Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

2^{da} Lista de exercicios de Cálculo II

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x,y)$ dada por:

$(a)\ f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ $\quad (b)\ f(x,y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x}$

$(c)\ f(x,y) = \frac{xy}{x-2y}$ $\quad (d)\ f(x,y) = \ln(xy-1)$

$(e)\ f(x,y) = \frac{\ln(x-2y)}{\sqrt{x^2-2x}}$ $\quad (f)\ f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2-1}$

$(g)\ f(x,y) = \sqrt{|x|-|y|}$ $\quad (h)\ f(x,y) = \sqrt{|x|+|y|-2}$

2. Trace um esboço das curvas/superfícies de nível de cada uma das seguintes funções:

$(a) f(x,y) = xy$ $\quad (b)\ f(x,y) = 4x^2 + 9y^2;$

$(c) f(x,y) = \frac{x^2}{y^2+1}$ $\quad (d) f(x,y) = (x-y)^2;$

$(e) f(x,y,z) = x + 2y + 3z,$ $\quad (f)\ f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2;$

$(g) f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z,$ $\quad (h) f(x,y,z) = x - y;$

LIMITE E CONTINUIDADE

3. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique:

$(a) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4+x^2+y}, \quad Rpta:$ $\qquad (b) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y}; \quad Rpta:$

$(c) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad Rpta:$ $\qquad (d) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x-y}; \quad Rpta:$

$(e) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad Rpta:$ $\qquad (f) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^3-y}; \quad Rpta:$

$(g) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad Rpta:$ $\qquad (h) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4\text{sen }(x^2+y^2)}{x^4+y^2}; \quad Rpta:$

$(i) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad Rpta:$ $\qquad (j) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}; \quad Rpta:$

4. Discuta a continuidade das seguintes funções:

$$(a)\ \ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (b)\ \ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (d)\ \ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0) \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIAIS E DIFERENCIABILIDADE

5. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função dada em todos os pontos do seu domínio

   $(a)\ f(x,y) = 5x^2y^4 + xy^3 + 4$ $\qquad (b)\ f(x,y) = \cos(xy)$

   $(c)\ f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ $\qquad (d)\ f(x,y) = \ln(xy-1)$

   $(e)\ f(x,y) = xye^{xy}$ $\qquad (f)\ f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$

   $(g)\ f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$ $\qquad (h)\ f(x,y,z) = xyz^2\tan(yz)$

6. utilize derivação implicita para determinar $\frac{d\,y}{d\,x}$

   $(a)\ \sqrt{xy} + 1 = x^2y$ $\qquad (b)\ \cos(x-y) = xe^y$

7. Utilize derivação implicita para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

   $(a)\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ $\qquad (b) x - z = \arctan(yz)$

8. Seja $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   prove que:

   (a) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e

   (b) $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$. Por que?

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

   (a) Verifique que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$ e que existem as derivadas parciais $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

   (b) É $f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$? Por que?

REGRA DA CADEIA E VETOR GRADIENTE

10. Calcule $\frac{dz}{dt}$, usando a regra da cadeia:

    (a) $z = \ln(2x^2 + y), \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t^{2/3}$

    (b) $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}, \quad x = \ln t, \quad y = t$

    (c) $z = e^{1-xy}, \quad x = t^{1/3}, \quad y = t^3$

11. Calcule $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$ usando a regra da cadeia

    (a) $w = xy + yz + xz$ onde $x = u \ \cos v, \quad y = u \cos v$ e $z = v$.

    (b) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ onde $x = ue^v \text{sen } u, \quad y = ue^v \text{sen } u$ e $z = ue^v$.

    (c) $w = \cos x \text{ sen } y$ onde $x = u - v, \quad y = u^2 + v^2$.

12. Use a regra da cadeia para calcular $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{s=1/4}$, se $w = r^2 - r \tan\theta, \ r = \sqrt{s}, \ \theta = \pi s$

13. Use a regra da cadeia para calcular $\left.\frac{dz}{dr}\right|_{r=2,\ \theta=\pi/6}$ e $\left.\frac{dz}{d\theta}\right|_{r=2,\ \theta=\pi/6}$; se

    $z = xye^{x/y}, \ x = r\cos\theta, \ y = r\text{sen } \theta$

14. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto P,

    (a) $z = xe^{x^2-y^2}, \quad P(2, 2, 2)$

    (b) $z = \frac{1}{xy}, \quad P(1, 1, 1)$

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad P(-3, 0, 4)$

    (d) $y + x = 2xz, \quad P(4, 4, 1)$

    (e) $\cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4, \quad P(0, 1, 2)$

15. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, em (x_0, y_0, z_0), pode ser escrito na forma $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$

16. Considere a superfície de equação $xyz = 1$. Encontre as equações dos planos tangentes a esta superfície que são paralelos ao plano $x + y + z + 100 = 0$.

17. Encontre o ponto na superfície $3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - z = 5$ onde o plano tangente é horizontal.

18. determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao grafico da função $f(x, y) = xy$.

19. De um funil cônico escoa água à razão de $18\pi cm^3/seg$. Sea geratriz faz com o eixo do cone um ângulo $\alpha = \pi/3$, determine a velocidade com que baixa o nível de água no funil, no momento em que o raio da base do volume líquido é igual a $6cm$

20. Um lado de um retângulo mede $x = 20mts$ e aumenta a uma velocidade de $5mts/seg$, o outro lado mede $y = 30mts$ e diminui a uma velocidade de $4mts/seg$. Com que velocidade varia o perímetro e a área desse retângulo?

21. a altura de um cone circular reto é $15cm$ e esta aumentando a $1cm/seg$. O raio da base é $10cm$ e esta diminuindo a $0.5cm/seg$. Qual a taxa de variação do volume em relação ao tempo neste instante.

22. Em um instante dado, o comprimento de um lado de um triângulo retângulo é de $10cm$e cresce à razão de $1cm/seg$; O comprimento do outro lado é de $12cm$ e decresce à razão de $2cm/seg$. Calcule a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de $12cm$, medido em radianos, no instante dado.

DERIVADA DIRECIONAL

23. O que é o vetor gradiente de uma função $f(x, y)$? Como ele está relacionado às derivadas direcionais de uma função?

24. Calcule a derivada direcional de f em P na direção dada.

    (a)$f(x, y) = \text{sen}\,(xy^2)$; $P(\frac{\pi}{4}, 2)$; vetor na direção $\vec{u} = \vec{i}$.

    (b)$f(x, y) = 3x^2 + 4x - y^2$; $P(1, 2\sqrt{3})$; vetor na direção $\frac{\pi}{6}$.

    (c)$f(x, y, z) = xye^z + yze^x$; $P(1, 0, 0)$; vetor de P a $(2, 2, 1)$.

25. Determine as direcões em que f cresce e decresce mais rapidamente no ponto P, bem como as correspondentes derivadas direcionais (taxa de variãção de crecimento) máxima e mínima respectivamente em P.

    (a)$f(x, y) = x^3 - y^2, \quad P(1, 1)$

    (b)$f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad P(3, 4)$

    (c)$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2, \quad P(1, -1, 1)$

26. Seja $f(x, y) = x^2y$. Se $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, escreva a fórmula para a derivada direcional de f em (1,-1) em termos de a e b. Em que direção devemos seguir a fim de que a taxa de variação de f seja 2? .

27. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

    (a) $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$.? Por que?

    (b) $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0.)$? Por que?

    (c) Determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

    (d) $f(x, y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0, 0)$.?

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

28. Nos itens abaixo calcule as derivadas parciais indicadas;

    (a)$f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y}, \quad f_x, f_y, f_{xx}$

    (b)$f(x, y) = \ln(x^2y^2), \quad h_{12}, h_{21}, h_{212}$

    (c)$f(x, y) = y^3e^{-5x}, \quad f_{xyy}(0, 1), f_{xxx}(0, 1), f_{yyxx}(0, 1)$

29. Verifique que as funções abaixo satisfazem a equação de Laplace: $z_{xx} + z_{yy} = 0$

$$\text{(a)} \;\; z = e^x \text{sen}\, y, \qquad (b) \;\; z = \arctan(\frac{y}{x})$$

30. Dado $w = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$, verifique que w satisfaz a equação diferencial parcial:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 5w$$

31. Use diferenciação implicita para determinar: $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

   (a) $xy + yz = xz$ $\quad$ (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y+z)$

   (c) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$ $\quad$ (d) $xyz = \cos(x+y+z)$

LINEARIZAÇÃO E DIFERENCIAIS

32. Determine a linearização das seguintes funções , ao redor dos pontos dados:

   (a) $f(x,y) = \text{sen }(xy), \quad P(0,1)$ $\quad$ (b) $f(x,y) = xyz, \quad P(1,1,1)$

   (c) $f(x,y,z) = xy^3 + \cos(\pi z), \quad P(1,3,1)$ $\quad$ (d) $f(x,y,z) = (xy)^z, \quad P(12,10,1)$

33. Calcule, aproximadamente:
   (a) $M = 0.98 \times 0.99 \times 1.02$
   (b) $N = (12.03 \times 10.04)^{1.08}$
   (c) $P = 3.001 \times (2.0023)^3 + \cos((1.002)\pi)$

34. Se $f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, determine os valores de $\triangle f$ e df, quando (x,y) varia de $(2,-1)$ a $(1.99,-0.98)$

35. Nos itens abaixo, encontre a linearização L da função f em P_0. Então encontre um limitante superior para a magnitude $|E|$ do erro na aproximação $f \approx L$ na região $\mathcal{R}$
   (a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5$, em$P_0(1,2)$, $\mathcal{R} : |x-2| \leq 0.1, \quad |y-1| \leq 0.1$
   (b) $f(x,y) = 1 + y + x\cos y$, em$P_0(0,0)$, $\mathcal{R} : |x| \leq 0.2, \quad |y| \leq 0.2$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + \frac{z^2}{4}$, em$P_0(1,1,2)$,
   $\mathcal{R} : |x-1| \leq 0.01, \quad |y-1| \leq 0.01, \quad |z-2| \leq 0.08$

36. Você planeja calcular a área de um retângulo comprido e fino a partir de medidas de seu comprimento e largura. Qual dimensão você deve medir com mais cuidado? Justifique sua resposta.

37. Ao redor do ponto $P_0(1,0)$, a função $f(x,y) = x^2(y+1)$ é mais sensível a variações em x ou em y?. Qual razão entre dx e dy fará df igual a zero no ponto $P_0(1,0)$?

38. Sua empresa produz latas de refrigerantes padrão que tem $20cm$ de altura com raio de $3cm$. Qual é a sensibilidade do volume da lata em relação a pequenas variações do raio e da altura?