$$y = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^x,$$

é uma solução para

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^{2x} + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^x - e^x}_{g_3(x)}.$$

■

Antes de realmente começarmos a resolver equações diferenciais homogêneas e não-homogêneas, precisamos ainda da teoria adicional apresentada na próxima seção.

Nota Um sistema físico que varia com o tempo e cujo modelo matemático é uma equação diferencial linear

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

é chamado de **sistema linear**. Os valores das variáveis $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n-1)}(t)$ em um tempo específico t_0 descrevem o **estado** do sistema. A função g é chamada de **função aplicada**, **função de força** ou **função de excitação**. Uma solução $y(t)$ para a equação diferencial é chamada de **saída** ou **resposta** do sistema. A dependência da resposta à função aplicada é ilustrada na Figura 4.5.

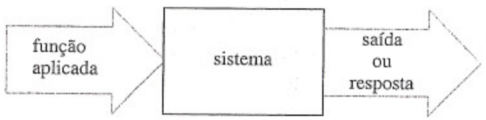

Figura 4.5

Para que um sistema físico seja um sistema linear, é necessário que o princípio de superposição (Teorema 4.9) seja válido no sistema; isto é, a resposta do sistema a uma superposição de aplicações é uma superposição de respostas.

4.1 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 448 a 450.

[4.1.1]

1. Sabe-se que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Encontre uma solução para a equação diferencial do Problema 1 satisfazendo as condições de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

3. Sabe-se que $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - 3y' - 4y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. Sabe-se que $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

   é uma família a três parâmetros de soluções para $y''' + y' = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) = -1$.

5. Sabe-se que $y = c_1x + c_2x \ln x$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $x^2y'' - xy' + y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

6. Sabe-se que $y = c_1 + c_2x^2$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $xy'' - y' = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Mostre que não existem constantes c_1 e c_2 para que um membro dessa família satisfaça as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique por que isso não constitui uma violação do Teorema 4.1.

7. Encontre dois membros da família de soluções para $xy'' - y' = 0$ dada no Problema 6, que satisfaçam as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

8. Encontre um membro da família de soluções para $xy'' - y' = 0$ dada no Problema 6, que satisfaça as condições de contorno $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$. O Teorema 4.1 garante que esta solução é única?

9. Sabe-se que $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

   é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - 2y' + 2y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre, se existir, um membro dessa família que satisfaça as condições

   (a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **(b)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$

   (c) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$ **(d)** $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

10. Sabe-se que $y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$

    é uma família a dois parâmetros de soluções para $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Encontre, se existir, um membro dessa família que satisfaça as condições

    (a) $y(-1) = 0$, $y(1) = 4$ **(b)** $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

    (c) $y(0) = 3$, $y(1) = 0$ **(d)** $y(0) = 3$, $y(2) = 15$.

Nos Problemas 11 e 12, encontre um intervalo em torno de $x = 0$ no qual o problema de valor inicial dado tenha uma única solução.

11. $(x - 2)y'' + 3y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

12. $y'' + (\operatorname{tg} x)y = e^x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

13. Sabe-se que $y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x$ é uma família de soluções para a equação diferencial $y'' + \lambda^2 y = 0$. Determine os valores de parâmetro λ para os quais o problema de valor de contorno

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0,$$

possua soluções não triviais.

14. Determine os valores do parâmetro λ para os quais o problema de valor de contorno

$$y'' + \lambda^2 y\ \lambda 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(5) = 0,$$

possua soluções não triviais. Veja o Problema 13.

[4.1.2]

Nos Problemas 15-22, determine se as funções dadas são linearmente independentes ou dependentes em $(-\infty, \infty)$.

15. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = 4x - 3x^2$

16. $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = e^x$

17. $f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = \cos^2, \quad f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

18. $f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = \cos^2 x$

19. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = x + 3$

20. $f_1(x) = 2 + x, \quad f_2(x) = 2 + |x|,$

21. $f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$

22. $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \operatorname{senh} x$

Nos Problemas 23-28, mostre, calculando o Wronskiano, que as funções dadas são linearmente independentes no intervalo indicado.

23. $x^{1/2}, x^2; \ (0, \infty)$

24. $1 + x, x^3; \ (-\infty, \infty)$

25. $\operatorname{sen} x, \operatorname{cosc} x; \ (0, \pi)$

26. $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x; \ (0, \pi/2)$

27. $e^x, e^{-x}, e^{4x}; \ (-\infty, \infty)$

28. $x, x \ln x, x^2 \ln x; \ (0, \infty)$

29. Observe que, para as funções $f_1(x) = 2$ e $f_2(x) = e^x$,

$$1 \times f_1(0) - 2 \times f_2(0) = 0.$$

Isso implica que as funções f_1 e f_2 são linearmente dependentes em qualquer intervalo contendo $x = 0$?

30. **(a)** Mostre graficamente que $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x|x|$ são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$.

(b) Mostre que $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$ para todo número real.

[4.1.3]

31. **(a)** Verifique que $y = 1/x$ é uma solução para a equação diferencial não-linear $y'' = 2y^3$ no intervalo $(0, \infty)$.

(b) Mostre que um múltiplo $y = c/x$ não é uma solução para a equação quando $c \neq 0, \pm 1$.

32. **(a)** Verifique que $y_1 = 1$ e $y_2 = \ln x$ são soluções para a equação diferencial não-linear $y'' + (y')^2 = 0$ no intervalo $(0, \infty)$.

(b) $y_1 + y_2$ é uma solução para a equação? $c_1y_1 + c_2y_2$, c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é uma solução para a equação?

Nos Problemas 33-40, verifique que as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo indicado. Forme a solução geral.

33. $y'' - y' - 12y = 0; \ e^{-3x}, \ e^{4x}, \ (-\infty, \infty)$

34. $y'' - 4y = 0; \ \cosh 2x, \ \operatorname{senh} 2x, \ (-\infty, \infty)$

35. $y'' - 2y' + 5y = 0; \ e^x \cos 2x, \ e^x \operatorname{sen} 2x, \ (-\infty, \infty)$

36. $4y'' - 4y' + y = 0; \ e^{x/2}, \ xe^{x/2}, \ (-\infty, \infty)$

37. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0; \ x^3, \ x^4, \ (0, \infty)$

38. $x^2y'' + xy' + y = 0; \ \cos(\ln x), \ \operatorname{sen}(\ln x), \ (0, \infty)$

39. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0; \ x, \ x^{-2}, \ x^{-2} \ln x, \ (0, \infty)$

40. $y^{(4)} + y'' = 0; \ 1, \ x, \ \cos x, \ \operatorname{sen} x, \ (-\infty, \infty)$

Nos Problemas 41-44, verifique que a dada família a dois parâmetros de funções é a solução geral para a equação diferencial não-homogênea no intervalo indicado.

41. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x, \ (-\infty, \infty)$

42. $y'' - y = \sec x$
$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x), \ (-\pi/2, \pi/2)$

43. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$
$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2, \ (-\infty, \infty)$

44. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x, \ (0, \infty)$

45. **(a)** Verifique que $y_1 = x^3$ e $y_2 = |x|^3$ são linearmente independentes da equação diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ em $(-\infty, \infty)$.

(b) Mostre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo número real.

(c) O resultado da parte (b) viola o Teorema 4.4?

(d) Verifique que $Y_1 = x^3$ e $Y_2 = x^2$ são também soluções linearmente independentes para a equação diferencial no intervalo $(-\infty, \infty)$.

(e) Encontre uma solução para a equação que satisfaça $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(f) Pelo princípio da superposição ambas as combinações lineares

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{e} \quad y = c_1Y_1 + c_2Y_2$$

são soluções para a equação diferencial. Qual delas é a solução geral para a equação diferencial em $(-\infty, \infty)$?

46. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{9}$$

em que $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são contínuas em um intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Pelo Teorema 4.1, existe somente uma solução y_1 para a equação que satisfaça $y(x_0) = 1$ e $y'(x_0) = 0$, em que x_0 é um ponto de I. Da mesma forma, existe uma única solução y_2 para a equação que satisfaça $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1$. Mostre que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo I.

47. Sejam y_1 e y_2 duas soluções para (9).

(a) Se $W(y_1, y_2)$ é o Wronskiano de y_1 e y_2, mostre que

$$a_2(x)\frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0.$$

(b) Deduza a **fórmula de Abel***

$$W = ce^{-\int [a_1(x)/a_2(x)]dx}$$

em que c é uma constante.

* **Niels Henrik Abel** (1802-1829) Abel foi um brilhante matemático norueguês cuja morte trágica aos 26 anos, devida à tuberculose, representou uma perda inestimável para a matemática. Seu grande feito foi a solução para um problema que confundiu os matemáticos por séculos: ele mostrou que uma equação polinomial geral para quinta ordem não pode ser resolvida algebricamente – isto é, em termos de radicais. Contemporâneo de Abel, o francês Evariste Galois, então provou que era impossível resolver qualquer equação geral para grau maior que quatro algebricamente. Galois é outra figura trágica na história da matemática; ativista político, foi morto em um duelo aos 22 anos de idade.

(c) Usando uma forma alternativa da fórmula de Abel

$$W = ce^{-\int_{x_0}^{x} [a_1(t)/a_2(t)]dt},$$

para x_0 em I, mostre que

$$W(y_1, y_2) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} [a_1(t)/a_2(t)]dt}.$$

(d) Mostre que, se $W(x_0) = 0$, então $W = 0$ para todo x em I, enquanto, se $W(x_0) \neq 0$, então $W \neq 0$ para todo x no intervalo.

Nos Problemas 48 e 49, use os resultados do Problema 47.

48. Se y_1 e y_2 são duas soluções para

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

em $(-1, 1)$, mostre que $W(y_1, y_2) = c/(1 - x^2)$, em que c é uma constante.

49. No Capítulo 6, veremos que as soluções y_1 e y_2 para $xy'' + y' + xy = 0$, $0 < x < \infty$, são séries infinitas. Suponha que consideremos as condições iniciais

$$y_1(x_0) = k_1, \quad y_1'(x_0) = k_2$$

e

$$y_2(x_0) = k_3, \quad y_2'(x_0) = k_4$$

para $x_0 > 0$. Mostre que

$$W(y_1, y_2) = \frac{(k_1k_4 - k_2k_3)x_0}{x}.$$

50. Suponha que um modelo matemático de um sistema linear seja dado por

$$a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)\,y = E(t)$$

Se y_1 é uma resposta do sistema a uma aplicação $E_1(t)$ e y_2 é uma resposta do mesmo sistema a uma aplicação $E_2(t)$, mostre que, $y_1 + y_2$ é uma resposta do sistema à aplicação $E_1(t) + E_2(t)$.

4.2 CONSTRUINDO UMA SEGUNDA SOLUÇÃO A PARTIR DE UMA SOLUÇÃO CONHECIDA

Redução de Ordem

Um dos fatos mais interessantes e importantes no estudo de equações diferenciais lineares de *segunda ordem* é que podemos construir uma segunda solução a partir de uma solução *conhecida*. Suponha que $y_1(x)$ seja uma solução não trivial para a equação

Observe que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ no Exemplo 3 são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada no intervalo maior $(0, \infty)$.

Observação Deduzimos e ilustramos como usar (4) porque você verá essa fórmula novamente na Seção 6.1. Usamos (4) simplesmente para economizar tempo na obtenção do resultado desejado. Seu professor irá dizer-lhe se você deve memorizar (4) ou se deve saber os primeiros princípios de redução de ordem.

4.2 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 450.

Nos Problemas 1-30, encontre uma segunda solução para cada equação diferencial. Use redução de ordem ou a fórmula (4) como ensinada. Suponha um intervalo apropriado.

1. $y'' + 5y' = 0$; $y_1 = 1$
2. $y'' - y' = 0$; $y_1 = 1$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{2x}$
4. $y'' + 2y^1 + y = 0$; $y_1 = xe^{-x}$
5. $y'' + 16y = 0$; $y_1 = \cos 4x$
6. $y'' + 9y = 0$; $y_1 = \operatorname{sen} 3x$
7. $y'' - y = 0$; $y_1 = \cosh x$
8. $y'' - 25y = 0$; $y_1 = e^{5x}$
9. $9y'' - 12y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{2x/3}$
10. $6y'' + y' - y = 0$; $y_1 - e^{x/3}$
11. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$; $y_1 = x^4$
12. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; $y_1 = x^2$
13. $xy'' + y' = 0$; $y_1 = \ln x$
14. $4x^2y'' + y = 0$; $x^{1/2} \ln x$
15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$; $y_1 = x + 1$
16. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y_1 = 1$
17. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$
18. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$; $y_1 = x^2 \cos(\ln x)$
19. $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y_1 = e^{-2x}$
20. $(1 + x)y'' + xy' - y = 0$; $y_1 = x$
21. $x^2y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$
22. $x^2y'' - 20y = 0$; $y_1 = x^{-4}$
23. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$; $y_1 = x^3 \ln x$
24. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y_1 = \cos(\ln x)$
25. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; $y_1 = x^2 + x^3$
26. $x^2y'' - 7xy' - 20y = 0$; $y_1 = x^{10}$
27. $(3x + 1)y'' - (9x + 6)y' + 9y = 0$; $y_1 = e^{3x}$
28. $xy'' - (x + 1)y' + y = 0$; $y_1 = e^x$
29. $y'' - 3(\operatorname{tg} x)y' = 0$; $y_1 = 1$
30. $xy'' - (2 + x)y' = 0$; $y_1 = 1$

Nos Problemas 31-34, use o método de redução de ordem para encontrar uma solução para a equação não-homogênea dada. A função indicada $y_1(x)$ é uma solução para a equação homogênea associada. Determine uma segunda solução para a equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea.

31. $y'' - 4y = 2$; $y_1 = e^{-2x}$
32. $y'' + y' = 1$; $y_1 = 1$
33. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$; $y_1 = e^x$
34. $y'' - 4y' + 3y = x$; $y_1 = e^x$
35. Verifique por substituição direta que a fórmula (4) satisfaz a equação (2).

4.3 EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Vimos que a equação linear de primeira ordem $dy/dx + ay = 0$, em que a é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \quad (1)$$

em que os a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ são constantes. O fato surpreendente é que *todas* as soluções para (1) são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais. Começamos considerando o caso especial da equação de segunda ordem

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0.} \quad (2)$$

Equação Auxiliar

Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$; assim a equação (2) torna-se

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x, então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática

$$\boldsymbol{am^2 + bm + c = 0} \quad (3)$$

Essa última equação é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação diferencial (2). Consideramos três casos, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

CASO I Raízes Reais Distintas Com a hipótese de que a equação auxiliar (3) possui duas raízes reais distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções

$$y_1 = e^{m_1x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{m_2x}.$$

Vimos que essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ (veja Exemplo 13, Seção 1.4) e portanto formam um conjunto fundamental. Segue-se que a solução geral para (2) nesse intervalo é possui raízes $m_1 = m_3 = i$ e $m_2 = m_4 = -i$. Logo, pelo Caso III, a solução é

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix} + C_3xe^{ix} + C_4xe^{-ix}.$$

Pela fórmula de Euler, $C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$ pode ser reescrito como

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

após uma troca de constantes. Analogamente, $x(C_3e^{ix} + C_4e^{-ix})$ pode ser expresso como $x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. Então, a solução geral é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x.$$ ■

O Exemplo 6 ilustra um caso especial quando a equação auxiliar possui raízes complexas repetidas. No caso geral, se $m_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz complexa de multiplicidade k de uma equação auxiliar com coeficientes reais, então seu conjugado $m_2 = \alpha - i\beta$ é também uma raiz de multiplicidade k. A partir das $2k$ soluções complexas

$$e^{(\alpha + i\beta)x},\ xe^{(\alpha + i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha + i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha + i\beta)x}$$
$$e^{(\alpha - i\beta)x},\ xe^{(\alpha - i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha - i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha - i\beta)x}$$

concluímos, com a ajuda da fórmula de Euler, que a solução geral para a equação diferencial correspondente tem então de conter uma combinação linear das 2k soluções reais linearmente independentes

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

No Exemplo 6, temos $k = 2, \alpha = 0$ e $\beta = 1$.

4.3 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 450 e 451.

Nos Problemas 1-36, encontre a solução geral para a equação diferencial dada.

1. $4y'' + y' = 0$

2. $2y'' - 5y' = 0$

3. $y'' - 36y = 0$

4. $y'' - 8y = 0$

5. $y'' + 9y = 0$

6. $3y'' + y = 0$

7. $y'' - y' - 6y = 0$

8. $y'' - 3y' + 2y = 0$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$

11. $y'' + 3y' - 5y = 0$

12. $y'' + 4y' - y = 0$

13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

14. $8y'' + 2y' - y = 0$

15. $y'' - 4y' + 5y = 0$

16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

17. $3y'' + 2y' + y = 0$

18. $2y'' + 2y' + y = 0$

19. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

20. $4y''' + 4y'' + y' = 0$

21. $y''' - y = 0$

22. $y''' + 5y'' = 0$

23. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

24. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

25. $y''' + y'' - 2y = 0$

26. $y''' + y'' - 4y = 0$

27. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

28. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

29. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

30. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

31. $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

32. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$

33. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 16\dfrac{dy}{dx} = 0$

34. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + 17\dfrac{d^3x}{dx^3} = 0$

35. $\dfrac{d^5y}{dx^5} + 5\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 10\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

36. $2\dfrac{d^5y}{dx^5} - 7\dfrac{d^4y}{dx^4} + 12\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

Nos Problemas 37-52, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

37. $y'' + 16y = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = -2$

38. $y'' - y = 0,\quad y(0) = y'(0) = 1$

39. $y'' + 6y' + 5y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 3$

40. $y'' - 8y' + 17y = 0,\quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1$

41. $2y'' - 2y' + y = 0,\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = 0$

42. $y'' - 2y' + y = 0,\quad y(0) = 5,\quad y'(0) = 10$

43. $y'' + y' + 2y = 0,\quad y(0) = y'(0) = 0$

44. $4y'' - 4y' - 3y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 5$

45. $y'' - 3y' + 2y = 0,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = 1$

46. $y'' + y = 0,\quad y(\pi/3) = 0,\quad y'(\pi/3) = 2$

47. $y''' + 12y'' + 36y' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,\quad y''(0) = -7$

48. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0,\quad y(0) = y'(0) = 0,\quad y''(0) = 1$

49. $y''' - 8y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -1,\quad y''(0) = 0$

50. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 3,\quad y''(0) = 4,\quad y'''(0) = 5$

51. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0,\quad y(0) = y'(0) = 0,\quad y''(0) = y'''(0) = 1$

52. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - y = 0,\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\quad y'''(0) = 1$

Nos Problemas 53-56, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições de contorno indicadas.

53. $y'' - 10y' + 25y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y(1) = 0$

54. $y'' + 4y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y(\pi) = 0$

55. $y'' + y = 0,\quad y'(0) = 0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

56. $y'' - y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(1) = 0$

57. As raízes de uma equação auxiliar são $m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = -5$. Qual é a equação diferencial correspondente?

58. As raízes de uma equação auxiliar são $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3 + i$, $m_3 = 3 - i$. Qual é a equação auxiliar correspondente?

Nos Problemas 59 e 60, encontre a solução geral para a equação dada, em que y_1 é uma solução conhecida.

59. $y''' - 9y'' + 25y' - 17y = 0;\quad y_1 = e^x$

60. $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0;\quad y_1 = e^{-4x}\cos x$

Nos Problemas 61-64, determine uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes que tenham a solução dada.

61. $4e^{6x},\ 3e^{-3x}$

62. $10\cos 4x,\ -5\ \text{sen}\ 4x$

63. $3,\ 2x,\ -e^{7x}$

64. $8\ \text{senh}\ 3x,\ 12\cosh 3x$

65. Use as identidades

$$i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2 \quad \text{e} \quad -i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2$$

para resolver a equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y = 0.$$

[*Sugestão:* Escreva a equação auxiliar $m^4 + 1 = 0$ como $(m^2 + 1)^2 - 2m^2 = 0$. Veja o que acontece quando você fatora.]

4.4 COEFICIENTES INDETERMINADOS – ABORDAGEM POR SUPERPOSIÇÃO

Para o professor Nesta seção, o método dos coeficientes indeterminados é desenvolvido do ponto de vista do princípio de superposição para equações diferenciais não-homogêneas (Teorema 4.9). Na Seção 4.6, uma abordagem inteiramente diferente desse método será apresentada, utilizando o conceito de operadores diferenciais anuladores. Faça sua escolha.

Para obter a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea temos que fazer duas coisas:

(i) Encontrar a função complementar y_c.

(ii) Encontrar *qualquer* solução particular y_p da equação não-homogênea.

Lembre-se da discussão da Seção 4.1 de que uma solução particular é qualquer função, independente de parâmetros, que satisfaz a equação diferencial identicamente. A solução geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é então $y = y_c + y_p$.

Como na Seção 4.3 começamos com equações de segunda ordem, agora veremos o caso de equações não-homogêneas da forma

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{1}$$

em que a, b e c são constantes. Embora o **método dos coeficientes indeterminados** apresentado nesta seção não se limite a equações de segunda ordem, ele se limita a equações lineares não-homogêneas

- que têm coeficientes constantes, e
- em que $g(x)$ é uma constante k, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\text{sen}\beta x$, $\cos\beta x$, ou somas e produtos dessas funções.

Nota Para ser preciso, $g(x) = k$ (constante) é uma função polinomial. Como uma função constante não é provavelmente a primeira coisa que vem em mente quando você pensa em uma função polinomial, continuaremos, para enfatizar, usando a redundância, "função constante, polinomial,..."

O que segue são exemplos de tipos de funções aplicadas $g(x)$ que são apropriadas para essa discussão:

$$g(x) = 10$$
$$g(x) = x^2 - 5x$$
$$g(x) = 15x - 6 + 8e^{-4x}$$
$$g(x) = \text{sen}\ 3x - 5x\cos 2x$$
$$g(x) = e^x\cos x - (3x^2 - 1)e^{-x}$$

Ou seja, $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo

$$k\,(\textbf{constante}),\quad x^n,\quad x^ne^{\alpha x},\quad x^ne^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{e} \quad x^ne^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x,$$

em que n é um inteiro não negativo e α e β são números reais. O método dos coeficientes indeterminados não se aplica a equações da forma (1) quando, por exemplo,

$$g(x) = \ln x,\quad g(x) = \frac{1}{x},\quad g(x) = \text{tg}\ x,\quad g(x) = \text{sen}^{-1}x.$$

Equações diferenciais com esses tipos de funções aplicadas serão consideradas na Seção 4.7.

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{3x}.$$

Derivando esta última forma, substituindo na equação diferencial e agrupando os termos, obtemos,

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2De^{3x}$$
$$= 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

Segue-se desta identidade que $A = 2/3$, $B = 8/9$, $C = 2/3$ e $D = -6$. Logo, a solução geral $y = y_c + y_p$ é

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}.$$ ■

Equações de Ordem Superior

O método dos coeficientes indeterminados dado aqui não é restrito a equações de segunda ordem; mas pode ser usado com equações de ordem superior

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = g(x)$$

com coeficientes constantes. Só é necessário que $g(x)$ consista nos tipos próprios de funções discutidas acima.

E X E M P L O 10

Resolva
$$y''' + y'' = e^x \cos x.$$

Solução As raízes da equação característica $m^3 + m^2 = 0$ são $m_1 = m_2 = 0$ e $m_3 = -1$. Então, a solução complementar para a equação é $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$. Com $g(x) = e^x \cos x$ vemos na entrada 10 da tabela de tentativas de soluções particulares que devemos escolher

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \text{ sen } x.$$

Como não há nenhuma função em y_p que coincida com funções da solução complementar, procedemos da maneira usual. De

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \text{ sen } x = e^x \cos x$$

obtemos
$$-2A + 4B = 1$$
$$-4A - 2B = 0.$$

Desse sistema, determinamos $A = -1/10$ e $B = 1/5$. Logo, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \text{ sen } x.$$

A solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \text{ sen } x.$$ ■

E X E M P L O 11

Determine a forma de uma solução particular para

$$y(4) + y''' = 1 - e^{-x}.$$

Solução Comparando a função complementar

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$$

com nossa escolha normal para uma solução particular

$$y_p = \underbrace{A}_{\boxed{y_{p_1}}} + \underbrace{Be^{-x}}_{\boxed{y_{p_2}}},$$

vemos que as duplicações entre y_c e y_p são eliminadas quando y_{p1} é multiplicada por x^3 e y_{p2} é multiplicada por x. Logo, a escolha correta para uma solução particular é

$$y_p = Ax^3 + Bxe^{-x}.$$

4.4 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 451.

Nos Problemas 1-26, resolva a equação diferencial dada pelo método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$
2. $4y'' + 9y = 15$
3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
4. $y'' + y' - 6y = 2x$
5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
6. $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$
7. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
9. $y'' - y' = -3$
10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$
11. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$
12. $y'' - 16y = 2e^{4x}$
13. $y'' + 4y = 3 \text{ sen } 2x$
14. $y'' + 4y = (x^2 - 3) \text{ sen } 2x$
15. $y'' + y = 2x \text{ sen } x$
16. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

18. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)$

19. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x$

20. $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$

21. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$

23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

24. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

25. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$

26. $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

Nos Problemas 27 e 28, use uma identidade trigonométrica como auxílio para encontrar uma solução particular para a equação diferencial dada.

27. $y'' + y = 8 \operatorname{sen}^2 x$

28. $y'' + y = \operatorname{sen} x \cos 2x$

Nos Problemas 29-40, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

29. $y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$

30. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

31. $5y'' + y' = -6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -10$

32. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$

33. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1$

34. $y'' - y = \cosh x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12$

35. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

36. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

37. $y'' + y = \cos x - \operatorname{sen} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

38. $y'' - 2y' - 3y = 2\cos^2 x, \quad y(0) = -\frac{1}{3}, \quad y'(0) = 0$

39. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{5}{2}, \quad y''(0) = -\frac{9}{2}$

40. $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -4$

Nos Problemas 41 e 42, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições de contorno indicadas.

41. $y'' + y = x^2 + 1, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 0$

42. $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi$

43. Na prática, a função aplicada g(x) é freqüentemente descontínua. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

em que
$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}.$$

[*Sugestão:* Resolva o problema nos dois intervalos e então encontre uma solução de tal forma que y e y′ sejam contínuas em $x = \pi/2$.]

4.5 OPERADORES DIFERENCIAIS

Em cálculo, usamos freqüentemente a letra maiúscula D para denotar derivação; isto é,

$$\frac{dy}{dx} = Dy.$$

O símbolo D é chamado de **operador diferencial**; ele transforma uma função diferenciável em outra função; por exemplo,

$$D(e^{4x}) = 4e^{4x}, \quad D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x, \quad D(\cos 2x) = -2 \operatorname{sen} 2x.$$

O operador diferencial D também possui uma propriedade de linearidade; D operando em uma combinação linear de duas funções diferenciáveis é o mesmo que a combinação linear de D operando nas funções individualmente. Em símbolos, isso significa

$$D\,\{af(x) + bg(x)\} = a\,Df(x) + b\,Dg(x), \tag{1}$$

em que a e b são constantes. Por causa da igualdade (1), dizemos que D é um **operador diferencial linear**.

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas de ordem superior podem ser expressas em termos de D de uma maneira natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \quad \text{e no caso geral} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^n y,$$

em que y representa uma função suficientemente diferenciável. Expressões polinomiais envolvendo D, tais como

$$D + 3, \quad D^2 + 3D - 4, \quad \text{e} \quad 5D^3 - 6D^2 + 4D + 9$$

são também operadores diferenciais lineares.

Equações Diferenciais

Qualquer equação diferencial linear pode ser expressa em termos de D. Por exemplo, uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = g(x)$ pode ser escrita como

4.5 EXERCÍCIOS

As respostas dso exercícios selecionados estão na página 451.

Nos Problemas 1-6, a equação diferencial é dada na forma $L(y) = g(x)$, em que L é um operador diferencial com coeficientes constantes.

1. $\frac{dy}{dx} + 5y = 9 \operatorname{sen} x$

2. $4\frac{dy}{dx} + 8y = x + 3$

3. $3y'' - 5y' + y = e^x$

4. $y''' - 2y'' + 7y' - 6y = 1 - \operatorname{sen} x$

5. $y''' - 4y'' + 5y' = 4x$

6. $y^{(4)} - 2y'' + y = e^{-3x} + e^{2x}$

Nos Problemas 7-16, se possível, fatore o operador diferencial dado.

7. $9D^2 - 4$

8. $D^2 - 5$

9. $D^2 - 4D - 12$

10. $2D^2 - 3D - 2$

11. $D^3 + 10D^2 + 25D$

12. $D^3 + 4D$

13. $D^3 + 2D^2 - 13D + 10$

14. $D^3 + 4D^2 + 3D$

15. $D^4 + 8D$

16. $D^4 - 8D^2 + 16$

Nos Problemas 17-20, verifique que o operador diferencial dado anula a função indicada.

17. D^4; $y = 10x^3 - 2x$

18. $2D - 1$; $y = 4e^{x/2}$

19. $(D - 2)(D + 5)$; $y = 4e^{2x}$

20. $D^2 + 64$; $y = 2\cos 8x - 5 \operatorname{sen} 8x$

Nos Problemas 21-32, encontre um operador diferencial que anule a função dada.

21. $1 + 6x - 2x^3$

22. $x^3(1 - 5x)$

23. $1 + 7e^{2x}$

24. $x + 3xe^{6x}$

25. $\cos 2x$

26. $1 + \operatorname{sen} x$

27. $13x + 9x^2 - \operatorname{sen} 4x$

28. $8x - \operatorname{sen} x + 10\cos 5x$

29. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$

30. $(2 - e^x)^2$

31. $3 + e^x \cos 2x$

32. $e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x$

Nos Problemas 33-40 encontre funções linearmente independentes que são anuladas pelo operador diferencial dado.

33. D^5

34. $D^2 + 4D$

35. $(D - 6)(2D + 3)$

36. $D^2 - 9D - 36$

37. $D^2 + 5$

38. $D^2 - 6D + 10$

39. $D^3 - 10D^2 + 25D$

40. $D^2(D - 5)(D - 7)$

4.6 COEFICIENTES INDETERMINADOS – ABORDAGEM POR ANULADORES

Para obter a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea devemos fazer duas coisas:

(i) Encontrar a função complementar y_c.

(ii) Encontrar uma solução particular y_p para a equação não-homogênea.

Lembre-se da discussão da Seção 4.1 de que uma solução particular é qualquer função, independente de constantes, que satisfaça a equação diferencial identicamente. A solução geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é então $y = y_c + y_p$.

Se L denota um operador diferencial linear da forma $a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$, então uma equação diferencial linear não-homogênea pode ser escrita simplesmente como

$$L(y) = g(x) \tag{1}$$

O **método dos coeficientes indeterminados** apresentado nesta seção limita-se a equações lineares não-homogêneas

- que têm coeficientes constantes, e
- em que $g(x)$ é uma constante k, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\operatorname{sen}\beta x$, $\cos\beta x$ ou somas e produtos finitos dessas funções.

Nota Precisamente, $g(x) = k$, (uma constante) é uma função polinomial. Como uma função constante não é provavelmente a primeira coisa que lhe vem à mente quando você pensa em funções polinomiais, para enfatizar, continuamos a usar a redundância "funções constantes, polinomiais,..."

O que segue são alguns exemplos de tipos de funções aplicadas $g(x)$ que são apropriados para essa discussão:

$$g(x) = 10$$

$$g(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = 15x - 6 + 8e^{4x}$$

$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x$$

$$g(x) = e^x \cos x - (3x^2 - 1)e^{-x}$$

4.6 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 452.

Nos Problemas 1-32, resolva a equação diferencial dada pelo método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 9y = 54$

2. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

3. $y'' + y' = 3$

4. $y'' + 2y'' + y' = 10$

5. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

6. $y'' + 3y' = 4x - 5$

7. $y''' + y'' = 8x^2$

8. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

9. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

10. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

11. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

12. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

13. $y'' + 25y = 6 \text{ sen } x$

14. $y'' + 4y = 4 \cos x + 3 \text{ sen } x - 8$

15. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

16. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

17. $y'' - y = x^2e^x + 5$

18. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$

19. $y'' - 2y' + 5y = e^x \text{ sen } x$

20. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\text{sen } 3x - \cos 3x)$

21. $y'' + 25y = 20 \text{ sen } 5x$

22. $y'' + y = 4 \cos x - \text{sen } x$

23. $y'' + y' + y = x \text{ sen } x$

24. $y'' + 4y = \cos^2 x$

25. $y'' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

26. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

27. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

28. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

29. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

30. $y^{(4)} - 4y''' = 5x^2 - e^{2x}$

31. $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$

32. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 2 \cosh x - 6$

Nos Problemas 33-40, resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

33. $y'' - 64y = 16, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

34. $y'' + y' = x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

35. $y'' - 5y' = x - 2, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2$

36. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1$

37. $y'' + y = 8 \cos 2x - 4 \text{ sen } x, \ y(\pi/2) = -1, \ y'(\pi/2) = 0$

38. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = -1$

39. $y'' - 4y' + 8y = x^3, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 4$

40. $y^{(4)} - y''' = x + e^x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 0, \ y'''(0) = 0$

Nos Problemas 41 e 42, determine a forma de uma solução particular para a equação diferencial dada.

41. $y'' - y = e^x(2 + 3x \cos 2x)$

42. $y'' + y' = 9 - e^{-x} + x^2 \text{ sen } x$

43. Mostre que o operador $(xD - 1)(D + 4)$ é diferente do operador $(D + 4)(xD - 1)$.

44. Prove que a equação diferencial

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = k,$$

k uma constante, $a_0 \neq 0$, tem como solução particular a função $y_p = k/a_0$.

4.7 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Revisão de Equações Lineares de Primeira Ordem

No Capítulo 2, vimos que a solução geral para a equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \tag{1}$$

em que $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas em um intervalo I, é

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx + c_1e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{2}$$

Agora, (2) tem a forma $y = y_c + y_p$, em que $y_c = c_1e^{-\int P(x)\,dx}$ é uma solução para

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

e

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx \tag{4}$$

é uma solução particular para (1). Para motivar um método adicional para resolver equações lineares não-homogêneas de ordem superior, vamos novamente deduzir (4), agora por um método conhecido como **variação dos parâmetros**. O procedimento básico é essencialmente aquele usado na Seção 4.2.

Suponha que y_1 seja uma solução conhecida para (3); isto é,

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0.$$

$$
\begin{aligned}
y_1u_1' + \quad & y_2u_2' + \ldots + \quad y_nu_n' = 0 \\
y_1'u_1' + \quad & y_2'u_1' + \ldots + \quad y_n'u_n' = 0 \\
& \vdots \\
y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' & + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' = f(x).
\end{aligned}
$$

As primeiras $n - 1$ equações do sistema, como em (7), são suposições feitas para simplificar as primeiras $n - 1$ derivadas de y_p. A última equação do sistema resulta da substituição da n-ésima derivada de y_p e as derivadas de ordem menor simplificadas em (13). Neste caso, a regra de Cramer nos dá

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

em que W é o Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e W_k é o determinante obtido substituindo a k-ésima coluna do Wronskiano pela coluna

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x). \end{matrix}$$

Quando $n = 2$, obtemos (10) e (11).

Observação (i) A variação dos parâmetros tem uma vantagem sobre o método dos coeficientes indeterminados. Ela *sempre* produz uma solução particular y_p, desde que a equação homogênea associada possa ser resolvida. O presente método não se limita a uma função $f(x)$ que seja combinação linear dos quatro tipos de funções listadas na página 183. Ainda, a variação dos parâmetros se aplica a equações diferenciais com coeficientes variáveis.

Nos problemas que seguem, não hesite em simplificar a forma de y_p. Dependendo de como as antiderivadas de u_1' e u_2' forem encontradas, você pode não obter a mesma y_p dada na seção de respostas. Por exemplo, no Problema 3, $y_p = (\operatorname{sen} x - x\cos x)/2$ e $y_p = (\operatorname{sen} x)/4 - (x\cos x)/2$ são respostas válidas. Em qualquer caso, a solução geral $y = y_c + y_p$ pode ser simplificada, ou seja, $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - (x\cos x)/2$. Por quê?

(ii) Nos Problemas 25-28, pede-se para resolver os problemas de valor inicial. Certifique-se de aplicar as condições iniciais à solução geral $y = y_c + y_p$. Estudantes freqüentemente cometem o erro de aplicar as condições iniciais somente à função complementar y_c, pois ela é a parte da solução que contém as constantes. Faça uma revisão do Exemplo 8 da Seção 4.4 para o correto procedimento.

4.7 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 452 e 453.

Nos Problemas 1-24, resolva cada equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros. Defina um intervalo no qual a solução geral seja válida.

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \operatorname{tg} x$
3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
4. $y'' + y = \sec x \operatorname{tg} x$
5. $y'' + y = \cos^2 x$
6. $y'' + y = \sec^2 x$
7. $y'' - y = \cosh x$
8. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$
9. $y'' - 4y = e^{2x}/x$
10. $y'' - 9y = 9x/e^{3x}$
11. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$
12. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1 + e^x)$
13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$
14. $y'' - 2y' + y = e^x \operatorname{arctg} x$
15. $y'' - 2y' + y = e^{+x}/(1 + x^2)$
16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$
17. $y'' - 2y' + y = e^{-x}\ln x$
18. $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$
19. $3y'' - 6y' + 30y = e^x \operatorname{tg} 3x$
20. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$
21. $y''' + y' = \operatorname{tg} x$
22. $y''' + 4y' = \sec 2x$
23. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$
24. $y''' - 6y'' = x^2$

Nos Problemas 25-28, resolva cada equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros, sujeita à condição inicial $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

25. $4y'' - y = xe^{x/2}$
26. $2y'' + y' - y = x + 1$
27. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$
28. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$
29. Sabendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x\ln x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x^2y'' - xy' + y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para
$$x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x.$$
30. Sabendo que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}.$$
31. Sabendo que $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}.$$

32. Sabendo que $y_1 = \cos(\ln x)$ e $y_2 = \text{sen}(\ln x)$ são soluções linearmente independentes para $x^2y'' + xy' + y = 0$em $(0, \infty)$:

(a) Encontre uma solução particular para

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x).$$

(b) Dê a solução geral para a equação e defina um intervalo em que esta seja válida. [*Sugestão:* Não é $(0, \infty)$. Por quê?]

33. (a) Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular para

$$y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3.$$

(b) Use o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular para

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

(c) Use o princípio de superposição (Teorema 4.9) para encontrar uma solução particular para

$$y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3 + \frac{e^{-x}}{x}.$$

34. Use o método delineado no Problema 33 para encontrar uma solução particular para

$$y'' + y = 2x - e^{3x} + \cot g\, x.$$

Capítulo 4 *REVISÃO*

Resumimos os resultados importantes deste capítulo para equações diferenciais **lineares de segunda ordem**.

A equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

é homogênea, enquanto

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{2}$$

$g(x)$ não identicamente nula é **não-homogênea**. Na consideração de equações lineares (1) e (2), supomos que $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas em um intervalo I e que $a_2(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Sob essas hipóteses, existe uma única solução para (2) que satisfaça a **condição inicial** $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, em que x_0 é um ponto em I.

O **Wronskiano** de duas funções diferenciáveis $f_1(x)$ e $f_2(x)$ é o determinante

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Quando $W \neq 0$ em pelo menos um ponto no intervalo, as funções são **linearmente independentes** no intervalo. Se as funções são **linearmente dependentes** no intervalo, então $W = 0$ para todo x no intervalo.

Na resolução da equação homogênea (1), queremos soluções linearmente independentes. Uma condição necessária e suficiente para duas soluções y_1 e y_2 serem linearmente independentes em I é $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I. Dizemos que y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental** em I quando elas são soluções linearmente independentes de (1) no intervalo. Para quaisquer duas soluções y_1 e y_2, o **princípio de superposição** diz que a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ é também uma solução para (1). Quando y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental, a função $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é chamada de **solução geral** para (1). A **solução geral** para (2) é $y = y_c + y_p$, em que yc é a **função complementar**, ou solução geral, para (1) e y_p é qualquer **solução particular** para (2).

Para resolver (1) no caso $ay'' + by' + cy = 0$, a, b e c constantes, primeiro resolvemos a **equação auxiliar** $am^2 + bm + c = 0$. Há três formas de solução geral, dependendo das três possibilidades das raízes da equação auxiliar.

Raízes	Solução Geral
1. m_1 e m_2: reais e distintas	$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$
2. m_1 e m_2: reais mas $m_1 = m_2$	$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$
3. m_1 e m_2: complexas	
$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \text{ sen } \beta x)$

Para resolver uma equação diferencial não-homogênea, usamos ou o método dos **coeficientes indeterminados**, ou o método da **variação dos parâmetros**, para encontrar uma solução particular y_p. O primeiro procedimento limita-se a equações diferenciais $ay'' + by' + cy = g(x)$, em que a, b e c são constantes e $g(x)$ é uma constante, um polinômio, $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\text{sen}\,\beta x$, ou somas e produtos finitos dessas funções.

Capítulo 4 *EXERCÍCIOS DE REVISÃO*

As respostas dos exercícios selecionados estão na página 453.

Responda aos Problemas 1-10 sem consultar o texto. Preencha os espaços ou responda verdadeiro/falso. Em alguns casos, pode haver mais de uma resposta correta.

1. A única solução para $y'' + x^2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ é ________ .

2. Se duas funções diferenciáveis $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente independentes em um intervalo, então $W(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ para pelo menos um ponto do intervalo. ________