SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Em cada situação verifique se o limite existe. Caso exista calcule-o.

$a)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$

$c)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)$, em que $f(x)=\begin{cases} 2-x & se \quad x<-1 \\ x & se \quad -1\le x<1 \\ (x-1)^2 & se \quad x\ge 1 \end{cases}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

2. Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ em cada caso a seguir:

a) $f(x) = x^3$ $\qquad$ b) $f(x) = a\,x^2 + bx + c$ $\qquad$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

3. Calcule os limites indicados:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 1} (x^3-1)(\text{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)+\cos\left(\dfrac{3}{x}\right)+10)$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

$d)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^3+4x^2-9x+5}{x^3+3x-4}$ $\qquad e)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4+4x^2-9x+5}{x^3+3x-4}$

$f)\ \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-2x^3+4x^2-9x+5}{x^4+3x-4}$ $\qquad g)\ \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{7}{x-5}$

$h)\ \lim\limits_{x\to 0^-} \ln(-x)$ $\qquad i)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \ln(-x)$

$j)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$ $\qquad k)\ \lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

$l)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $\qquad m)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

$n)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$ $\qquad o)\ \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\cos(x)}{x}$

$p)\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}(10\,\text{sen}^2 x+\cos x)$

4. Se existe o $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, então $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$? Comente sobre sua resposta.

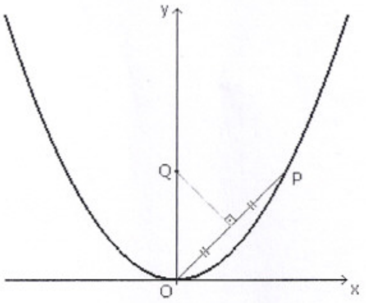
5. Determine constantes a, b e L para que a função abaixo seja contínua em $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+3}{x-1} & para \ x<1 \\ L & para \ x=1 \\ bx+4 & para \ x>1 \end{cases}.$$

6. Mostre que a equação $x^4 + x - 1 = 0$ possui pelo menos duas raízes reais.
7. Existe um número a tal que $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.
8. Encontre todos os valores de a para os quais a função $y = f(x)$ a seguir é contínua para todos os valores de x:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & para \;\; x \le a \\ x^2 & para \;\; x > a \end{cases}.$$

9. Determine os valores de a e b tais que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a\,x^3 + b\,x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3x + 1} = -3$.
10. A figura abaixo mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e o ponto Q dado pela interseção da mediatriz do segmento OP com o eixo y. À medida que P tende ao vértice da parábola, o que acontece com o ponto Q? Ele tem uma posição limite? Se sim, encontre-a.



Respostas: 1) *a*) $\frac{2}{3}$. *b*) não existe; mas os limites laterais são:1, quando $x \to 3^+$ e -1 quando $x \to 3^-$. *c*) não existe; mas os limites laterais são:-1, quando $x \to -1^+$ e 3 quando $x \to -1^-$. *d*) $\frac{1}{4}$.

2) *a*) $3x_o^2$. *b*) $2a\,x_o + b$. c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x_o}}$.

3) *a*) 0. *b*) 0. *c*) 0. *d*) -2. *e*) $-\infty$. *f*) 0. *g*) ∞. *h*) $-\infty$. *i*) ∞. *j*) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. *k*) 6. *l*) $\frac{1}{2}$. *m*) 3. *n*) -3. *o*) ∞. *p*) 0.

5) $a = -4; b = -6; L = -2.$ 7) $a = 15$; o limite é igual a -1.

8) $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 9) $a = 0; b = -3$. 10) $Q \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Um breve resumo das aulas encontra-se em www.mat.ufmg.br/calculoI , no *link* Turmas Especiais de CálculoI, no *Cronograma.*

- Cálculo 1 - Limites -

1. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$(a)\ \lim_{x\to 1}(x^3-3)$;

$(b)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{x^4-8}$;

$(c)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$;

$(d)\ \lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$;

$(e)\ \lim_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-x}{3x-1}$;

$(f)\ \lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$;

$(g)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$;

$(h)\ \lim_{x\to \frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{8t^3-27}{4t^2-9}}$;

$(i)\ \lim_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$;

$(j)\ \lim_{y\to -3}\sqrt{\dfrac{y^2-9}{2y^2+7y+3}}$;

$(k)\ \lim_{h\to 5}\dfrac{h}{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}$;

$(l)\ \lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3+3h}-\sqrt{3}}{h}$;

$(m)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$;

$(n)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

2. Faça o esboço do gráfico de $f(x)=\begin{cases}|x| & \text{se } x<4\\ 6 & \text{se } x=4\\ -4x+20 & \text{se } x>4\end{cases}$ e observe no gráfico o valor de $\lim_{x\to 4}f(x)$. Há alguma diferença entre $\lim_{x\to 4}f(x)$ e $f(4)$?

3. Seja f a função definida por $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{se } x\neq 2\\ 1 & \text{se } x=2\end{cases}$

   (a) Encontre $\lim_{x\to 2}f(x)$ e verifique que $\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$.

   (b) Faça um esboço do gráfico de f.

4. Seja f a função definida por $f(x)=\begin{cases}x^2-9 & \text{se } x\neq -3\\ 4 & \text{se } x=-3\end{cases}$

   (a) Encontre $\lim_{x\to -3}f(x)$ e verifique que $\lim_{x\to -3}f(x)\neq f(3)$

   (b) Faça um esboço do gráfico de f.

5. Determine o valor de $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando
a) $f(x)=x$ b) $f(x)=x^2$ c) $f(x)=x^3$.

6. Nos ítens a seguir, calcule os limites laterais pedidos e verifique se o limite (bilateral) existe. Caso exista dê seu valor.

   (a) $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim_{x\to 0}f(x)$.

   (b) $f(x)=\begin{cases}2 & \text{se } x<1\\ -1 & \text{se } x=1\\ -3 & \text{se } x>1\end{cases}$; $\lim_{x\to 1^+}f(x)$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim_{x\to 1}f(x)$

   (c) $f(r)=\begin{cases}2r+3 & \text{se } r<1\\ 2 & \text{se } r=1\\ 7-2r & \text{se } r>1\end{cases}$; $\lim_{r\to 1^+}f(r)$, $\lim_{r\to 1^-}f(r)$, $\lim_{r\to 1}f(r)$

   (d) $g(x)=\begin{cases}2+x^2 & \text{se } x<-2\\ 0 & \text{se } x=-2\\ 11-x^2 & \text{se } x>-2\end{cases}$; $\lim_{x\to -2^+}f(x)$, $\lim_{x\to -2^-}f(x)$, $\lim_{x\to -2}f(x)$

7. Dada $f(x)=\frac{|x|+x}{x}$. Existe $\lim_{x\to 0}f(x)$?

8. Dada $f(x)=\frac{|x^2+x|}{x}$. Verifique se existem os limites abaixo e, caso existam, determine seus valores:
a) $\lim_{x\to -1}f(x)$ b) $\lim_{x\to 0}f(x)$.

- Gabarito -

1. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 1}(x^3-3) = -2;$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^4-8} = 2\sqrt{2};$

$(c)\ \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}};$

$(d)\ \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3} = -6;$

$(e)\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-x}{3x-1} = \dfrac{1}{3};$

$(f)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3} = 27;$

$(g)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{6};$

$(h)\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{8t^3-27}{4t^2-9}} = \sqrt{\dfrac{9}{2}};$

$(i)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \dfrac{11}{17};$

$(j)\ \lim\limits_{y\to -3}\sqrt{\dfrac{y^2-9}{2y^2+7y+3}} = \sqrt{\dfrac{6}{5}};$

$(k)\ \lim\limits_{h\to 5}\dfrac{h}{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}} = \sqrt{10}+\sqrt{5};$

$(l)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3+3h}-\sqrt{3}}{h} = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

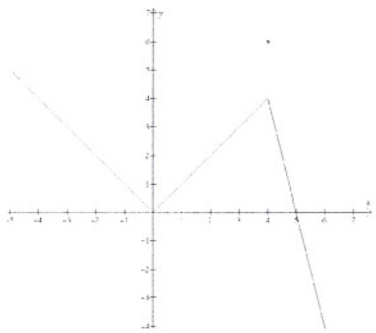
$(m)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2} = 32;$

$(n)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}.$

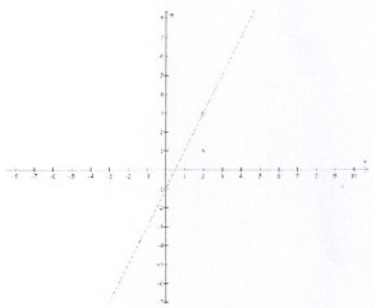
2. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x < 4 \\ 6 & \text{se } x = 4 \\ -4x+20 & \text{se } x > 4 \end{cases} \qquad \lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4 \neq f(4) = 6$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases} \qquad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3 \neq f(2) = 1.$

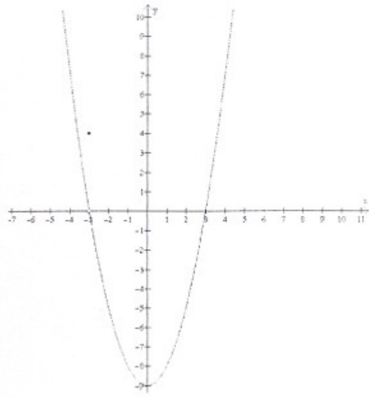
4. $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{se } x \neq -3 \\ 4 & \text{se } x = -3 \end{cases} \qquad \lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0 \neq f(-3) = 4.$



(a) Figura ex.2



(b) Figura ex.3



(c) Figura ex.4

5. a) 1 b) $2x$ c) $3x^2$.

6. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1,\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -3,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2,\ \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   (c) $\lim\limits_{r\to 1^+} f(r) = \lim\limits_{r\to 1^-} f(r) = 5,\ \lim\limits_{r\to 1} f(r) = 5$

   (d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 5,\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 6,\ \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$

7. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, pois $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0.$

8. a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1,\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

- Cálculo 1 - Limites - Lista 2

1. Determine, caso existam, os seguintes limites:

$a)\ \lim_{x\to 0^+}(3-\sqrt{x})$ $\quad b)\ \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-4}$ $\quad c)\ \lim_{x\to -5}\dfrac{x-5}{|x-5|}$ $\quad d)\ \lim_{x\to 5}\dfrac{x-5}{|x-5|}$

$e)\ \lim_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ $\quad f)\ \lim_{x\to -2}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ $\quad g)\ \lim_{x\to -2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x-2}}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

$i)\ \lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x^2-9x}}$ $\quad j)\ \lim_{x\to 5}\dfrac{\frac{1}{y}-\frac{1}{5}}{y-5}$ $\quad k)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\quad l)\ \lim_{x\to +\infty}(x^3-x^2-x+1)$

$m)\ \lim_{x\to -\infty}(x^3-x^2-x+1)$ $\quad n)\ \lim_{x\to -\infty}(-2x^6-x^3-12x^2+1)$ $\quad o)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-25}$ $\quad p)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^7+2x+1}{5x^3-2x^2-900}$

$q)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-x}$ $\quad r)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x-21}{x^3-2x^2+9}$ $\quad s)\ \lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ $\quad t)\ \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$u)\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ $\quad v)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^4-2^4}{2-x}$ $\quad w)\ \lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$ $\quad x)\ \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

$y)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2}$ $\quad z)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ $\quad \alpha)\ \lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+6}$ $\quad \beta)\ \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-x^4)$

$\gamma)\ \lim_{x\to 5}\dfrac{x+2}{x-4}$ $\quad \delta)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$ $\quad \epsilon)\ \lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+bt}-a}{t}$ $\quad \varepsilon)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{z-4}{z^2-2z-8}$

$\zeta)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{2}{|x|}$ $\quad \eta)\ \lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7}}{x+3}$ $\quad \theta)\ \lim_{x\to 5}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{5}}{x-5}$ $\quad \vartheta)\ \lim_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{7x^3-4x-17}$

2. Sejam $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{se} \quad x\le 1\\ x+1 & \text{se} \quad x>1.\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x\le 1\\ 2 & \text{se} \quad x>1.\end{cases}$

(a) Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

(b) Encontre uma expressão para $f(x).g(x)$ e mostre que existe $\lim_{x\to 1}\big(f(x).g(x)\big)$

3. Considere a função definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x+2\ , & x<0\\ x^2\ , & 0\le x<2\\ 1\ , & x\ge 2\end{cases}$

a) Faça o gráfico da função f.

b) Determine: $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 2} f(x)$

4. Calcule $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, quando: a) $f(x)=senx$ $\quad$ b) $f(x)=cosx$ $\quad$ c) $f(x)=\frac{1}{x}$.

5. Sabendo-se que $\lim_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1$ e que $cosx=1-sen^2(\frac{x}{2})$, calcule: a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(2x)}{5x}$ $\quad$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x}$.

6. Sabendo-se que as desigualdades $1-\dfrac{x^2}{6}<\dfrac{xsen(x)}{2-2cos(x)}<1$ valem para todos os valores de x próximos de zero, calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{xsen(x)}{2-2cos(x)}$.

7. Mostre que se $|f(x)|\le M$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$ então $\lim_{x\to a}\big(f(x).g(x)\big)=0$

8. Use o item anterior para mostrar que $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{senx}{x}=0$.

9. Encontre as assíntotas verticais e/ou horizontais das seguintes funções:

(a) $f(x)=\frac{x}{x^2-9}$; $\quad$ (b) $g(x)=\frac{1}{x-1}$; $\quad$ (c) $h(x)=\frac{x+3}{x+2}$;

(d) $\psi(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$; $\quad$ (e) $\phi(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$; $\quad$ (f) $\varphi(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

10. Observando o gráfico das funções exponenciais conclua que

$$\lim_{x\to +\infty} a^x=\begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad a>1\\ 0, & \text{se} \quad 0<a<1\end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} a^x=\begin{cases} 0, & \text{se} \quad a>1\\ +\infty, & \text{se} \quad 0<a<1\end{cases}$$

11. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x$ (b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (c) $\lim_{x\to+\infty}(2^x-2^{-x})$ (d) $\lim_{x\to-\infty}(2^x-2^{-x})$ (e) $\lim_{x\to+\infty}(2^x-3^x)$.

12. Seja $f(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x\leq -1\\ x^2-1 & \text{se } -1<x\leq 1\\ 2 & \text{se } x>1\end{cases}$ f é contínua em $x=1$? Em $x=-1$? Em $x=2$? Em $x=-3$?

13. Seja $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{se } x\leq 4\\ 7+\frac{16}{x} & \text{se } x>4\end{cases}$ f é contínua em $x=4$?

14. Seja $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 3 & \text{se } x=1\end{cases}$ f é contínua em $x=1$?

15. Encontre os pontos x, caso existam, nos quais f é descontínua e dê as razões para esta possível descontinuidade:

(a) $f(x)=\sqrt[3]{x-8}$;

(b) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$;

(c) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2-1}$

(d) $f(x)=\frac{x^2+9}{|x|+3}$

16. Verifique se as funções a seguir são contínuas nos pontos indicados. Caso não sejam, determine as razões da descontinuidade.

(a) $f(x)=|x+1|-3$ em $x=-1$;

(b) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ em $x=-2$ e em $x=1$;

(c) $f(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{se } x\neq 3\\ -5 & \text{se } x=3\end{cases}$ em $x=3$.

17. Encontre um valor para a constante k, se possível, para que a função seja contínua para todo $x\in\mathbb{R}$.

(a) $f(x)=\begin{cases}7x-2 & \text{se } x\leq 1\\ kx^2 & \text{se } x>1\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}kx^2 & \text{se } x\leq 2\\ 2x+k & \text{se } x>2\end{cases}$

18. Encontre os valores das constantes k e m, se possível, que para que seja contínua para todo $x\in\mathbb{R}$ a função

$$f(x)=\begin{cases}x^2+5, & \text{se } x>2,\\ m(x+1)+k, & \text{se } -1<x\leq 2,\\ 2x^3+x+7, & \text{se } x\leq -1.\end{cases}$$

19. Dê exemplo de duas funções f e g descontínuas em um certo ponto $x=c$ tal que $f+g$ seja contínua neste ponto.

20. É verdade que uma função contínua que nunca é zero em um intervalo nunca muda de sinal nesse intervalo? Justifique sua resposta.

21. Utilize o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x^3+x^2-2x+1=0$ possui pelo menos uma solução no intervalo $[-1,1]$.

22. Mostre que, se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar, então e equação $p(x)=0$ possui pelo menos uma solução real.

23. (Contração de Lorentz) De acordo com a teoria da relatividade, o comprimento de um objeto, por exemplo, de um foguete, parece a um observador depender da velocidade com que o objeto se desloca em relação a esse observador. Se ele medir o comprimento L_0 do foguete em repouso e em seguida com a velocidade v, o comprimento parecerá ser $L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, sendo c a velocidade da luz no vácuo. O que acontece com L à medida que v aumenta? Calcule $\lim_{v\to c^-}L$. Por que é necessário tomar o limite lateral à esquerda?

- <u>Cálculo 1</u> - Limites - Gabarito Lista 2

1. a) 3 b) 0 c)-1 d)$\nexists$ e) $+\infty$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\nexists$ h) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ i) 0 j)$-\frac{1}{25}$ k) $-\infty$ l) $+\infty$ m) $-\infty$ n) $-\infty$
   o) 0^+ p)$+\infty$ q) 0^- r) 0^+ s)-1 t) $+\infty$ u) $\frac{1}{2}$ v) $-\infty$ w) $+\infty$ x) $+\infty$ y) $+\infty$ z) 1
   $\alpha) -1$ $\beta) -\infty$ $\gamma)$ 7 $\delta)$ $\frac{3}{13}$ $\epsilon)$ $\frac{b}{|a|+a}$ $\varepsilon)$ $\frac{1}{4}$ $\zeta)$ 7 $\eta) -\sqrt{2}$ $\theta) -\frac{1}{25}$ $\vartheta)$ 0^-

2. (a) Não, pois $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

   (b) $f(x)g(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} \big(f(x).g(x)\big) = 4$

3. a)

   b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. a) $cosx$ $\quad$ b) $-senx$ $\quad$ c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

5. a) 2/5 $\quad$ b) 0.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xsen(x)}{2 - 2cos(x)} = 1.$

7. $-Mg(x) \leq f(x).g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} -Mg(x) \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x).g(x) \leq \lim\limits_{x\to 0} Mg(x) \Rightarrow -M \lim\limits_{x\to 0} g(x) \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x).g(x) \leq M \lim\limits_{x\to 0} g(x) \Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x).g(x) \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x).g(x) = 0.$

8. $|senx| \leq 1$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{senx}{x} = 0$.

9. (a) Assíntotas verticais: $x = 3$ e $x = -3$, Assíntota horizontal: $y = 0$;
   (b) Assíntota vertical: $x = 1$, Assíntota horizontal: $y = 0$;
   (c) Assíntota vertical: $x = -2$, Assíntota horizontal: $y = 1$;
   (d) Assíntota vertical: $x = 0$;
   (e) Assíntota vertical: $x = 1$;
   (f) Assíntota vertical: $x = 0$.

10.
$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad a > 1 \\ 0, & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty, & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

11. (a) $+\infty$ $\quad$ (b) 0 $\quad$ (c) $+\infty$ (d) $-\infty$ $\quad$ (e) $-\infty$

12. f não é contínua em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, logo $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Em $x = -1, x = 2$ e $x = -3$ ela é contínua, já que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2} f(2) = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3) = 2$.

13. Sim, pois $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) = 11$.

14. Não, pois $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

15. (a) Contínua em $\mathbb{R}$; (b) Descontínua em $x = \pm 2$, pois $\nexists f(2)$ e $f(-2)$; (c) Descontínua em $x = 0$ e $x = \pm 1$, pois $\nexists f(0)$, $f(-1)$ e $f(1)$; (d) Contínua em $\mathbb{R}$.

16. (a) Contínua em $x = -1$; (b) Contínua em $x = -2$ e descontínua em $x = 1$ pois $\nexists f(1)$; (c) Contínua em $x = 3$.

17. (a) 5 (b) 4/3

18. $k = 4$ e $m = 5/3$.

19. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$

20. Sim, pois, pelo teorema do valor intermediário, se ela mudasse de sinal então o zero deveria ser também imagem da função.

21. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow f(1) = -1$ e $f(-1) = 1$, logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f(x_0) = 0$.

22. Se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar, então vai sempre existir um $x_0 \in \mathbb{R}$ para o qual $p(x_0)$ e $p(-x_0)$ têm sinais opostos. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [-x_0, x_0]$ tal que $p(c) = 0$.

23. À medida que v aumenta L diminui. $\lim\limits_{v \to c^-} L = 0$. O limite lateral à esquerda é necessário já que a função não está definida para $v > c$.