

Universidade Federal do Paraná  
Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

---

2<sup>da</sup> Lista de exercícios de Cálculo II

1. Encontre e classifique os extremos relativos da função

(a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

(c)  $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y); (x > 0, y > 0)$

(d)  $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

(e)  $f(x, y) = e^{x^2+y^2+y}$

(f)  $f(x, y) = 2xy + x^3 - y^3x$

(g)  $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$

(h)  $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

(i)  $f(x, y) = 2xy + x^3 - y^3x$

(j)  $f(x, y) = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

2. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de  $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$  sobre a região quadrada limitada pelas retas  $x = \pm 2$  e  $y = \pm 2$ .
3. Encontre o máximo e mínimo absoluto de  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ , quando os pares  $(x, y)$  estão na placa retangular  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .
4. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função  $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ , na região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$
5. Encontre o máximo e o mínimo global de  $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ , na região triangular no primeiro quadrante limitada pelas retas  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 9 - x$ .
6. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função  $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$ , na placa triangular limitada pelas retas  $x = 2$ ,  $y = -2$ ,  $x = y$ .
7. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$  na região  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$
8. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função  $f(x, y) = 3x - y$  na região  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4, 3x + y \leq 6\}$
9. Encontre os valores máximo e mínimo da função  $f(x, y) = e^{-xy}$  na região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
10. Encontre os extremos absolutos da função  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x$  na região  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

**Máximos e mínimos com restrições: Multiplicadores de Lagrange**

11. Determine o retângulo de perímetro máximo, com os lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse  $x^2 + 2y^2 = 4$ .
12. uma caixa cilíndrica de base circular tem volume de  $27 m^3$ . Se o material usado nos lados custa 2 reais o  $m^2$  e o material usado na base inferior e superior custa 2 e 4 reais o  $m^2$  respectivamente. Quais devem ser as dimensões do cilindro mais barato.
13. Determinar os eixos da elipse  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$
14. Os cursos de dois rios ( dentro dos limites de uma determinada região) são representada aproximadamente pela parábola  $y = x^2$  e pela reta  $x - y - 2 = 0$ . Deve-se unir esses rios por meio de uma canal retilíneo que tenha o menos comprimento possível. Por quais pontos devemos traça-lo? Qual será sua extensão

15. Mostre que a distância do ponto  $(x_0, y_0)$  à reta de equação  $l : ax + by + c = 0$  é dada por

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

16. (Método dos mínimos quadrados) Suponhamos que você tenha feito um experimento varias vezes e obteve como resultados experimentais certas medidas de quantidades  $y$ , que varia quando alteramos a quantidade  $x$ . Suponhamos que por razões físicas  $y$  é uma função afim de  $x$ , isto é  $y = ax + b$ . Devido a erros experimentais se plotarmos os resultados experimentais

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

observamos que eles não estarão dispostos exatamente sobre uma reta (gráfico da função afim). Assim a pergunta é: Quais são os valores de  $a$  e  $b$  tal que o gráfico de  $y = ax + b$  aproxima da "melhor" forma possível os dados experimentais? Por "melhor" entendemos os valores de  $a$  e  $b$  que minimizam a função

$$f(a, b) = \sum_{i=0}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

17. Um container (no formato de paralelepípedo) tem que ter um volume de  $81m^3$ . Use multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do container com esse volume e custo mínimo, se o preço de construção nos lados custa 1 real o  $m^2$  e o material usado na base e na tampa custa 2 e 4 reais respectivamente.
18. Um fazendeiro dispoe de 16 reais para construir um cercado. Dois lados (opostos) custam 1 real por metro, enquanto os outros dois lados (opostos) custam 2 reais por metro. Qual são as dimensões da maior area tectangular que ele pode cercar?
19. Encontre os pontos sobre a curva  $x^2 + xy + y^2 = 1$  no plano  $xy$  que estão mais proximos e mais afastados da origem.
20. Mostre que dentre todos os paralelogramos de perímetro constante igual à  $4mts$  o quadrado é aquele que fecha a maior área possível.

21. Encontre as dimensões do retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é esse perímetro.?

22. Tanque de armazenamento mais barato: Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha  $8.000 m^3$  de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica que você recomendaria para o tanque?.

23. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída de modo sua área seja  $36 mts^2$ .

24. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio  $a$ . Qual é essa área?

25. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ .

26. Encontre as dimensões da lata cilíndrica circular reta fechada de menor área cujo volume é  $16\pi cm^3$ .

27. Encontre o ponto sobre a superfície  $z = xy + 1$  mais próximo da origem.

28. Encontre os pontos sobre a superfície  $z^2 = xy + 4$  mais próximos da origem.

29. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ .

30. Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tem três faces nos planos coordenados e um vértice no plano  $2x + 3y + 4z = 12$ .

31. Sua empresa está desenvolvendo caixas de papelão grosso para exportar pipocas. As arestas da embalagem precisam ser reforçados com arame. O custo do arame é de  $3 reais$  o metro e o custo do papelão é de  $1 real$  o metro quadrado, mas a tampa da caixa deve ser feita com um tipo diferente de papelão, que custa  $2 reais$  o metro quadrado. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões da embalagem de modo que ela possa conter  $6 m^3$  de pipocas tal que o custo da embalagem seja mínimo.

32. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com  $27cm^2$  de papelão.

33. Determine a equação do plano que passa pelo ponto  $(2, 2, 1)$  e que delimita no primeiro octante um tetraedro de menor volume.

34. Sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma$$