Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

4^{ta} Lista de exercicios de cálculo II
Curitiba, 13 de Outubro de 2010

Integrais Duplas:

1. Calcule $\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$, se:

   (a)$f(x,y) = x^2y^3$ e $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$

   (b)$f(x,y) = x^2 + 4y$ e $\mathcal{R} = [0,2] \times [0,3]$

   (c)$f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2+1}$ e $\mathcal{R} = [-1,1] \times [-1,1]$

   (d)$f(x,y) = e^{xy}(x^2 + y^2)$ e $\mathcal{R} = [-1,3] \times [-2,1]$

2. Calcule o volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $z = f(x,y)$ e inferiormente pelo retângulo dado:

   (a)$f(x,y) = 2x + 3y + 6$ e $\mathcal{R} = [-1,2] \times [2,3]$

   (b)$f(x,y) = y^2 - x^2$ e $\mathcal{R} = [-1,1] \times [1,3]$

   (c)$f(x,y) = \sqrt{9-y^2}$ e $\mathcal{R} = [0,4] \times [0,2]$

   (d)$f(x,y) = \cos(2x) + \text{sen }(2y)$ e $\mathcal{R} = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$

   (e)$f(x,y) = x\text{sen } y$ e $\mathcal{R} = [0,\pi] \times [0,\pi]$

3. Calcule as seguintes integrais mudando a ordem de integração:

   (a) $\int_0^1 \Big(\int_x^1 \frac{\text{sen } y}{y} dy\Big)dx$

   (b) $\int_0^1 \Big(\int_y^1 \text{sen } (x^2)dx\Big)dy$

   (c) $\int_0^2 \Big(\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\ \ dy\Big)dx$

   (d) $\int_0^2 \Big(\int_x^2 e^{-y^2}\ \ dy\Big)dx$

   (e) $\int_0^2 \Big(\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\text{sen } x\ \ dx\Big)dy$

   (f) $\int_0^3 \Big(\int_9^{y^2} y\cos(x^2)dx\Big)dy$

4. Calcule as seguintes integrais sabendo que $\mathcal{R}$ é limitada pelas curvas dadas

(a) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} y dxdy$ $\qquad y = 2x^2 - 2, \ \ y = x^2 + x$

(b) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} xy dxdy$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ x = 0, \ y = 0$ com $x \geq 0, \ y \geq 0$

(c) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} x dxdy$ $\qquad x = y^2, \ \ x = 1$

(d) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} x\cos(y) dxdy$ $\qquad y = 0, \ \ y = x^2$ e $x = 1$

(e) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} (y^2 - x) dxdy$ $\qquad y^2 = x, \ \ x = 3 - 2y^2$

5. Determine o volume dos seguintes sólidos:

(a) Limitado superiormente por $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pela região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

(b) Limitado superiormente por $z = 3x^2 + y^2$ e inferiormente pela região limitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$.

(c) Limitado por $y^2 + z^2 = 4, \ x = 2y, \ x = 0, \ z = 0$, no primeiro octante.

(d) Limitado por $z = x^2 + y^2 + 4, \ x = 0, \ y = 0, z = 0$ e $x + y = 1$.

(e) Limitado por $x^2 + y^2 = 1, \ y = z, \ x = 0$ e $z = 0$ no primeiro octante.

6. Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas

(a) $y = x^{3/2}, \ \ y = x$

(b) $2x - 3y = 0, \ \ x + y = 5, \ \ y = 0$

(b) $xy = 9, \ \ y = x, \ \ y = 0, \ \ x = 9$

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(d) $y = 4 - x^2, \ \ y = x^2 - 14$

(e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \ x = 0, \ \ y = 0$

7. Use uma integral dupla em coordenadas polares para encontrar o volume do sólido limitado pelos gráficos das equações dadas.

(a) $z = xy, \ \ x^2 + y^2 = 1$(primeiro octante)

(b) $z = x^2 + y^2 + 1, \ \ z = 0, \ \ x^2 + y^2 = 4.$

(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ z = 0, \ \ x^2 + y^2 = 25$

(d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ z = 0, \ \ x^2 + y^2 \geq 4, \ \ x^2 + y^2 \leq 16$

(e) Encontre a de modo que o volume dentro do hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ seja a metade do volumedo hemisfério.

8. Determine o centro de massa da lãmina plana $\mathcal{R}$, no plano xy e densidade $f(x, y)$.

(a)$\mathcal{R}$ é limitado por $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro quadrante e $f(x, y) = xy$.

(b)$\mathcal{R}$ é limitado por $y = x$ e $y = x^2$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Integrais Triplas:

9. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2\, dx\, dy\, dz$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dz\, dy\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^\pi \int_0^{1-x} x^2 \text{sen }(y)\, dz\, dx\, dy$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^{1/y} \text{sen }(y)\, dz\, dx\, dy$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^1 \int_0^x \int_0^y x^2 z^4\, dz\, dx\, dy$

10. Considere o sólido limitado por $x + y + z = 3$, $x + y - z = 3$ e os planos coordenado. Calcule o volume do sólido, fazendo:

(a) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dz \Big) dy \Big) dx$ (b) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dx \Big) dy \Big) dz$

(c) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dy \Big) dx \Big) dz$ (d) $\displaystyle\int \Big(\int \Big(\int dx \Big) dz \Big) dy$

11. Faça a mudança de variável necessária para calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x\, dz\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} x\, dz\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

12. Calcule as seguintes integrais sabendo que $\mathcal{S}$ é um sólido limitado pelas superfícies dadas

(a) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} x\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ e pelos parabolóide $z = x^2 + y^2$.

(b) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} x\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelo parabolóide $x = 4z^2 + 4y^2$ e pelo plano $x = 4$.

(c) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} 6xy\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ está acima da região plana limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 1$ e abaixo do plano $z = 1 + x + y$.

(d) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} xy\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é o tetraedro de vértices $(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

13. Determine o volume dos sólidos $\mathcal{S}$ descritos abaixo:

(a) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

(b) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.

(c) $\mathcal{S}$ é limitado pelas superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$.

(d) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cilindro $y = \cos(x)$ e pelos planos $z = y,\ x = 0,\ x = \pi/2$ e $z = 0$.

(e) $\mathcal{S}$ é limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = y$, esta situado no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e $z \geq 0$.

(f) $\mathcal{S}$ é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 - \sqrt{x^2+y^2} = x$ e pelo plano $z = 0$.

(g) $\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \geq 1,\ x + y + z \leq 7,\ x \geq y^2\ \}$

(h) $\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ \text{ e }\ z^2 \leq x^2 + y^2\ \}$

(i) $\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ \text{ e }\ x^2 + y^2 \leq 2y\ \}$

(j) $\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 4,\ \ x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 \leq 2\ \text{ e }\ z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$.

14. Calcule as seguintes integrais triplas abaixo, usando uma mudança de variáveis conveniente

(a) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = 4$ e $z = 5$.

(b) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} z\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1/4\}$

(c) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{z^2}\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(d) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{S}} xyz\, dx\, dy\, dz$, onde $\mathcal{S} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$