

- Cálculo 1: Lista de exercícios extra 1 -

1. Resolver as inequações:

- (a) $x(x-1) > 0$ $\{x \in \mathbb{R}/x < 0 \text{ ou } x > 1\}$;
- (b) $(x-1)(x+2) < 0$ $\{x \in \mathbb{R}/-2 < x < 1\}$;
- (c) $x^2 - 2 \geq x$ $\{x \in \mathbb{R}/x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$;
- (d) $x^2(x-1) \geq 0$ $\{x \in \mathbb{R}/x = 0 \text{ ou } x \geq 1\}$;
- (e) $x^2 + 2x + 4 > 0$ $\mathbb{R}$;
- (f) $x^4 < x^2$ $\{x \in \mathbb{R}/-1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$;
- (g) $x^3 + 1 < x^2 + x$ $\{x \in \mathbb{R}/x < -1\}$.

2. Determine os valores de x para os quais cada uma das expressões seguintes são números reais:

- (a) $\sqrt{4-x^2}$ $\{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x \leq 2\}$;
- (b) $\sqrt{x^2-9}$ $\{x \in \mathbb{R}/x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$;
- (c) $\frac{1}{\sqrt{4-3x}}$ $\{x \in \mathbb{R}/x < 4/3\}$;
- (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2-x-12}}$ $\{x \in \mathbb{R}/x < -3 \text{ ou } x > 4\}$.

3. Determine os valores de x para os quais cada uma das expressões seguintes é positiva:

- (a) $\frac{x}{x^2+4}$ $\mathbb{R}_+^*$;
- (b) $\frac{x}{x^2-4}$ $\{x \in \mathbb{R}/-2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$;
- (c) $\frac{x+1}{x-3}$ $\{x \in \mathbb{R}/x < -1 \text{ ou } x > 3\}$;
- (d) $\frac{x^2-1}{x^2-3x}$ $\{x \in \mathbb{R}/x < -1 \text{ ou } 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

4. Determine os valores de x que satisfazem:

- (a) $|x| = 5$ $x = \pm 5$;
- (b) $|x+4| = 3$ $x = -1 \text{ ou } x = -7$;
- (c) $|x-2| = 4$ $x = -2 \text{ ou } x = 6$;
- (d) $|x+1| = |x-2|$ $x = 1/2$;
- (e) $|x+1| = |2x-2|$ $x = 3 \text{ ou } x = 1/3$;
- (f) $|x-3| \leq 5$ $\{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x \leq 8\}$.
- (g) $|x+4| \geq 1$ $\{x \in \mathbb{R}/x > -3 \text{ ou } x < -5\}$.

5. Usando valor absoluto, escreva expressões para os seguintes conjuntos:

- (a) o conjunto dos pontos cuja distância a 1 é menor do que ou igual a 4 $|x - 1| \leq 4$;
- (b) o conjunto dos pontos cuja distância a -5 é menor do que 2 $|x + 5| < 2$;
- (c) o conjunto dos pontos cuja distância a 6 é maior do que 3 $|x - 6| > 3$.

6. Mostre que os dois conjuntos abaixo são iguais e os escreva na forma de intervalos:

$$A = \{x : x < 4\} \quad \text{e} \quad B = \{x : |x - 2| < |x - 6|\}.$$

$$B = \{x : x^2 - 4x + 4 < x^2 - 12x + 36\} = \{x : 8x < 32\} = \{x : x < 4\} = A$$

$$A = B = (-\infty, 4)$$

7. Encontre o domínio das seguintes funções:

- (a) $\frac{1}{x^2+4} \quad \mathbb{R}$;
- (b) $\sqrt{(x-1)(x+2)} \quad \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1\}$;
- (c) $\sqrt{3-2x-x^2} \quad \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 1\}$;
- (d) $\sqrt{\frac{3x-4}{x+2}} \quad \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } x \geq 4/3\}$.

8. Se $f(x) = 4x - 3$, mostre que $f(2x) = 2f(x) + 3$.

9. Quais os domínios de $f(x) = \frac{1}{x-8}$ e $g(x) = x^3$? Determine o domínio de $h(x) = f(g(x))$.
 $D(f) = \mathbb{R} - \{8\}$, $D(g) = \mathbb{R}$ e $D(h) = \mathbb{R} - \{2\}$

10. Se $f(x) = 1 - x$, mostre que $f(f(x)) = x$.

11. Se $f(x) = \frac{ax+b}{x-a}$, mostre que $f(f(x)) = x$.

12. Se $f(x) = ax$, mostre que $f(x) + f(1-x) = f(1)$. Verifique também que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

13. Caracterize as seguintes funções como sobrejetora, injetora, bijetora, ou nenhuma delas:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$ bijetora;
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 9$ nenhuma delas;
- (c) $h : A \rightarrow A, h(x) = x^2 + 4, A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$ injetora;
- (d) $\varphi : \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{5}{3}x^2$ injetora.

14. Determine se as seguintes funções são pares, ímpares ou nenhuma delas:

- (a) $f(x) = 2x^5 + 3x^2$ nenhuma delas;
- (b) $g(x) = 3 - x^2 + 2x^4$ par;
- (c) $h(x) = 1 - x$ nenhuma delas;
- (d) $\varphi(x) = x + x^3$ ímpar.

15. Suponha $f(x)$ uma função ímpar e $g(x)$ uma função par.

(a) Podemos falar algo sobre a paridade de $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e $P(x) = f(x)g(x)$?

(b) Sabendo que $\text{sen}(x)$ é função ímpar e $\cos(x)$ é par, o que podemos falar sobre $\text{tg}(x)$?

Resposta: Todas Ímpares.

16. Resolva as seguintes equações:

(a) $2^x = 16$

(b) $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}$

(c) $(3^x)^{x+3} = 9^{x+6}$

(d) $2.5^x + 3.5^{x+1} = 17$

(e) $2.6^x + 3.6^{x-1} - 4.6^{x-1} = 11$

(f) $9^{|x|} - 4.3^{|x|} + 3 = 0$

Respostas

$\{4\}$

$\{-1, 0\}$

$\{3, -4\}$

$\{0\}$

$\{1\}$

$\{-1, 0, 1\}$

17. Resolva as inequações:

(a) $7^{3x-2} < 49$

(b) $8^{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}} \leq 32^{x-2}$

(c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2+10} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{7x}$

(d) $\sqrt[3]{2^{x+1}} < 16$

Respostas

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{4}{3}\}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 11\}$

18. Dadas as funções $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+7}$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x+1}$, determine x real de modo que se tenha:

Respostas

(a) $f(x) = g(x)$

$x = 2 \text{ ou } x = 3$

(b) $f(x) > g(x)$

$2 < x < 3$

19. Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = \frac{1}{4} \\ 4^x \cdot 2^{-y} = 2. \end{cases}$

Resposta: $x = 0, y = -1$

20. Dado o sistema $\begin{cases} 5^{x-y} = \frac{1}{125} \\ 3^{x+y} = 243. \end{cases}$, calcule o valor de $(xy)^3$. Resposta: 64

21. Resolva a equação $((1024^x)^x)^x = 2^{1,25}$ Resposta: $\{\frac{1}{2}\}$

22. Seja $f(x) = 3^x - \frac{9^x}{4}$ uma função de variável real. Determine o conjunto que contém todos os valores reais de x para os quais $f(x) = f(x-1)$. Resposta: $S = \{1\}$

23. Resolva o seguinte sistema $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5. \end{cases}$ Resposta: $x = 3, y = 1$

24. Uma população de bactérias no instante t é dada pela função $f(t) = C.4^{kt}$, em que t é dado em minutos. Experimentalmente, verifica-se que a população depois de 1 minuto era de 64 bactérias e depois de 3 minutos, de 256. Determine a população inicial (isto é, quando $t = 0$). Resposta: 32

25. Utilize deslocamento para fazer um **esboço** do gráfico das seguintes funções e determine o domínio das mesmas:
 a) $f(x) = e^{x-2} + 1$ b) $f(x) = \ln(x-1)$ c) $f(x) = e^{x+1} - 2$ d) $f(x) = \ln(x+2) - 3$
 e) $f(x) = |\ln x - 1|$ f) $f(x) = |\ln x| - 1$ g) $f(x) = |\ln(x+2) - 3|$
26. Determine o domínio das funções
 a) $f(x) = \log_4(x - \frac{1}{2})$ b) $y = \log_{6-x}(x^2 - 7x + 12)$ R: a) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ b) $(3, 4)$
27. Resolva as seguintes inequações:
 a) $\log_3(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}) \geq -2$ b) $\log_4(x+3) + \log_4(x-9) > 3$ c) $\log_5 x > \log_{25}(2x+35)$
 R: a) $[\frac{11}{6}, +\infty)$ b) $(13, +\infty)$ c) $(7, +\infty)$
28. Determine os valores (x, y) que são soluções do sistema $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1. \end{cases}$
 R: $(1, 3)$ ou $(3, 1)$
29. Determine o intervalo em que a função $f(x) = \sqrt{\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)}$ está definida. R: $(0, 1/2)$
30. Resolva $\log_{10} x + 2 \cdot \log_x 10 = 3$ R: $\{10, 100\}$
31. Sejam a e b números reais positivos, tais que $\frac{1}{2} \log_2 a - 2 \log_2 b = 2$. Determine o valor da razão $\frac{\sqrt{a}}{b^2}$ R: 1
32. Determine o conjunto das soluções da equação $\log_2(x^2 - 1) = \log_{x^2-1} 2$
 R: $\{x \in \mathbb{R} / x = \pm\sqrt{3} \text{ ou } x = \pm 3/2\}$
33. É dada a função f definida por $f(x) = \log_2 x - \log_4(x-3)$
 (a) Determine os valores de x para os quais $f(x) \leq 2$ R: $\emptyset$
 (b) Determine os valores de x para os quais $f(x) > 2$ R: $(3, +\infty)$
34. Resolva a equação $\log_3 x = 1 + \log_x 9$. R: $\{1/3, 9\}$
35. Se $\log_2(2 - \sqrt{2}) = a$, qual será o valor de $\log_2(2 + \sqrt{2})$.
 (DICA: analise o produto $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$) R: $1 - a$
36. Resolva a equação $10^{\log_a(x^2-3x+2)} = 6^{\log_a 10}$, em que $a = 10$. R: $\{-1, 4\}$
37. Converta para radianos:
 a) 90° b) 300° c) 135° d) 240° e) 260° R: a) $\pi/2$ b) $5\pi/3$ c) $3\pi/4$ d) $4\pi/3$ e) $13\pi/9$
38. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:
 a) $f(x) = \sin(-x)$ b) $f(x) = \cos(-x)$ c) $f(x) = \cos(x + \pi)$ d) $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{2})$
39. Determine para quais valores reais de p existe x tal que:
 a) $\sin x = \frac{7p+3}{5}$ b) $\sin x = \frac{p^2-10p+12}{12}$ c) $\sin x = \frac{1}{1-p}$ d) $\sin x = |p-1|$ e) $\sin x = \frac{8-5p}{p-3}$
 R: a) $[-8/7, 2/7]$ b) $[0, 4] \cup [6, 10]$ c) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ d) $[0, 2]$ e) $[5/4, 11/6]$

40. Determine
a) $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, sendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ b) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$, sendo que $\cos x = \frac{1}{5}$
R: a) $2/3$ b) $1/5$
41. Determine o domínio de $f(x) = \operatorname{tg}(-\frac{x}{3})$. R: $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{3}{2}(2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots\}$
42. Na função $f(x) = \operatorname{tg}(mx)$, determine o valor de m tal que o período da função seja π .
R: $m = 1$
43. Determine o que se pede em cada caso:
(a) $\cotgx$, sendo $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos = \frac{1}{2}$; R: $-1/\sqrt{3}$
(b) $\operatorname{tg} x$, sendo $\cotgx = 3$; R: $1/3$
(c) $\sec x$, sendo $\cos x = \frac{2}{3}$; R: $3/2$
(d) $\cos x$, sendo $\sec x = -5$; R: $-1/5$
(e) $\sec x$, sendo $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; R: $-3/\sqrt{5}$
(f) $\cos x$, sendo $\sec x = \sqrt{7}$; R: $1/\sqrt{7}$
(g) $\operatorname{cosec} x$, sendo $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{7}}{8}$; R: $-8/\sqrt{7}$
(h) $\operatorname{sen} x$, sendo $\operatorname{cosec} x = -10$. R: $-1/10$
44. Determine o valor de m , e qual o quadrante do arco x , de modo que se tenha:
a) $\operatorname{sen} x = \frac{m+1}{3}$ e $\cos x = \frac{m\sqrt{5}}{3}$ R: $m = 1$, I
b) $\cos x = \frac{\sqrt{7}m}{2}$ e $\operatorname{sen} x = -\frac{3m}{2}$ R: $m = \pm 1/2$, II ou IV
45. Verifique as seguintes identidades:
(a) $\sec x + \cotgx = (\csc x)(\cos x + \operatorname{tg} x)$ (b) $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$
(c) $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ (d) $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
46. Determine o período das seguintes funções e esboce seus gráficos:
a) $f(x) = \operatorname{sen}(7x)$ b) $f(x) = \cos(\frac{x}{4})$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x)$
R: a) $T = 2\pi/7$ b) $T = 8\pi$ c) $T = 1$
47. Verifique as seguintes igualdades:
(a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$ (b) $\cos x = -\cos(\pi - x)$ (c) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$
(d) $\cotgx = -\cotg(\pi - x)$ (e) $\sec x = -\sec(\pi - x)$ (f) $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(\pi - x)$
48. Verifique a paridade das seguintes funções:
a) $f(x) = x^n$ em que $n \in \mathbb{N}$ b) $f(x) = \operatorname{tg} x$ c) $\sec x$
R: a) par, se n par e ímpar se n ímpar b) ímpar c) par
49. Mostre que $\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$, com $a \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.
50. Resolva a equação $\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x = -6$. R: $x = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$