Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Prova Final de cálculo III

Curitiba, 18 Outubro de 2012

1. Encontre a solução geral para a seguinte equação diferencial linear de 2^{da} ordem, usando o método dos coeficientes indeterminados:

$$y'' - 2y' + 3y = -3x^2$$

2. Resolva a equação diferencial linear de 2^{da} ordem dada, usando o método de variação de parametros:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\sqrt{x}$$

3. Resolva a equação diferencial de Cauchy-euler dada, usando o método de variação de parametros:

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = x^3$$

4. Encontre a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{3\,e^{-2s}}{s^2 + s - 2}$$

5. Resolver seguinte problema de valor inicial(pvi):

$$(pvi)\ \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \mathcal{U}(t-2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'' - 2y' + 3y = -3x^2$$

$$r^2 - 2r + 3 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(3)}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$r_1 = 1 + \sqrt{2}\,i$$
$$r_2 = 1 - \sqrt{2}\,i$$

$\Rightarrow$ Conjunto Fundamental:

$$\left\{ e^{x}\cos(\sqrt{2}x) \,,\; e^{x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) \right\}$$

Solução Equação Homogenea: (y_h)

$$\boxed{y_h = c_1 e^{x}\cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)}$$

Solução Particular pelo Método dos Coeficientes Indeterminados:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$
$$y_p' = 2Ax + B$$
$$y_p'' = 2A$$

$\Rightarrow$

$$(2A) - 2(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = -3x^2$$

$$(3A)x^2 + (-4A + 3B)x + (2A - 2B + 3C) = -3x^2$$

$$\begin{cases} 3A = -3 & \longrightarrow A = -1 \\ -4A + 3B = 0 & \longrightarrow B = -\frac{4}{3} \\ 2A - 2B + 3C = 0 & \longrightarrow C = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\boxed{y_p = -x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{2}{9}}$$

Solução geral: $y = c_1 e^{x}\cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{x}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) - x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}$ .... ■

2 $y'' + 2y' + y = \sqrt{x}\, e^{-x}$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$
$$(r+1)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $r_1 = -1$, $r_2 = -1$ $\Rightarrow$

Conjunto fundamental:

$$\left\{ e^{-x} \,,\; x e^{-x} \right\}$$

Solução Homogenea.

$$\boxed{y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}$$

Solução Particular pelo Método de Variação de Parametros:

$$y_p = c_1(x)\, e^{-x} + c_2(x)\, x e^{-x}$$

onde:

$$c_1'(x) = \frac{W_1}{W} \quad e \quad c_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x} - x e^{-2x} + x e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ \sqrt{x}\, e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = -x\sqrt{x}\, e^{-2x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \sqrt{x}\, e^{-x} \end{vmatrix} = \sqrt{x}\, e^{-2x}$$

$$C_1(x) = -\int x^{3/2}\, dx \quad , \quad C_2(x) = \int x^{1/2}\, dx$$

$$C_1(x) = -\frac{2}{5} x^{5/2} \quad , \quad C_2(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$\therefore \quad y_p(x) = -\frac{2}{5} x^{5/2} e^{-x} + \frac{2}{3} x^{3/2} x e^{-x}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) x^{5/2} e^{-x}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{4}{15} x^{5/2} e^{-x}}$$

Solução geral

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{4}{15} x^{5/2} e^{-x}} \quad \blacksquare$$

$\boxed{3}$ $\quad x^2 y'' - 3x y' + 3y = x^3$

$$y = x^r \qquad x^2 r(r-1) x^{r-2} - 3x r x^{r-1} + 3x^r = 0$$

$$y' = r x^{r-1} \quad \Rightarrow \quad (r^2 - r - 3r + 3)\, x^r = 0$$

$$y'' = r(r-1) x^{r-2}$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$(r-3)(r-1) = 0$$

$$r_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad C.F: \{x^3, x^1\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_h = c_1 x^3 + c_2 x}$$

$$r_2 = 1$$

olução particular (y_p)

$$y_p(x) = c_1(x)\, x^3 + c_2(x)\, x$$

Onde
$$c_1'(x) = \frac{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} x^3 & x \\ 3x^2 & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{-x^2}{-2x^3} = \frac{1}{2x} \Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\boxed{c_1(x) = \ln\sqrt{x}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{Vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & x \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} x^3 & x \\ 3x^2 & 1 \end{Vmatrix}} = \frac{x^4}{-2x^3} = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{c_2(x) = -\frac{1}{4}x^2}$$

$$y_p(x) = \ln\sqrt{x}\; x^3 - \frac{1}{4}x^2(x)$$

Solução Geral:

$$\boxed{y = c_1 x^3 + c_2 x + x^3 \ln\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^3}$$ ■

$\boxed{4}$
$$F(s) = \frac{3e^{-2s}}{s^2+s-2}$$

$$= e^{-2s}\left(\frac{3}{s^2+s-2}\right)$$

$$= e^{-2s}\, G(s)$$

Usar (27)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-2s} G(s)]$$

$$= \mathcal{U}(t-2)\, g(t-2)$$

Onde $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$

$$G(s) = \frac{3}{s^2+s-2}$$

$$= \frac{3}{(s+2)(s-1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{t} - e^{-2t}$$

$$g(t) = e^{t} - e^{-2t}$$

$$g(t-2) = e^{t-2} - e^{-2(t-2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3e^{-2s}}{s^2+s-2}\right\} = \left(e^{t-2} - e^{-2(t-2)}\right)\mathcal{U}(t-2)$$

$$\mathcal{L}\left\{\begin{array}{l} y'' + 3y' + 2y = \mathcal{U}(t-2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\left(s^2Y(s) - s\overset{0}{y(0)} - \overset{1}{y'(0)}\right) + 3\left(sY(s) - \overset{0}{y(0)}\right) + 2Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\left(s^2 + 3s + 2\right)Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + 1$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\underbrace{\frac{1}{s(s+2)(s+1)}}_{F(s)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$A = ?$

$B = ?$

$C = ?$

$$\frac{1}{s(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

$$y(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right) + C\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s+1}\right) + e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\boxed{y(t) = A\,\mathcal{U}(t-2) + B\,\mathcal{U}(t-2)\,e^{-2(t-2)} + C\,\mathcal{U}(t-2)\,e^{-(t-2)} + e^{-t} - e^{-2t}}$$ ■