Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica   Prof. Juan Carlos Vila Bravo

3^{ra} Lista de exercicios de cálculo II

Curitiba, 13 de Outubro de 2010

Valores extremos de funções de duas variáveis:

1. Encontre e classifique os extremos relativos da função

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

   (c) $f(x,y) = x^3y^2(1 - x - y)$; $(x > 0,\ y > 0)$ (d) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

   (e) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$ (f) $f(x,y) = 2xy + x^3 - y^3x$

   (g) $f(x,y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$ (h) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

   (i) $f(x,y) = 2xy + x^3 - y^3x$ (j) $f(x,y) = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

2. Determine os valores de a para os quais a função:

$$f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

   (a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de minimo local;
   (b) tem exatamente dois pontos de sela e um minimo local.
   (c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um maximo local?
   (d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos criticos?

3. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x,y) = y^2 - xy - 3y + 2x$ sobre a região quadrada limitadas pelas retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$.

4. Encontre o maximo e minimo absoluto de $f(x,y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \text{sen } (x+y)$, quando os pares (x,y) estão na placa retangular $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

5. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$, na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, ; 1 \leq x \leq 3,\ \ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

6. Encontre o máximo e o minimo global de $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, na região triangular no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0,\ \ y = 0,\ \ y = 9 - x$.

7. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$, na placa triangular limitada pelas retas $x = 2,\ \ y = -2,\ \ x = y$.

8. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$ sobre a região triangular cortada do primeiro quadrante pela reta $x + y = 4$.

9. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ na região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| + |y| \leq 1\}$

10. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = 3x - y$ na região

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ y - x \leq 3,\ \ x + y \leq 4,\ \ 3x + y \leq 6\}$$

11. Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = e^{-xy}$ na região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

12. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x$ na região

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

Máximos e mínimos com restrições: Multiplicadores de Lagrange

13. Determine o retângulo de perímetro maximo, com os lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.

14. uma caixa cilindrica de base circular tem volume de 27 m^3. Se o material usado nos lados custa 2 reais o m^2 e o material usado na base inferior e superior custa 2 e 4 reais o m^2 respectivamente. Quais devem ser as dimensões do cilindro mais barato.

15. Encontre os pontos sobre a curva $\mathcal{C} : x^2 + xy + y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

16. Determinar os eixos da elipse $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$

17. Os cursos de dois rios (dentre dos limites de uma determinada região) são representada aproximadamente pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x - y - 2 = 0$. Deve-se unir esses rios por meio de uma canal retilíneo que tenha o menos comprimento possível. Por quais pontos devemos traça-lo? Qual será sua extensão

18. Mostre que a distância do ponto (x_0, y_0) à reta de equação $ax + by + c = 0$ é dada por $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

19. (Método dos mínimos quadrados) Suponhamos que você tenha feito um experimento varias vezes e obteve como resultados experimentais certas medidas de quantidades y, que varia quando alteramos a quantidade x. Suponhamos que por razões fisicas y é uma função afim de x, isto é $y = ax + b$. Devido a erros experimentais se plotarmos os resultados experimentais

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$$

observamos que eles nã estarão dispostos extamante sobre uma reta (gráfico da função afim). Assim a pergunta é: Quais são os valores de a e b tal que o gráfico de $y = ax + b$ aproxima da "melhor" forma posivel os dados experimentais? Por "melhor" entendemos os valores de a e b que minimizam a função

$$f(a,b) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

20. Um container (no formato de paralelepípedo) tem que ter um volume de $81m^3$. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do container com ese volume e custo mínimo, se o preço de construção nos lados custa 1 real o m^2 e o material usado na base e na tampa custa 2 e 4 reais respectivamente.

21. Um fazendeiro dispoe de 16 reais para construir um cercado. Dois lados (opostos) custam 1 real por metro, enquanto os otros dois lados (opostos) custam 2 reais por metro. Qual são as dimensões da maior area tectangular que ele pode cercar?

22. Encontre os pontos sobre a curva $x^2+xy+y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

23. Mostre que dentre todos os paralelogramos de perímetro constante igual à $4mts$ o quadrado é aquele que fecha a maior área possivel.

24. Encontre as dimensões do retângulo de maior perimetro que pode ser inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é esse perímetro.?

25. Tanque de armazenamento mais barato: Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha 8.000 m^3 de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica que você recomendaria para o tanque?.

26. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construida de modo sua área seja 36 mts^2.

27. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio a. Qual é essa área?

28. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

29. Encontre as dimensões da lata cilíndrica circular reta fechada de menor área cujo volume é $16\pi \text{cm}^3$.

30. Encontre o ponto sobre a superficie $z = xy + 1$ mais proximo da origem.

31. Encontre os pontos sobre a superfície $z^2 = xy + 4$ mais próximos da origem.

32. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

33. Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tem três faces nos planos coordenados e um vértice no plano $2x + 3y + 4z = 12$.

34. Sua empresa está desenvolvendo caixas de papelão grosso para exportar pipocas. As arestas da embalagem presisam ser reforçados com arame. O custo do arame é de 3 *reais* o metro e o custo do papelão é de 1 *real* o metro quadrado, mas a tampa da caixa deve ser feita com um tipo diferente de papelão, que custa 2 *reias* o metro quadrado. Use o método dos multiplicadores de lagrange para encontrar as dimensões da embalagem de modo que ela possa conter 6 m^3 de pipocas etal que o custo da embalagem seja mínimo.

35. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construida com $27cm^2$ de papelão.

36. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante um tetraedro de menor volume.

37. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor maximo de

$$\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta + \text{sen}\ \gamma$$