Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

2^{da} prova de cálculo III

Curitiba, 06 Maio de 2015

1. Encontre a solução geral para as seguintes equações homogeneas:
   (i) $y^{(iv)} - 3y''' + y'' - 3y' = 0$
   (ii) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

2. Determine a forma apropriada da solução particular y_p para se utilizar o método dos coeficientes indeterminados. Não calcule as constantes.
   (i) $y'' - 2y' + y = x^2e^x$
   (ii) $y''' - 5y'' + 6y' = 8 + xe^{2x} + 2\,\text{sen}\,x$

3. Resolva a equação diferencial dada pelo método dos **coeficientes indeterminados:**

$$y''' - 8y = e^{2x}$$

4. Resolva a equação diferencial dada pelo método de **variação do parametro:**

$$2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$$

5. Encontrar a solução geral da equação:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln(x^2)$$

BOA SORTE !

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

Nota: 100

Disciplina: Cálculo III

Curso: Química

Professor: EU

Aluno: EU

Turma:

Data: 06 / 05 / 2015

$\boxed{1}$ Solução geral ?

i) $y^{(iv)} - 3y''' + y'' - 3y' = 0$

Eq. Característica : $r^4 - 3r^3 + r^2 - 3r = 0$

$r^3(r-3) + r(r-3) = 0$

$(r^3 + r)(r-3) = 0$

$r(r^2+1)(r-3)$

Raízes : $r_1 = 0$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, $r_4 = 3$

Conjunto Fundamental $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, e^{3x}\}$

Solução geral $\boxed{y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 e^{3x}}$

ii) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ "Cauchy. Euler"

Procuramos solução na forma $y = x^r$

Substituindo, obtem-se:

$r(r-1)(r-2)x^r - 3r(r-1)x^r + 6rx^r - 6x^r = 0$

$[r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6r - 6]\, x^r = 0$

Equação Característica $\Rightarrow$ $r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6r - 6 = 0$

$r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6(r-1) = 0$

$(r-1)[r(r-2) - 3r + 6] = 0$

$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$

$(r-1)(r-2)(r-3) = 0$

Raízes : $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$

Conjunto fundamental : $\{x, x^2, x^3\}$

Solução geral $\boxed{y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.}$

iu-341

2

(i) $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$

Eq. característica : $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$

Raízes

$r_1 = r_2 = 1 \Longrightarrow$ Conj. Fund. $= \{ e^x, \, x e^x \}$

$g(x) = x^2 e^x \Longrightarrow y_p = (Ax^2 + Bx + C) e^x$

tem elementos no C.F.

$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx) e^x$

tem elementos no C.F.

$\therefore \; y_p(x) = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) e^x$

também tem elementos no C.F.

$$\boxed{\text{Rpta: } y_p(x) = (Ax^5 + Bx^4 + Cx^2) e^x}$$

(ii) $y''' - 5y'' + 6y' = 8 + x e^{2x} + 2 \operatorname{sen} x$

Eq. Característica:

$r^3 - 5r^2 + 6r = 0$

$r(r^2 - 5r + 6) = 0$

$r(r-2)(r-3) = 0$

$\Longrightarrow$ Conjunto fundamental $\{ 1, e^{2x}, e^{3x} \}$

Escolha da Solução particular:

$g_1(x) = 8 \longrightarrow y_{p_1} = Ax$

$g_2(x) = x e^{2x} \longrightarrow y_{p_2} = (Bx^2 + Cx) e^{2x}$

$g_3(x) = 2 \operatorname{sen} x \longrightarrow y_{p_3} = D \cos x + E \operatorname{sen} x$

Rpta: $y_p(x) = Ax + (Bx^2 + Cx) e^{2x} + D \cos x + E \operatorname{sen} x.$

3 Solução geral da Equação $y''' - 8y = e^{2x}$

Eq. característica $r^3 - 8 = 0$

$(r-2)(r^2 + 2r + 4) = 0$

Raízes: $r_1 = 2$, $r_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$, $r_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$

Conjunto fundamental $\left\{ e^{2x},\ e^{-x}\cos(\sqrt{3}x),\ e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) \right\}$

Escolha da Solução particular (y_P)

$$g(x) = e^{2x} \longrightarrow y_P(x) = Axe^{2x}$$

Cálculo de A. ?

$$y_P = Axe^{2x}$$
$$y_P' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$
$$y_P'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$
$$y_P''' = 8Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + 8Axe^{2x} = 12Ae^{2x} + 8Axe^{2x}$$

Sustituindo na Eq. Não-Homogenea.

$$\left(12Ae^{2x} + 8Axe^{2x}\right) - 8\left(Axe^{2x}\right) = e^{2x}$$
$$12A = 1$$
$$A = \frac{1}{12}$$

∴ A solução geral é $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + C_3e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + \frac{x}{12}e^{2X}$

$\boxed{4}$ $$2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$$

Eq. Caracteristica: $2r^2 + 2r + 1 = 0$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$r = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Conj. Fundamental: $\left\{ e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right),\ e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$

Solução particular:

$$y_P(x) = u_1(x)\,y_1 + u_2(x)\,y_2$$

Onde $u_1' = \frac{W_1}{W}$ e $u_2' = \frac{W_2}{W}$.

$$W = \begin{Vmatrix} e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) & -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{Vmatrix}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}e^{-x}}$$

$$W_1 = \begin{Vmatrix} 0 & e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \\ 2\sqrt{x} & * \end{Vmatrix}$$

$$= -2\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boxed{u_1'(x) = -4\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$W_2 = \begin{Vmatrix} e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) & 2\sqrt{x} \end{Vmatrix}$$

$$W_2 = 2\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boxed{u_2'(x) = 4\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right).}$$

$$u_1(x) = -4\int \sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx, \quad u_2(x) = 4\int \sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx.$$

Solução geral

$$y = c_1 e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + u_1(x)\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + u_2(x)\,e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\boxed{5}$ $$x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln(x^2)$$

Eq. característica

$$r(r-1) - 4r + 6 = 0$$
$$r^2 - r - 4r + 6 = 0$$
$$r^2 - 5r + 6 = 0$$
$$(r-2)(r-3) = 0$$

$$\mathcal{C}F: \{x^2, x^3\} \Rightarrow \boxed{y_h = c_1x^2 + c_2x^3}$$

Solução particular

$$y_p(x) = u_1(x)\,x^2 + u_2(x)\,x^3$$

Onde $u_1'(x) = \dfrac{W_1}{W}$ e $u_2'(x) = \dfrac{W_2}{W}$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ \frac{\ln(x^2)}{x^2} & 3x^2 \end{vmatrix} = -x\ln(x^2)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{\ln(x^2)}{x^2} \end{vmatrix} = \ln(x^2)$$

$$u_1'(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^3} \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{\ln(x^2)}{x^3}\,dx$$

$$u_2'(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^4} \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{\ln(x^2)}{x^4}\,dx.$$