LISTA 1

1. Calcule a área do retângulo de dimensões $\frac{3}{70}$ e $\frac{7}{48}$.
2. Considere o pentágono $ABCDE$ de lados $AB = \frac{7}{6}$; $BC = \sqrt{12}$; $CD = \frac{21}{20}$;

   $DE = \sqrt{27}$ e $EA = \sqrt{5}$.

   a) Calcule o perímetro desse pentágono.
   b) Qual é o menor lado?
3. Dê contra-exemplos para mostrar que as afirmações a seguir são falsas.
   a) $\frac{d}{c+b} = \frac{d}{c} + \frac{d}{b}$, para quaisquer números reais *a, b, c*, com $c \neq 0, b \neq 0$ e $c + b \neq 0$.
   b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, para quaisquer números reais não-negativos *a, b*.
   c) $\sqrt{a^2} = a$, para qualquer número real *a*.
   d) $\frac{x^2 + ay}{x} = x + ay$, para qualquer $x \neq 0$.
4. Se $|a| = 2$, quais são os possíveis valores para *a*? Represente na reta numérica o conjunto de todos os valores de *a* que satisfazem à igualdade dada.
5. Em cada caso a seguir, determine todos os valores de *x* que satisfazem a relação dada e, também, represente na reta numérica todos esses valores de *x*:
   a) $|x - 3| = 2$ *b*) $|x - 3| < 2$ *c*) $|x - 3| > 2$
6. Determine todas as raízes reais de cada equação a seguir:
   a) $(2x - 3)(4x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$;
   b) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$;
   c) $(x^2 - 4x + 3)^2 = 1$.
   d) $x(x - 7)^2 = 50x$.
7. Determine, se possível, os valores de *A*, *B* e *C* para que $\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, para todo *x* real.
8. Determine, se possível, os valores de *A*, *B* e *C* para que $\frac{x^2-x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, para todo *x* real.
9. Determine *a* para que a distância entre os pontos P = (*a*, 3) e Q = (5, 6) seja igual a 4.
10. Para dar uma interpretação para o exercício 9, responda às seguintes perguntas:
    a) Que figura fica caracterizada pelos pontos da forma P = (*a*, 3)?
    b) Que figura fica caracterizada pelos pontos cuja distância a Q = (5, 6) é igual a 4?
    c) Utilizando os itens (*a*) e (*b*), dê uma interpretação para o exercício 9.

Respostas: 2) *b*) *CD* 6) *a*) $\pm\frac{3}{2}$ *b*) 0, 2, 3 *c*) 2, $2 \pm \sqrt{2}$ *d*) 0, $7 \pm 5\sqrt{2}$

7) *A* = 1, *B* = -1, *C* = 2 8) Não tem solução.

11. Determine os pontos sobre a reta de equação $y = 2x - 3$ cujas distâncias ao ponto Q = (4, 5) sejam iguais a $\frac{7\sqrt{5}}{2}$.

12. Determine o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Explicite y em função de x e identifique a figura que cada uma dessas funções representa?

13. Determine a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$ no ponto Q de abscissa 3 sobre essa circunferência e que está no quarto quadrante.

14. Analise a resolução da equação $x(x^2 - 3x) = -2x$ e diga o que está errado.
Sol. $x(x^2 - 3x) = -2x$. Cancelando o x obtemos $(x^2 - 3x) = -2$. Daí $x^2 - 3x + 2 = 0$, o que nos fornece as raízes $x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$, isto é, 1 e 2.

15. Simplifique:

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$ *b)* $\frac{(5+h)^2 - 25}{h}$ *c)* $\frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$

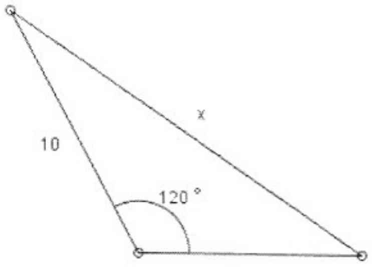
16. Resolva as desigualdades:

a) $-2x^2 + 10x - 12 < 0$ *b)* $-4x + 7 > 0$ *c)* $\frac{\sqrt{2-x}}{x^2 - 2x - 3} \leq 0$

d) $\frac{2x(x^2-1) - 2x.2x}{(x^2-1)^2} \geq 0$ *e)* $x > \sqrt{x+2}$ *f)* $\frac{-2x}{x+1} \geq \frac{4x+3}{x+2}$

g) $\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$, no intervalo $[0, 2\pi]$ *h)* $\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $[0, 2\pi]$

17. Determine o valor de x no triângulo abaixo.



18. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & se\ x \leq 1 \\ x^2, & se\ x > 1 \end{cases}$, calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

19. Esboce o gráfico de $y = |x - 2| + |x + 6|$.

Respostas: 11) $\left(\frac{15}{2}, 12\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ 12) centro $(2, -3)$ e raio 4.

13) $y = \frac{3}{4}x + 6$. 16) $c)\ -1 < x \leq 2$ $e)\ x > 2$ $g)\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$

$h)\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$. 17) $x = 14$. 18) $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = 4$.

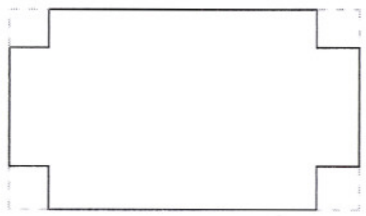
20. Encontre o domínio de cada função a seguir:

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x-3)}{\sqrt{6x - x^2}}$ *b*) $h(t) = \sqrt{t} + \sqrt{4 - t}$.

21. Expresse a área de um retângulo em função de um de seus lados sabendo que ele tem perímetro igual a 20 cm.

22. Expresse o perímetro de um retângulo em função de um de seus lados sabendo que ele tem área igual a 16 cm^2.

23. Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão que tem dimensões 12 cm por 20 cm. Devem-se cortar quadrados de lados $\boldsymbol{x}$ em cada canto do papelão e depois dobrá-los. Expresse o volume da caixa em função de $\boldsymbol{x}$.



24. Um quadrado está inscrito em um círculo de raio r. Expresse o lado do quadrado em função de r.

25. Determine as coordenadas do ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que está mais próximo do ponto $P = (4, 3)$.

26. Ache o ponto do eixo y que é eqüidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.

27. Determine todas as retas que passam pelo ponto $P = (2,3)$ e que são tangentes a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

28. Os pontos $A = (2, 2)$, $B = (6, 14)$ e $C = (10, 6)$ são vértices de um triângulo retângulo? Se sim, qual desses pontos é o vértice de ângulo reto?

29. Usando a expressão: área = metade da base vezes a altura, determine a área do triângulo retângulo de vértices $A = (6, -7)$, $B = (11, -3)$ e $C = (2, -2)$.

30. Determine a equação da reta em cada situação a seguir.
   a) A reta passa pelos pontos A = (1, 3) e B = (−2, 7);
   b) A reta passa pelo ponto C = (−4, 1) e é paralela à reta de equação $3x - 4y = 1$;
   c) A reta passa pelo ponto C = (3, 1) e é perpendicular à reta de equação $2x + 6y = 1$.

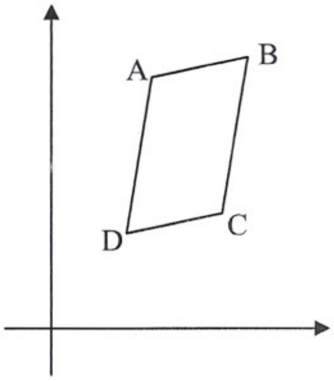
Respostas: 20) *a*) $3 < x < 6$. *b*) $0 < t < 4$. 21) $A = l(10 - l)$ para $0 < l < 10$.

22) $P = 2\left(l + \dfrac{16}{l}\right)$ para $0 < l < \infty$. 23) $V = 4x(10 - x)(6 - x)$ para $0 < x < 6$.

24) $l = r\sqrt{2}$. 25) $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ 26) $(0, -4)$ 27) $y = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{13}{6}$ e $x = 2$.

28) Sim; C. 29) $\dfrac{41}{2}$. 30) *a*) $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{13}{3}$ *b*) $y = \dfrac{3}{4}x + 4$ *c*) $y = 3x - 8$

31. Na figura ao lado, $ABCD$ é um paralelogramo, as coordenadas do ponto C são $(6,10)$ e os lados AB e AD estão contidos, respectivamente, nas retas de equações $y=\frac{x}{2}+14$ e $y=4x-2$. Determine as coordenadas dos pontos A, B e D.



32. O triângulo isósceles ABC tem como vértices da base os pontos $A=(4,0)$ e $B=(0,6)$. Determine as coordenadas do vértice C sabendo que ele está sobre a reta de equação $y=x-4$.
33. O número R de respirações por minuto que uma pessoa executa é uma **função do primeiro grau** da pressão P do dióxido de carbono (CO_2) contido nos pulmões. Quando a pressão do CO_2 é de 41 unidades, o número de respirações por minuto é de 13,8; quando a pressão aumenta para 50 unidades o número de respirações passa para 19,2 por minuto.
   a) Escreva R como função de P.
   b) Ache o número de respirações por minuto quando a pressão do CO_2 for de 45 unidades.
34. Simplifique a expressão até encontrar um número inteiro: $4^{\log_2 7}+\log_2(8^7)$.
35. Suponha que a equação $8^{ax^2+bx+c}=4^{3x+5}\cdot 2^{5x^2-x+8}$ seja válida para todo número real x, em que a, b e c são números reais. Determine o valor dessas constantes a, b e c.
36. Sabendo que $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ calcule, $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.
37. Resolva as equações:
   (*a*) $3^x+3^{-x}=1$ (*b*) $5^x-5^{-x}=3$.
38. Sem utilizar calculadora, calcule a área do triângulo ABC, sabendo que $AB=10\,cm$, $BC=3\,cm$ e $A\hat{B}C=75^\circ$.

Respostas: 31) $A=\left(\frac{32}{7},\frac{114}{7}\right)$, $B=(8,16)$, $C=(6,10)$, $D=\left(\frac{18}{7},\frac{22}{7}\right)$ 32) $(17,13)$

33) *a*) $R=0{,}6\,P-10{,}8$ *b*) 16,2. 34) 70. 35) $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{5}{3}$ e $c=6$.

36) $-\cos x$. 37) *a*) não tem solução real. *b*) $x=\dfrac{\ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}{\ln 5}$.

38) $\frac{15\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\text{cm}^2$.

39. **Desintegração radioativa:** os átomos de uma substância radioativa possuem a tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui aumentando, conseqüentemente, a massa da nova substância transformada. Além disso, pode-se demonstrar que se no instante de tempo $t=0$ a quantidade de matéria radioativa é igual a M_0, então no instante de tempo $t \geq 0$ a quantidade dessa matéria será igual a $M(t)=M_0 e^{-kt}$, sendo k uma constante positiva que depende da matéria radioativa considerada. Em geral, para o cálculo dessa constante k, é informado o tempo de meia vida da substância radioativa: esse é o tempo para que metade da substância radioativa se desintegre.

a). Mostre que as constantes k e t_m, de uma mesma substância radioativa, estão relacionados pela expressão: $k=\dfrac{\ln 2}{t_m}$.

b) A meia-vida de uma substância radioativa é um ano. Quanto tempo levará para que num corpo puro de 10 gramas desse material reste apenas um grama?

c) Uma amostra de tório reduz-se a $\dfrac{3}{4}$ de sua quantidade inicial depois de 33.600 anos. Qual é a meia-vida do tório?

40. **Lei de resfriamento de Newton:** essa lei afirma que em um ambiente com temperatura constante, a temperatura $T(t)$ de um objeto no instante t varia de acordo com a expressão: $T(t)-A=Ce^{-kt}$, sendo A a temperatura do meio, C a diferença de temperatura entre o objeto e o meio no instante $t=0$ e k uma constante positiva.

a) Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30 graus. A água que fervia numa panela, 5 minutos depois de apagado o fogo tem a temperatura de 65 graus. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38 graus?

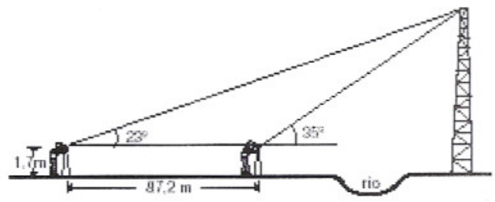
b) O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 h e imediatamente tomou a temperatura do cadáver que era de 34,8 graus. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1 graus. A temperatura do quarto era mantida constante a 20 graus. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5 graus.

Respostas:

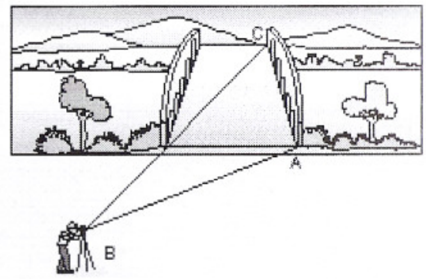
39) *b*) $\dfrac{\ln 10}{\ln 2}=\log_2 10 \approx 3{,}3$ anos. *c*) $33.600 \times \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)} \approx 80.956{,}5$ anos.

40) *a*) $\dfrac{5\ln\left(\dfrac{35}{4}\right)}{\ln 2} \approx 15{,}6$ min. *b*) $\dfrac{\ln\left(\dfrac{16{,}5}{14{,}8}\right)}{\ln\left(\dfrac{14{,}8}{14{,}1}\right)} \approx 2{,}24$ horas antes das 23:30 h, ou seja, aproximadamente às 21:15 h.

41. Utilizando um teodolito e uma trena um topógrafo fez as medidas de ângulos e distâncias indicadas na figura ao lado. Calcule a altura da torre indicada nessa figura.



42. Para saber o comprimento de uma ponte que será construída sobre um rio, um engenheiro instalou o teodolito no ponto B a uma distância de 30 metros do ponto A, situado na margem do rio. Depois, mediu os ângulos $B\hat{A}C = 105°$ e $C\hat{B}A = 30°$, conforme a figura. Com base nas medidas feitas pelo engenheiro, determine o comprimento AC da ponte.



Respostas: 41) $\dfrac{tg(23°)tg(35°)}{tg(35°)-tg(23°)} \times 87{,}2 + 1{,}7 \approx 95{,}7\,\text{m}$.

42) $15\sqrt{2}$ m.