2^{da} Lista de exercicios de Cálculo II

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ (b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x}$

(c) $f(x, y) = \frac{xy}{x-2y}$ (d) $f(x, y) = \ln(xy - 1)$

(e) $f(x, y) = \frac{\ln(x-2y)}{\sqrt{x^2-2x}}$ (f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

(g) $f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|}$ (h) $f(x, y) = \sqrt{|x| + |y| - 2}$

2. Trace um esboço das curvas/superfícies de nível de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = xy$ (b) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$;

(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2+1}$ (d) $f(x, y) = (x - y)^2$;

(e) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, (f) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$;

(g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, (h) $f(x, y, z) = x - y$;

LIMITE E CONTINUIDADE

3. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + x^2 + y}$, Rpta :

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}$; Rpta :

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$, Rpta :

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$; Rpta :

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, Rpta :

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$; Rpta :

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$, Rpta :

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \text{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$; Rpta :

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, Rpta :

(j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$; Rpta :

4. Discuta a continuidade das seguintes funções:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (d) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIAIS E DIFERENCIABILIDADE

5. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função dada em todos os pontos do seu domínio

$$(a) f(x, y) = 5x^2y^4 + xy^3 + 4 \quad (b) f(x, y) = \cos(xy)$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} \quad (d) f(x, y) = \ln(xy - 1)$$

$$(e) f(x, y) = xye^{xy} \quad (f) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$(g) f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z) \quad (h) f(x, y, z) = xyz^2 \tan(yz)$$

6. utilize derivação implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$

$$(a) \sqrt{xy} + 1 = x^2y \quad (b) \cos(x - y) = xe^y$$

7. Utilize derivação implícita para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$(a) x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (b) x - z = \arctan(yz)$$

8. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

prove que:

(a) $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem e

(b) $f(x, y)$ não é diferenciável em $(0, 0)$. Por que?

9. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

(a) Verifique que $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$ e que existem as derivadas parciais $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

(b) É $f(x, y)$ diferenciável em $(0, 0)$? Por que?

REGRA DA CADEIA E VETOR GRADIENTE

10. Calcule $\frac{dz}{dt}$, usando a regra da cadeia:
- $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$
 - $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}$, $x = \ln t$, $y = t$
 - $z = e^{1-xy}$, $x = t^{1/3}$, $y = t^3$
11. Calcule $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$ usando a regra da cadeia
- $w = xy + yz + xz$ onde $x = u \cos v$, $y = u \cos v$ e $z = v$.
 - $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ onde $x = ue^v \sin u$, $y = ue^v \sin u$ e $z = ue^v$.
 - $w = \cos x \sin y$ onde $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$.
12. Use a regra da cadeia para calcular $\left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=1/4}$, se $w = r^2 - r \tan \theta$, $r = \sqrt{s}$, $\theta = \pi s$
13. Use a regra da cadeia para calcular $\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=2, \theta=\pi/6}$ e $\left. \frac{dz}{d\theta} \right|_{r=2, \theta=\pi/6}$; se
 $z = xy e^{x/y}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
14. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto P ,
- $z = x e^{x^2 - y^2}$, $P(2, 2, 2)$
 - $z = \frac{1}{xy}$, $P(1, 1, 1)$
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $P(-3, 0, 4)$
 - $y + x = 2xz$, $P(4, 4, 1)$
 - $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$, $P(0, 1, 2)$
15. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, em (x_0, y_0, z_0) , pode ser escrito na forma $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$
16. Considere a superfície de equação $xyz = 1$. Encontre as equações dos planos tangentes a esta superfície que são paralelos ao plano $x + y + z + 100 = 0$.
17. Encontre o ponto na superfície $3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - z = 5$ onde o plano tangente é horizontal.
18. determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico da função $f(x, y) = xy$.
19. De um funil cônico escoar água à razão de $18\pi \text{cm}^3/\text{seg}$. Sua geratriz faz com o eixo do cone um ângulo $\alpha = \pi/3$, determine a velocidade com que baixa o nível de água no funil, no momento em que o raio da base do volume líquido é igual a 6cm
20. Um lado de um retângulo mede $x = 20\text{mts}$ e aumenta a uma velocidade de $5\text{mts}/\text{seg}$, o outro lado mede $y = 30\text{mts}$ e diminui a uma velocidade de $4\text{mts}/\text{seg}$. Com que velocidade varia o perímetro e a área desse retângulo?
21. a altura de um cone circular reto é 15cm e esta aumentando a $1\text{cm}/\text{seg}$. O raio da base é 10cm e esta diminuindo a $0.5\text{cm}/\text{seg}$. Qual a taxa de variação do volume em relação ao tempo neste instante.

22. Em um instante dado, o comprimento de um lado de um triângulo retângulo é de 10cm e cresce à razão de $1\text{cm}/\text{seg}$; O comprimento do outro lado é de 12cm e decresce à razão de $2\text{cm}/\text{seg}$. Calcule a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de 12cm , medido em radianos, no instante dado.

DERIVADA DIRECIONAL

23. O que é o vetor gradiente de uma função $f(x, y)$? Como ele está relacionado às derivadas direcionais de uma função?
24. Calcule a derivada direcional de f em P na direção dada.
- (a) $f(x, y) = \sin(xy^2)$; $P(\frac{\pi}{4}, 2)$; vetor na direção $\vec{u} = \vec{i}$.
- (b) $f(x, y) = 3x^2 + 4x - y^2$; $P(1, 2\sqrt{3})$; vetor na direção $\frac{\pi}{6}$.
- (c) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x$; $P(1, 0, 0)$; vetor de P a $(2, 2, 1)$.
25. Determine as direções em que f cresce e decresce mais rapidamente no ponto P , bem como as correspondentes derivadas direcionais (taxa de variação de crescimento) máxima e mínima respectivamente em P .
- (a) $f(x, y) = x^3 - y^2$, $P(1, 1)$
- (b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $P(3, 4)$
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $P(1, -1, 1)$
26. Seja $f(x, y) = x^2y$. Se $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, escreva a fórmula para a derivada direcional de f em $(1, -1)$ em termos de a e b . Em que direção devemos seguir a fim de que a taxa de variação de f seja 2? .

27. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

- (a) $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$.? Por que?
- (b) $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0)$.? Por que?
- (c) Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (d) $f(x, y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0, 0)$.?

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

28. Nos itens abaixo calcule as derivadas parciais indicadas;

(a) $f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y}$, f_x, f_y, f_{xx}

(b) $f(x, y) = \ln(x^2y^2)$, h_{12}, h_{21}, h_{212}

(c) $f(x, y) = y^3e^{-5x}$, $f_{xyy}(0, 1), f_{xxx}(0, 1), f_{yyxx}(0, 1)$

29. Verifique que as funções abaixo satisfazem a equação de Laplace: $z_{xx} + z_{yy} = 0$

(a) $z = e^x \sin y$, (b) $z = \arctan(\frac{y}{x})$

39. Encontre e classifique os extremos relativos da função

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

(c) $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y); (x > 0, y > 0)$

(d) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

(e) $f(x, y) = e^{x^2+y^2+y}$

(f) $f(x, y) = 2xy + x^3 - y^3x$

(g) $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$

(h) $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

(i) $f(x, y) = 2xy + x^3 - y^3x$

(j) $f(x, y) = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

40. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$ sobre a região quadrada limitada pelas retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$.

41. Encontre o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, quando os pares (x, y) estão na placa retangular $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

42. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$, na região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

43. Encontre o máximo e o mínimo global de $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, na região triangular no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0, y = 0, y = 9 - x$.

44. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$, na placa triangular limitada pelas retas $x = 2, y = -2, x = y$.

45. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ na região $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$

46. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = 3x - y$ na região

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4, 3x + y \leq 6\}$$

47. Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = e^{-xy}$ na região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

48. Encontre os extremos absolutos da função $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x$ na região

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

Máximos e mínimos com restrições: Multiplicadores de Lagrange

49. Determine o retângulo de perímetro máximo, com os lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.

50. uma caixa cilíndrica de base circular tem volume de $27 m^3$. Se o material usado nos lados custa 2 reais o m^2 e o material usado na base inferior e superior custa 2 e 4 reais o m^2 respectivamente. Quais devem ser as dimensões do cilindro mais barato.

51. Determinar os eixos da elipse $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$

52. Os cursos de dois rios (dentro dos limites de uma determinada região) são representada aproximadamente pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x - y - 2 = 0$. Deve-se unir esses rios por meio de uma canal retilíneo que tenha o menos comprimento possível. Por quais pontos devemos traça-lo? Qual será sua extensão

53. Mostre que a distância do ponto (x_0, y_0) à reta de equação $l : ax + by + c = 0$ é dada por

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

54. (Método dos mínimos quadrados) Suponhamos que você tenha feito um experimento varias vezes e obteve como resultados experimentais certas medidas de quantidades y , que varia quando alteramos a quantidade x . Suponhamos que por razões físicas y é uma função afim de x , isto é $y = ax + b$. Devido a erros experimentais se plotarmos os resultados experimentais

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

observamos que eles não estarão dispostos exatamente sobre uma reta (gráfico da função afim). Assim a pergunta é: Quais são os valores de a e b tal que o gráfico de $y = ax + b$ aproxima da "melhor" forma possível os dados experimentais? Por "melhor" entendemos os valores de a e b que minimizam a função

$$f(a, b) = \sum_{i=0}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

55. Um container (no formato de paralelepípedo) tem que ter um volume de $81m^3$. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do container com esse volume e custo mínimo, se o preço de construção nos lados custa 1 real o m^2 e o material usado na base e na tampa custa 2 e 4 reais respectivamente.

56. Um fazendeiro dispõe de 16 reais para construir um cercado. Dois lados (opostos) custam 1 real por metro, enquanto os outros dois lados (opostos) custam 2 reais por metro. Qual são as dimensões da maior área retangular que ele pode cercar?

57. Encontre os pontos sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 1$ no plano xy que estão mais próximos e mais afastados da origem.

58. Mostre que dentre todos os paralelogramos de perímetro constante igual à $4mts$ o quadrado é aquele que fecha a maior área possível.

59. Encontre as dimensões do retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é esse perímetro.?

60. Tanque de armazenamento mais barato: Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha $8.000 m^3$ de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica que você recomendaria para o tanque?.

61. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída de modo sua área seja 36 mts^2 .
62. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio a . Qual é essa área?
63. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.
64. Encontre as dimensões da lata cilíndrica circular reta fechada de menor área cujo volume é $16\pi\text{cm}^3$.
65. Encontre o ponto sobre a superfície $z = xy + 1$ mais próximo da origem.
66. Encontre os pontos sobre a superfície $z^2 = xy + 4$ mais próximos da origem.
67. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.
68. Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tem três faces nos planos coordenados e um vértice no plano $2x + 3y + 4z = 12$.
69. Sua empresa está desenvolvendo caixas de papelão grosso para exportar pipocas. As arestas da embalagem precisam ser reforçadas com arame. O custo do arame é de 3 reais o metro e o custo do papelão é de 1 real o metro quadrado, mas a tampa da caixa deve ser feita com um tipo diferente de papelão, que custa 2 reais o metro quadrado. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões da embalagem de modo que ela possa conter 6 m^3 de pipocas tal que o custo da embalagem seja mínimo.
70. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.
71. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante um tetraedro de menor volume.
72. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$