curva parametrizada por:
   (a) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\ t),\ t \in [0, 2\pi]$.
   (b) O quadrado de vertices $(\pm 1, \pm 1)$.
   (c) O quadrado de vertices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ e $(0, 1)$.

7. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força dado:
   (a) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ao mover uma particula ao longo da fronteira da região limitada por $[0, a] \times [0, a]$, $(a > 0)$.
   (b) $F(x, y, z) = (y, x, z^2)$ para deslocar uma particula ao longo da helice: $\gamma(t) = (2\cos t, 2\text{sen}\ t, 2t)$ do ponto $(2, 0, 0)$ ao ponto $(2, 0, 4\pi)$.
   (c) $F(x, y, z) = (y, z, x)$ para deslocar uma particula ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ do ponto $(0, 0, 0)$ ao ponto $(2, 4, 8)$.

8. Verifique que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ é independente do caminho, achando seu potencial, em caso afirmativo
   (a) $F(x, y) = (e^x \text{sen}\ y, e^x \cos y)$
   (b) $F(x, y) = (3x^2 y, x^3 + 4y^3)$
   (c) $F(x, y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2 y - 3xy^2 + 2)$
   (d) $F(x, y) = (2x\text{sen}\ y + 4e^x, \cos y)$
   (e) $F(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2 e^x, 2x - 2ye^x)$
   (f) $F(x, y) = (-2y^3 \text{sen}\ x, 6y^2 \cos x + 5)$
   (g) $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$
   (h) $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$
   (i) $F(x, y, z) = (y\text{sen}\ z, x\text{sen}\ z, xy \cos z)$
   (j) $F(x, y, z) = (2xz + y2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2))$

Teorema de Green:

$$\oint_{\partial D} F_1(x,y)\ dx + F_2(x,y)\ dy = \int\int_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dx\ dy$$

9. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} 4ydx + 7xdy$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0), (4,0)$ e $(2,2)$, no sentido anti-horário:
   (a) diretamante.
   (b) utilizando o teorema de Green.

10. Calcule as seguintes integrais utilizando o teorema de Green, ao longo das curvas $\mathcal{C}$, orientadas positivamente.:
   (a) $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^y}{x} dx + (e^y \ln x + 2x)dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.
   (b) $\oint_{\mathcal{C}} (\cos x - 5y)dx + (4x - \frac{1}{y})dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $y + x^2 - 9 = 0$ e $y - 5 = 0$.
   (c) $\oint_{\mathcal{C}} (x - y)dx - x^2 dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região $[0,2] \times [0,2]$.
   (d) $\oint_{\mathcal{C}} (e^x - 3y)dx + (e^y + 6x)dy$, onde $\mathcal{C}$ é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.
   (e) $\oint_{\mathcal{C}} (x + y)dx + (y - x)dy$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

11. Utilizando os corolários do teorema de Green, calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas:
   (a) $y = x^2$ e $y^2 = x$ $\quad$ (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
   (c) $y = 4x^2$ e $y = 16x$ $\quad$ (d) $y^2 = x^3$ e $y = x$

12. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região nas hipóteses do teorema de Green. Utilizando o teorema, verifique que as coordenadas do centroide de D são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_{\partial D} x^2\ dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_{\partial D} y^2\ dx$$

   onde $A = \text{área}(D)$
   (a) Ache o centróide do triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$.
   (b) Ache o centróide da região definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que $y \geq 0$

13. Verifique que $\oint_{\mathcal{C}} y^2\ dx + (2xy - 3)\ dy = 0$, sendo $\mathcal{C}$ a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule a integral ao longo do arco dessa elipse, situado no primeiro quadrante

14. Encontre todos os possíveis valores de

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right) dy$$

onde $\mathcal{C}$ é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

15. Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva definida por $y^2 = 2(x+2)$, $-2 \leq x \leq 2$, orientada no sentido decrescente em relação à variavel y.

16. Sejam F_1 e F_2 funções com derivadas parciais continuas no plano xy tais que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos $(4,0)$, $(0,0)$ e $(-4,0)$. Indique por $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ as circunferências de equações:

$$(x-2)^2 + y^2 = 9, \quad (x+2)^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

respectivamente, orientadas no sentido anti-horário. Sabendo que:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} F_1\, dx + F_2\, dy = 11, \quad \oint_{\mathcal{C}_2} F_1\, dx + F_2\, dy = 9 \quad \text{e} \quad \oint_{\mathcal{C}_3} F_1\, dx + F_2\, dy = 13$$

calcule $\oint_{\mathcal{C}_4} F_1\, dx + F_2\, dy$.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPO VETORIAL:

$$\int\int_{S} G \cdot ds = \int\int_{S} (G \cdot n) ds = \int\int_{D} G(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du\, dv$$

17. Calcule o fluxo do campo vetorial $G(x,y,z)$ através da superfície $\mathcal{S}$ no sentido dado:
    (a) $G(x,y,z) = (z^2, x, -3z)$ para fora (normal para fora do eixo x) através da superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$
    (b) $G(x,y,z) = (3z, -4, y)$ onde a normal unitaria apontando para cima da superfície $x + y + z = 1$ no primeiro octante.
    (c) $G(x,y,z) = (x,y,z)$ onde a normal unitaria apontando para cima da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, $0 \leq z$.
    (d) $G(x,y,z) = (z^2 - x, -xy, 3z)$ e $\mathcal{S}$ é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy, com vetor normal exterior.
    (e) $G(x,y,z) = (-3xyz^2, x + 2yz - 2xz^4, yz^3 - z^2)$ e $\mathcal{S}$ é a união da superfície $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ com $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ indicando a orientação escolhida para $\mathcal{S}$.

Teorema de Stokes:

$$\int_{\partial S} G \cdot dr = \underset{\text{S}}{\int\int} rot(G) \cdot ds$$

18. calcule:

    (a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $z + y = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

    (b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} ydx + zdy + xdz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$.

    (c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} 2xydx + [(1-y)z + x^2 + x]dy + (\frac{x^2}{2} + e^z)dz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y-1)^2$.

    (d)Considere a superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \ z = \sqrt{x^2+y^2}; \ \ 1 \leq z \leq 3\}$.

    Calcule:

    $$\underset{\text{S}}{\int\int} rot(G) \cdot ds$$

    onde $G(x,y,z) = (yz, -xz, z^3)$.

Teorema de Gauss (Teorema da divergencia):

$$\underset{\partial\text{W}}{\int\int} G \cdot ds = \underset{\text{W}}{\int\int\int} div(G)\ dx\ dy\ dz$$

19. Seja W o sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$. Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (y^2, x, zx)$ atraves da superficie $S = \partial W$, com campo de vetores normais exterior a S, se:

20. Calcule o fluxo do campo de vetores:

    $$G(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

    através da superfície do sólido $W: \ \ 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, com campo de vetores normais exterior a superfície.

21. Calcule o fluxo do campo de vetores $G(x,y,z) = (2x, -1, z)$ através da superfície do tetraedro determinado pelo plano $2x + y + 3z = 6$ e pelos planos coordenados.

22. Encontre o fluxo do campo $G(x,y,z) = (e^y + \cos(yz), -2zy + \text{sen }(xz), z^2)$ através da superfície S, orientada positivamente, união das superfícies S_1 e S_2, onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e S_2 tem equação $z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.