Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

2^{da} prova de Álgebra Linear ("Uma ponte para o futuro")

Curitiba, 12 de Maio de 2016

1. Seja $B = \{u, v, w\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, onde $u = (1, 0, 0),\ v = (1, 1, 0)$ e $w = (1, 1, 1)$.

   (i) Ache uma fórmula para a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:
   $$T(u) = (1, 0),\ T(v) = (1, 0) \quad \text{e} \quad T(w) = (0, 1)$$
   (ii) Encontre uma base e a dimensão do $N(T)$.

   (iii) Encontre uma base e a dimensão da $Im(T)$.

2. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (4x - y + 2z, x - y - z)$.

   (i) Considerando $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(1, 0), (1, -1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$, encontre $\Big[T\Big]_B^A$

   (ii) Usando a matriz $\Big[T\Big]_B^A$ da questão $2(i)$, encontre as coordenadas $\Big[T(u)\Big]_B$ sabendo que as coordenadas de u em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ são $(1, -2, 1)$.

3. Ache uma base ortogonal para o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 2, 2),\ w = (1, 2, -3, -4)$.

4. Considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0\ \}$ com o produto interno $\langle (x, y, z), (w, t, r) \rangle = 2xw + 3yt + zr$. Determine $S^{\perp}$, uma base e sua dimensão.

5. Seja o operador $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

   (i) Ache todos os autovalores e uma base de cada autoespaço do operador T.

   (ii) Existe uma base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalize o operador T ? Por quê?