

# Universidade Federal do Paraná

## Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

---

### 1<sup>a</sup> Lista de exercicios de cálculo II

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

|                                        |                                                         |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| (a) $\gamma(t) = (1, t)$               | (b) $\gamma(t) = (4 \cos t, 2 \sin t)$                  |
| (c) $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t)$   | (d) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t)$                    |
| (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$ | (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$              |
| (g) $\gamma(t) = (\sin t, \cos 2t)$    | (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, t)$ |

2. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva abaixo nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

|                                            |                                                          |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (a) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$ | (b) $\gamma(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ |
| (c) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$   | (d) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$          |

3. Em que ponto é que o traço da curva:

$$\mathcal{C}_1 : \sigma(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

é perpendicular á recta de equação  $3x + 5y - 8 = 0$ ?

4. Mostre que a curva  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$  tem duas tangentes em  $(0, 0)$  e ache suas equações. Esboce a curva.

5. Encontre uma equação (paramétrica) da reta tangente à curva no ponto correspondente ao parâmetro indicado.

(a)  $r(t) = (2t^2 + 1, \frac{1}{3}t^3 - t, t), \quad t = 1$  (curva no espaço).

(b)  $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad t = 0$  (curva plana)

6. Em que pontos da curva  $\sigma(t) = (t^3 + 4t, 6t^2)$  a tangente é paralela à reta de equação vetorial  $r : (x, y) = (0, -5) + \lambda(-7, 12)$ ?

7. Encontre todos os pontos da curva  $\sigma(t) = (t, t^4 - t + 3)$  onde a reta tangente passam pela origem.

8. A posição de uma partícula em movimento é dada por:  $r(t) = (\frac{1-t}{1+t}, \frac{2\sqrt{t}}{1+t}) \quad t \geq 0$

a) Esboce o gráfico da trajetória da partícula.

b) Em que sentido a partícula se move quando  $t$  aumenta?

c) Encontre os vetores velocidade e aceleração.

d) Para quais valores de  $t$  a velocidade e aceleração são ortogonais.

9. Seja  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável. Mostre que se  $\|\sigma(t)\| = c$  para todo  $t \in I$  então  $\sigma(t)$  é ortogonal a  $\sigma'(t)$  para todo  $t$ . Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

10. Encontre o comprimento da curva

(a)  $\sigma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3), \quad t \in [-4, 4]$ .

(b)  $\sigma_2(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t) \quad t \in [0, \pi]$ .

(c)  $\sigma_3(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t) \quad t \in [0, \pi]$ .

(d)  $\sigma_4(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1 - t^2)$  de  $(0, 0, 1)$  a  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ .

(e)  $\sigma_5(t) = (t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t) \quad t \in [-10, 10]$ .

(f)  $\sigma_6(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3}) \quad t \in [0, 1]$ .

(g)  $\sigma_7(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$ .

11. Em que instantes no intervalo  $0 \leq t \leq \pi$  os vetores velocidade e aceleração do movimento  $r(t) = \mathbf{i} + 5 \cos t \mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k}$  são ortogonais. ?

12. Determine o ponto da curva onde a curvatura é máxima e encontre o limite de  $k(x)$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

(a)  $y = (x - 1)^2 + 3, \quad (b) \quad y = x^3;$

(c)  $y = x^{2/3}, \quad (d) \quad y = \ln x.$

13. Para a elipse dada por  $x^2 + 4y^2 = 4$  mostre que a curvatura é máxima nos vértices pertencentes ao eixo maior e mínima nos vértices pertencente ao eixo menor.

14. Determine a curvatura das curvas abaixo nos pontos indicados:

a)  $y = x^3$  em um ponto arbitrário.

b)  $xy = 12$  no ponto  $P(3, 4)$ .

c)  $x^2 + 4y^2 = 4$  nos pontos  $P(0, 1)$  e  $Q(2, 0)$ .

15. Determine o(s) ponto(s) da curva  $r(t) = (2t - 3, t^2 - 1)$  onde o raio de curvatura é mínimo.

16. Determine o(s) ponto(s) da curva  $\sigma(t) = (2e^t, 2e^{-t})$  onde a curvatura é máxima.

17. Determine os valores de  $a, b$  e  $c$  de modo que a parábola  $y = ax^2 + bx + c$  tenha, no ponto  $P(\frac{\pi}{2}, 1)$ , tangente e curvatura comuns com a senóide  $y = \sin x$ .

18. Encontre a curvatura e o raio de curvatura no ponto  $P$  dado. Trace um esboço da curva e o círculo de curvatura.

a)  $x^2 + y^2 = 1$  em um ponto arbitrário.

b)  $xy = 2$  no ponto  $P(2, 1)$ .