

Capítulo 1

SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Neste capítulo apresentaremos apenas o essencial sobre sequências e séries, o mínimo, para estudar as soluções analíticas de Equações Diferenciais Ordinárias (**EDO**), as convergências das séries de Fourier e a validade das soluções das Equações Diferenciais Parciais (**EDP**) que estudaremos. Às pessoas interessadas nas demonstrações ou que desejem aprofundar-se nos assuntos deste capítulo, indicamos [LE] na bibliografia.

1.1 Sequências Numéricas

Denotemos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função:*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

As notações clássicas para sequências são: $f(n) = a_n$, o termo geral da sequência. A sequência é denotada por:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Não confundir a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ que é o conjunto-imagem da função que define a sequência.

Exemplo 1.1.

[1] $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$; o conjunto-imagem é $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$.

[2] $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}, \dots)$; o conjunto-imagem é $\{\sqrt{n} / n \in \mathbb{N}\}$.

[3] $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots)$; o conjunto-imagem é $\{-1, 1\}$.

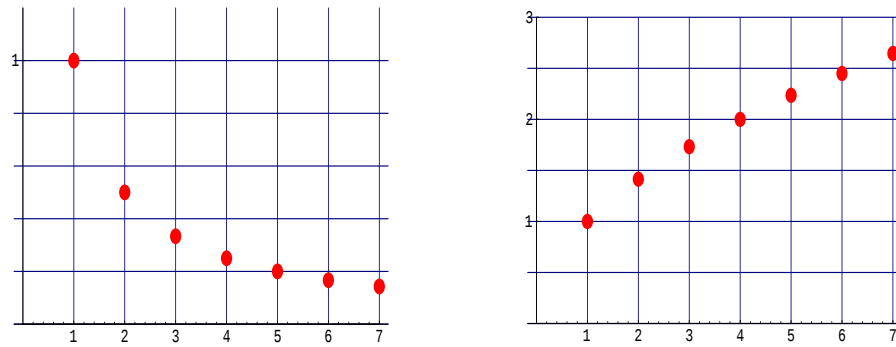


Figura 1.1: Gráficos das sequências $\left(\frac{1}{n}\right)$ e $(\sqrt{n})$

Definição 1.2. Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao número real L quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Se a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L , denotamos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L;$$

o número L é dito o limite da sequência.

Uma sequência é dita divergente se não converge. Logo, a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge quando, para nenhum número real L , se tem $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$, ou seja, se existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n > n_0$ tal que $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

Exemplo 1.2.

[1] A sequência $(n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots, n, \dots)$, claramente, diverge. Pois:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n$$

não existe.

[2] A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ devemos determinar um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \implies \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{desde que} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Como ε^{-1} pode não ser um número natural, escolhemos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, para todo $n > n_0$, temos: $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

[3] A sequência constante $(k)_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{R}$ converge para k . Logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k = k.$$

Proposição 1.1.

1. Se uma sequência converge para L e para M , então, $L = M$. Isto é, se o limite de uma sequência existe, é único.
2. Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, então, $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. A recíproca é falsa. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 1.3.

A sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, pois, seus termos oscilam entre $+1$ e -1 ; logo, a sequência não tem limite.

Por outro lado, a sequência $(|(-1)^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Definição 1.3. Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|a_n| \leq k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, é dita ilimitada.

Proposição 1.2. Se a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, então, é limitada.

Exemplo 1.4.

[1] A sequência $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, pois é ilimitada.

[2] A sequência $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, pois é ilimitada.

[3] A sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e diverge. Logo, a recíproca da propriedade anterior não vale.

Proposição 1.3. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > n_0$ e:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L,$$

então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L.$$

Exemplo 1.5.

Estudemos a convergência da sequência :

$$\left(\frac{\cos(n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

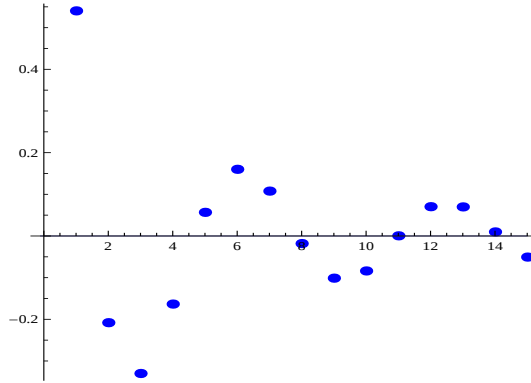


Figura 1.2: Gráfico dos 15 primeiros termos da sequência.

Como:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n},$$

pela propriedade anterior:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

Proposição 1.4. Se as sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem a L e M , respectivamente, então:

1. Se α e $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\alpha a_n + \beta b_n] = \alpha L + \beta M.$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} [a_n \cdot b_n] = L \cdot M.$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M},$ se $M \neq 0.$

Exemplo 1.6.

Considere as sequências $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\left(2 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right] = \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \right] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \right] = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 2.$$

Pela propriedade anterior:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{5}{n^2} + \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] = 5 \cdot 0 + 2 = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{5}{n^2} \right] \cdot \left[2 + \frac{1}{n} \right] = 5 \cdot 0 \cdot 2 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0. \quad \text{Por que?}$$

Proposição 1.5. *Seja a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1,$$

então, a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero.

Exemplo 1.7.

Estude a convergência das seguintes sequências :

[1] $\left(\frac{k^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $k > 1$. Como:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n+1} = 0 < 1,$$

a sequência converge para zero.

[2] $\left(\frac{n^k}{k^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $k > 1$. Como:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \left[1 + \frac{1}{n} \right]^k = \frac{1}{k} < 1,$$

a sequência converge para zero.

Proposição 1.6. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{N} \subset A$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Se $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, então:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L.$$

Exemplo 1.8.

Estude a convergência da sequência :

$$\left(\ln(\sqrt[n]{n}) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Note que $\ln(\sqrt[n]{n}) = \frac{\ln(n)}{n}$, então consideremos $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida em $A = (0, +\infty)$; então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

onde na última igualdade aplicamos o teorema de l'Hôpital; logo, a sequência converge para zero.

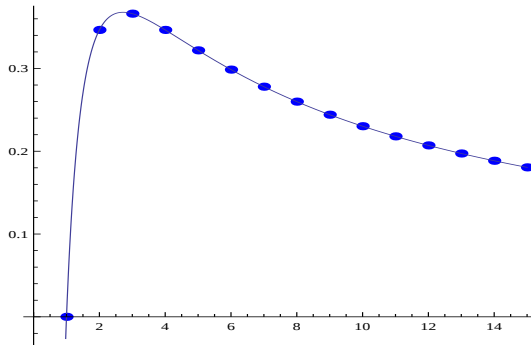


Figura 1.3: Gráfico de $f(x)$ e $f(n) = a_n$.

1.2 Séries Numéricas

Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e construamos a partir desta sequência, a seguinte nova sequência :

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao número S , escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S. \quad (1.1)$$

A expressão (1.1) é dita a **série infinita com termo geral** a_n .

Dizemos que a série (1.1), converge para S ; caso contrário, ou seja, se a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é divergente, a série é dita divergente.

O número S é dito a soma da série (1.1) e a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita sequência das somas parciais ou reduzidas da série.

Exemplo 1.9.

[1] Para $r \in \mathbb{R}$, estude a convergência da série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

Temos:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} \quad (1)$$

$$r S_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n \quad (2).$$

Fazendo (1)-(2), temos: $(1 - r) S_n = 1 - r^n$; logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - r^n}{1 - r} \right] = \frac{1}{1 - r}, \quad \text{se } |r| < 1.$$

Se $|r| \geq 1$ a série diverge. Esta série é chamada **geométrica**.

[2] Estude a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Note que podemos reescrever:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

logo, suas somas parciais são:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] = 1;$$

então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

[3] Estude a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Note que podemos reescrever:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

logo, suas somas parciais são $S_n = \sqrt{n+1} - 1$, e:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n+1} - 1],$$

o qual não existe; logo, a série diverge.

[4] Determine o termo geral da série: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e estude sua convergência, se:

$$S_n = \frac{2n+3}{n+4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que $a_1 = S_1 = 1$, e:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+3)(n+4)},$$

se $n \geq 2$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+3)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n+4} = 2.$$

A seguir apresentaremos alguns testes para decidir se uma série converge.

1.2.1 Testes de Convergência

Teste 1. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

O teste 1 é utilizado para provar que uma série é divergente, ou seja:

$$\text{Se } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0, \text{ então, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Exemplo 1.10.

[1] Estude a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} \dots$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, o teste é inconclusivo!

[2] Estude a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Como:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

a série diverge.

Teste 2 (de Comparação). Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tal que $0 \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é uma série convergente tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é uma série divergente tal que $0 \leq c_n \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Exemplo 1.11.

Estude a convergência da série: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n 3^{n+1}}$.

Note que:

$$a_n = \frac{1}{n 3^{n+1}} \leq \frac{1}{3^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ é uma série geométrica de razão $1/3$. Logo, a série converge.

Proposição 1.7. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são séries convergentes, então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha a_n + \beta b_n] = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.12.

Discuta a convergência da série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}.$$

Observamos que não podemos separar esta série em duas, pois **não sabemos se cada uma delas converge**. Por outro lado:

$$\frac{3^n - 2^n}{6^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}.$$

As séries geométricas: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ são convergentes e:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

Pela propriedade anterior:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Nem sempre é possível achar a soma de uma série; nós estamos apenas interessados em decidir se uma série converge ou diverge.

Considere a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = \frac{1}{n^2}$ e $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x^2}$; logo, $f(n) = g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

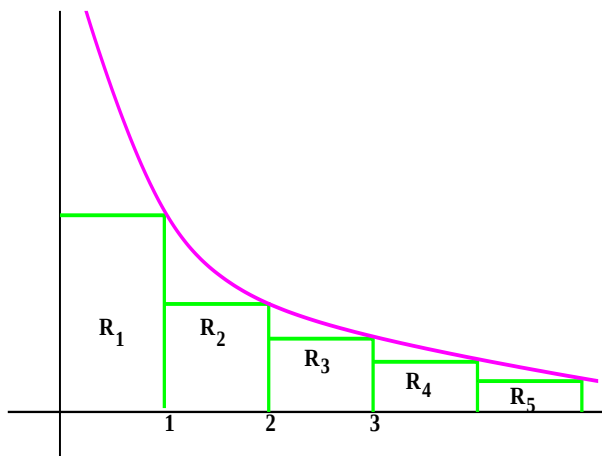


Figura 1.4: Gráfico de g .

Note que as áreas dos retângulos R_i são $A(R_1) = 1$, $A(R_2) = \frac{1}{2^2}$, em geral :

$$A(R_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Se tiramos o retângulo R_1 a soma das áreas dos retângulos restantes será menor que a área sob a o gráfico de g ; logo:

$$S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isto motiva o seguinte Teste:

Teste 3. Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, decrescente e positiva tal que $f(n) = a_n$. Temos:

1. Se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

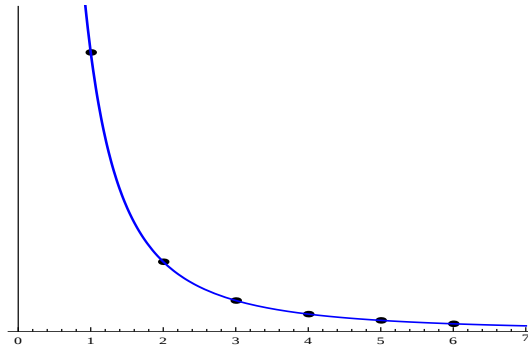


Figura 1.5: Gráficos de $f(x)$ e $f(n) = a_n$.

Exemplo 1.13.

Estude a convergência das seguintes séries:

[1] Seja $\alpha > 0$, e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

Consideremos $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; f é contínua, decrescente e positiva e $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$. Se $\alpha \neq 0$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha};$$

logo, se $\alpha > 1$ a integral converge; se $\alpha < 1$ a integral diverge. Segue de imediato, que a integral também diverge se $\alpha = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Então, por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{diverge}.$$

Em geral, fazendo $k = n + l$, onde $l \in \mathbb{R}$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+l)^{\alpha}} = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Então, por exemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)} & \quad \text{diverge}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)^2} & \quad \text{converge}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+8}} & \quad \text{diverge}. \end{aligned}$$

$$[2] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Consideremos $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; f é contínua, decrescente e positiva e $f(n) = \frac{\ln(n)}{n}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(b))^2}{2};$$

logo, a integral diverge. Portanto, a série diverge.

Teste 4. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

1. Se $L < 1$, a série converge.
2. Se $L > 1$, a série diverge.
3. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Exemplo 1.14.

Estude a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n n!}{n^n}, \quad k > 0.$$

Note que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \left[\frac{n}{n+1} \right]^n$; então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} k \left[\frac{n}{n+1} \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} k \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]^n = \frac{k}{e}.$$

Se $\frac{k}{e} < 1$, isto é, $k < e$, a série converge.

Se $\frac{k}{e} > 1$, isto é, $k > e$, a série diverge.

1.2.2 Séries Alternadas

Definição 1.4. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é dita alternada se $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ para todo $n \geq 1$, ou seja, se é do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Teste 5. Seja a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ tal que:

1. $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ e
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Então, a série alternada converge.

Exemplo 1.15.

A série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

De fato, $a_n = \frac{1}{n}$; como $n < n+1$, então, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Definição 1.5. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é dita condicionalmente convergente.

Exemplo 1.16.

[1]. A série: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge condicionalmente.

[2] A série: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente.

Teste 6. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$; então, se:

1. $L < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

2. $L > 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplo 1.17.

Estude a convergência da série: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{n+1} \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]^n = \frac{1}{e} < 1;$$

logo, a série converge absolutamente.

1.3 Sequências de Funções

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathfrak{F}(A, \mathbb{R}) = \{f / f : A \longrightarrow \mathbb{R}\}$ o conjunto das funções reais definidas sobre A .

Definição 1.6. Uma sequência de funções é uma correspondência que associa a cada número natural uma única função:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{F}(A, \mathbb{R}),$$

que denotamos por $f(n) = f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

A sequência de funções é denotada por: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para todo $x \in A$, a sequência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência numérica.

Exemplo 1.18.

[1] Seja $A = [0, 1]$ e $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x^2, x^3, \dots)$.

[2] Seja $A = [0, +\infty)$ e $(\sqrt{n}x)_{n \in \mathbb{N}} = (\sqrt{x}, \sqrt{2x}, \dots, \sqrt{nx}, \dots)$.

Definição 1.7. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, converge pontualmente ou, simplesmente para a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se para todo $x \in A$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

O número $n_0 = n(\varepsilon, x_0)$, depende tanto de ε como do ponto x_0 . Uma sequência de funções é dita divergente se não converge. Se a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f , para todo $x \in A$ fixado, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x);$$

$f(x)$ é dito o limite pontual da sequência.

Exemplo 1.19.

[1] Seja $A = [0, 1]$. A sequência $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, x, x^2, x^3, \dots)$ converge pontualmente para a função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

[2] Seja $A = \mathbb{R}$. A sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$ converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} = 0.$$

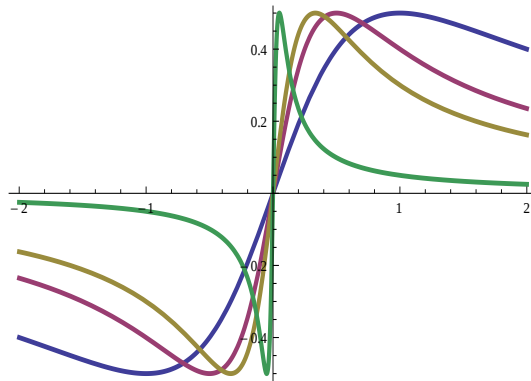


Figura 1.6: Gráficos de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_{20}(x)$.

[3] Seja $A = \mathbb{R}$. A sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{x}{n}\right]^n = e^x.$$

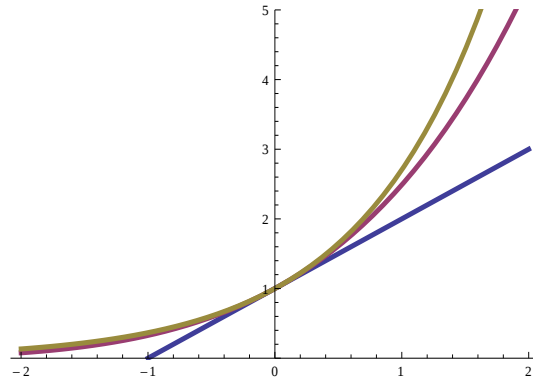


Figura 1.7: Gráficos de $f_1(x)$, $f_5(x)$, $f_{15}(x)$ e $f_{100}(x)$.

Dada uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em que cada f_n seja contínua em A e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convirja pontualmente a uma função f , nada nos garante que f seja contínua.

De fato, no primeiro exemplo, as $f_n(x) = x^n$ são contínuas em $[0, 1]$ mas convergem pontualmente para uma função descontínua. Vejamos outro exemplo:

Exemplo 1.20.

Seja $A = [0, 1]$ e:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ em $[0, 1]$, mas:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} (n - n^2 x) dx = \frac{1}{2}.$$

Como $\int_0^1 0 dx = 0$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] dx.$$

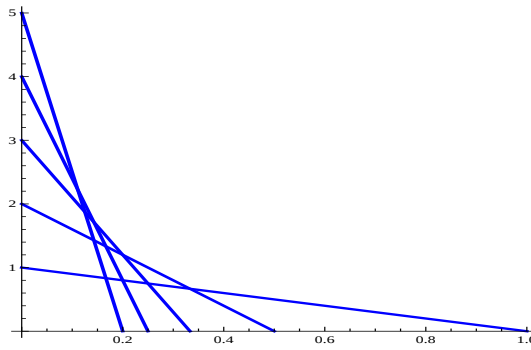


Figura 1.8: Gráfico de $f_i(x)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Os exemplos apresentados indicam que a convergência pontual de uma sequência de funções não é suficiente para preservar as propriedades das funções que formam a sequência; daí a necessidade da seguinte definição:

Definição 1.8. *Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ seja qual for $x \in A$.*

O número $n_0 = n(\varepsilon)$, depende somente de ε .

Em geral, provar que uma sequência de funções converge uniformemente é bastante complicado.

Uma possível interpretação da continuidade uniforme é a seguinte: Fixada uma faixa de largura 2ε em torno do gráfico de f , a partir de um certo n_0 , os gráficos das funções f_n ficam dentro desta faixa.

Claramente, se uma sequência de funções converge uniformemente para f , converge pontualmente para f . A recíproca é falsa. Veja o primeiro exemplo.

A seguinte proposição é útil para verificar se uma sequência converge uniformemente.

Proposição 1.8. *Seja a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$. Se existe uma sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para zero e $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ para todo $x \in A$, então a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f .*

Exemplo 1.21.

A sequência $\left(\frac{\cos(nx)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero. Observe que:

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n};$$

como a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, a sequência de funções converge uniformemente para zero.

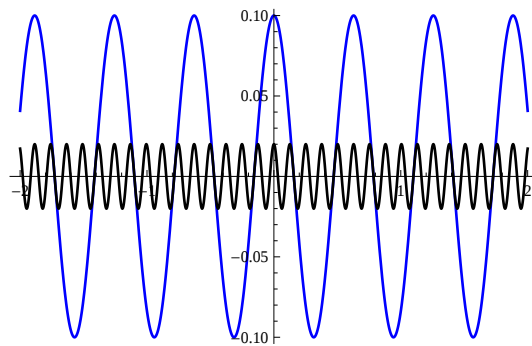


Figura 1.9: Gráfico de $f_{10}(x)$ e $f_{50}(x)$.

Teorema 1.1. *Seja a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para f .*

1. *Se as f_n são contínuas em A , então f é contínua em A e:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

2. *Se as f_n são integráveis em A , então f é integrável em A e:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] dx = \int_a^b f(x) dx,$$

se $[a, b] \subset A$.

Exemplo 1.22.

Considere a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Claramente a sequência converge uniformemente para a função $f(x) = 0$. Suponhamos que podemos derivar em x a sequência; isto é $f'_n(x) = \cos(nx)$, logo; $f'_n(0) = 1$ e a sequência $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 1 e não para $f'(0) = 0$.

Teorema 1.2. *Seja a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que as f_n são diferenciáveis em A . Se a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f e a sequência $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para g , então f é derivável em A e $f' = g$.*

O seguinte teorema nos diz que toda função contínua pode ser aproximada uniformemente por polinômios.

Teorema 1.3. (Aproximação de Weierstrass) *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua; então existe uma sequência de funções $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $P_n(x)$ são polinômios, que converge uniformemente para f em $[a, b]$*

1.4 Séries de Funções

Com as considerações feitas no parágrafo sobre as séries numéricas, seja a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in A$ e construamos a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x).$$

Se a sequência $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para $S(x)$, dizemos que a série de funções converge pontualmente e escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x).$$

Se a sequência $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $S(x)$, dizemos que a série de funções converge uniformemente e escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S.$$

Exemplo 1.23.

Seja $A = [0, 1]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tal que $f_1(x) = x$ e $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$, $n > 1$.

A n -ésima soma parcial da série é $S_n(x) = x^n$; logo, a sequência das somas parciais converge pontualmente em A para a função f , onde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Mas, a série não converge uniformemente em A .

De fato, dado $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, seja $x = (2\varepsilon)^{1/n_0-1}$ em:

$$\sum_{n=n_0}^m f_n(x) = x^m - x^{n_0-1};$$

então

$|x^m - x^{n_0-1}| = |(2\varepsilon)^{m/n_0-1} - 2\varepsilon|$ e se m for suficientemente grande $(2\varepsilon)^{m/n_0-1} < \varepsilon$ e:

$$\left| \sum_{n=n_0}^m f_n(x) \right| = |x^m - x^{n_0-1}| > \varepsilon,$$

para $x = (2\varepsilon)^{1/n_0-1}$.

Da mesma forma que para as sequências de funções determinar a convergência uniforme de uma série é bastante complicado.

O seguinte teorema clássico é o mais útil para decidir se uma série de funções converge uniformemente.

Teorema 1.4. (Teste M de Weierstrass) *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ tal que $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se:*

1. $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in A$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. A série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente para alguma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 1.24.

[1] Seja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Como:

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

converge, a série dada converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

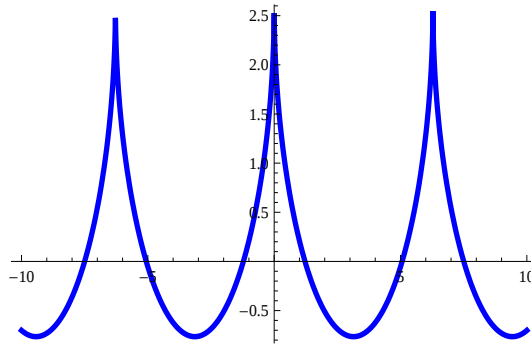


Figura 1.10: Gráfico dos 1000 primeiros somandos de [1].

[2] Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n(x)}{n^2 + x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Como:

$$\left| \frac{\cos^n(x)}{n^2 + x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, a série dada converge uniformemente em $(0, +\infty)$.

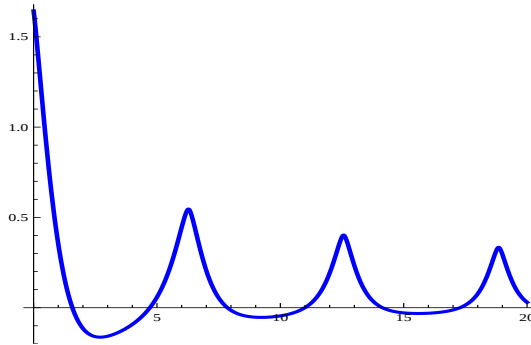


Figura 1.11: Gráfico dos 1000 primeiros somandos de [2].

Os teoremas do parágrafo anterior, no caso de séries de funções, assumem a seguinte forma:

Teorema 1.5. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformemente converge para f em A .*

1. *Se cada f_n é contínua em $x_0 \in A$, então f é contínua em $x_0 \in A$.*
2. *Se cada f_n é integrável em $[a, b] \subset A$, então f é integrável em $[a, b]$ e:*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Teorema 1.6. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ onde as f_n são diferenciáveis em $[a, b]$:*

1. *Se para algum $c \in [a, b]$ a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ converge.*

2. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente em $[a, b]$.*

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função diferenciável em $[a, b]$.

1.5 Séries de Potências

Muitas funções importantes em Matemática podem ser expressas como séries de potências, as quais são a generalização dos polinômios.

Definição 1.9. *Uma série de potências em torno de x_0 , ou de potências de $x - x_0$, é uma série de funções, do tipo:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots \quad (1.2)$$

$$a_i, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Se $x_0 = 0$ em (1.2), então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1.3)$$

$$a_i, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Todas as séries do tipo (1.2) podem ser escritas como em (1.3), fazendo a mudança $t = x - x_0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Logo, por comodidade, estudaremos as séries do tipo (1.3). Note que dada a série de potências (1.3) fazendo $x = x_0$, a série de potências se transforma numa série numérica. Toda série de potências do tipo (1.3) converge se $x = 0$.

Teorema 1.7. *Seja uma série de potências do tipo (1.3):*

1. *Se existe $x_0 \neq 0$ tal que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge, então (1.3) converge absolutamente em $(-|x_0|, |x_0|)$*
2. *Se existe $x_1 \neq 0$ tal que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ diverge, então (1.3) diverge em $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$.*

O conjunto:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$$

é chamado domínio de convergência de (1.3). Note que $D \neq \emptyset$, pois $0 \in D$. É possível provar que D é um intervalo centrado em $x_0 = 0$, que pode ser aberto, fechado, semi-aberto ou reduzir-se a um ponto. Veja [LE]. Se D é um conjunto limitado e ρ é a menor cota superior de D , então ρ é chamado **raio de convergência** da série de potências.

Definição 1.10. *Se D é um conjunto ilimitado, então dizemos que (1.3) tem raio de convergência $\rho = +\infty$. Se D é um conjunto limitado, então dizemos que (1.3) tem raio de convergência $\rho < +\infty$.*

Teorema 1.8. *Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência ρ :*

1. *Se $\rho = 0$ a série converge somente para $x = 0$.*
2. *Se $\rho = +\infty$ a série (1.3) converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Se $0 < \rho < +\infty$ a série (1.3) converge absolutamente no intervalo $(-\rho, \rho)$ e diverge em:*

$$(-\rho, -\infty) \cup (\rho, +\infty).$$

O intervalo $(-\rho, \rho)$ é dito intervalo de convergência da série de potências (1.3). Nos extremos do intervalo, ou seja, em $x = \pm\rho$, nada se pode afirmar e a série pode convergir ou divergir.

Proposição 1.9. *Seja ρ o raio de convergência da série de potências (1.3); então para todo $r > 0$ tal que $r < \rho$, a série de potências (1.3) converge uniformemente em $[-r, r]$.*

Esta proposição segue diretamente do teorema de Weierstrass.

Exemplo 1.25.

Estude a convergência das seguintes séries de potências

$$[1] \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

De forma análoga ao que fizemos para determinar a série geométrica, podemos verificar que para todo $x_0 \neq 0$, temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1$$

e diverge se $|x| > 1$.

$$[2] \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \dots + n! x^n + \dots$$

Para todo $x_0 \neq 0$ a série numérica diverge, pois

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! x_0^n \neq 0.$$

Teorema 1.9. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Então:*

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Exemplo 1.26.

Estude a convergência das seguintes séries de potências:

$$[1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty.$$

Logo, a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$[2] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n}.$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2.$$

Logo, a série converge absolutamente para todo x tal que $|x+1| < 2$, isto é, no intervalo $(-3, 1)$.

Nenhum teorema dá informação sobre a convergência nos extremos do intervalo de convergência. Estes devem ser estudados separadamente.

Assim, se $x = -3$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n},$$

a série converge.

Se $x = 1$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

a série diverge. Logo a série de potências converge absolutamente em $[-3, 1)$.

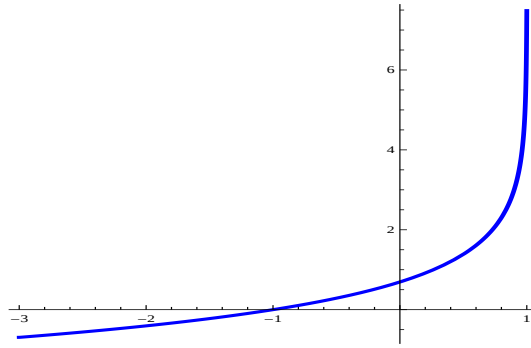


Figura 1.12: Gráfico dos 1000 primeiros somandos de [2].

$$[3] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4(n+1)^2 = +\infty,$$

a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

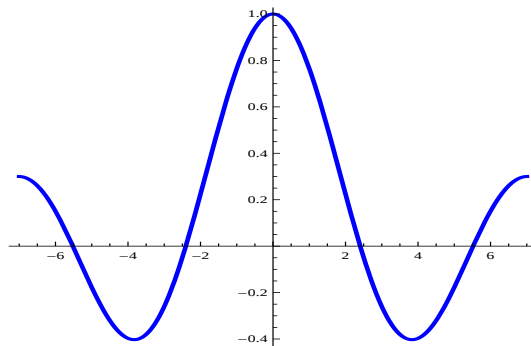


Figura 1.13: Gráfico dos 1000 primeiros somandos de [3].

A seguir, responderemos à seguinte questão: "Dada uma função f , existe uma série de potências com raio de convergência $\rho > 0$ que seja igual a f ?" A resposta é não. As funções que podem ser representadas por séries de potências formam uma classe especial de funções.

1.6 Funções Analíticas

Definição 1.11. Uma função é analítica no ponto x_0 se pode ser escrita como uma série de potências em $x - x_0$, com raio de convergência $\rho > 0$.

Seja f uma função analítica em x_0 ; então:

$$f : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é tal que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n; \quad |x - x_0| < \rho.$$

Proposição 1.10. Se f é analítica em x_0 ; então:

1. f é contínua em $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.
2. f é integrável para todo $[a, b] \subset (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ e:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Teorema 1.10. Se f é analítica em x_0 então, f' é analítica em x_0 e:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}; \quad |x - x_0| < \rho.$$

Corolário 1.11. Se f é analítica em x_0 , então a n -ésima derivada $f^{(n)}$ é analítica em x_0 .

Exemplo 1.27.

[1] Sabemos que: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$. Logo, a função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

é analítica somente para $|x| < 1$. Note que o domínio de f é $\mathbb{R} - \{1\}$.

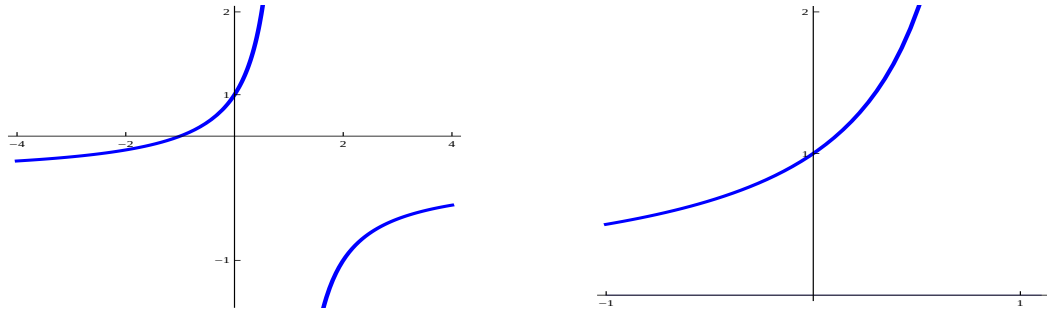


Figura 1.14: Gráficos de f e de f como função analítica, respectivamente.

[2] A função $\frac{1}{1+x^2}$ é analítica?

Note que $f(-x^2) = \frac{1}{1+x^2}$, onde f é dada no exercício anterior. Logo:

$$\frac{1}{1+x^2} = f(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

se $|x^2| < 1$, isto é $|x| < 1$.

[3] A função $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ é analítica?

Note que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, onde $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Logo:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$

se $|x| < 1$.

[4] A função $g(x) = \arctg(x)$ é analítica?

Note que $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) + c$. Logo:

$$\begin{aligned} \arctg(x) &= \int \frac{dx}{1+x^2} + c = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx + c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx + c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + c \end{aligned}$$

se $|x| < 1$. Por outro lado, $0 = \arctg(0) = c$, logo:

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

[5] Consideremos a função:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

J_0 é claramente analítica para todo $x \in \mathbb{R}$. J_0 é chamada função de Bessel de ordem zero.

[6] Que função representa a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}?$$

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; então f é analítica para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x),$$

e $f'(x) = f(x)$; então, $f(x) = c e^x$. Por outro lado, $1 = f(0) = c$, e:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

[7] Sabemos que não é possível calcular $\int_0^1 e^{-t^2} dt$. Porém, podemos calculá-la por um valor aproximado e avaliar o erro cometido.

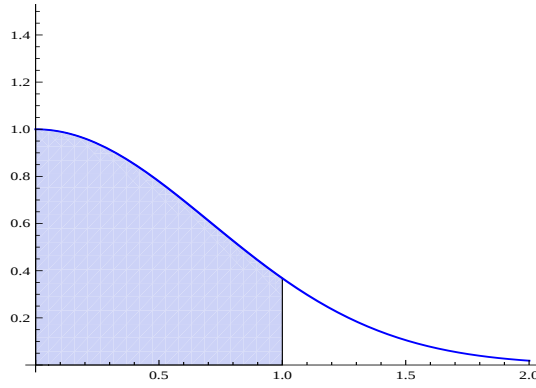


Figura 1.15: Gráfico de $f(t) = e^{-t^2}$.

Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ (por que?):

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}.$$

Integrando, termo a termo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t^2} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}. \end{aligned}$$

A última série é alternada com $a_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$. Não é difícil provar que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+1} \leq a_n$$

isto é, a série converge. Então, o erro:

$$e = \left| \int_0^1 e^{-t^2} dt - S_n \right| < a_{n+1}$$

onde S_n é a n -ésima soma parcial da série alternada. Por exemplo, se $n = 10$:

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt \simeq 0.7468241207$$

e o erro $e < a_{11} = \frac{1}{918086400} \simeq 0.1089222104 \times 10^{-8}$.

1.7 Séries de Taylor

Se f é analítica em $x_0 = 0$, então: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Que relação existe entre a_n e f ?

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 a_2 + 6 a_3 x + 12 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

$$f^{(3)}(x) = 6 a_3 + 24 a_4 x + 60 a_5 x^2 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots$$

$$f^{(4)}(x) = 24 a_4 + 120 a_5 x + 360 a_6 x^2 + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3) a_n x^{n-4} + \dots$$

$\vdots$

Logo:

$$f(0) = a_0,$$

$$f'(0) = a_1,$$

$$f''(0) = 2 a_2,$$

$$f^{(3)}(0) = 6 a_3,$$

$$f^{(4)}(0) = 24 a_4,$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 a_n,$$

$\vdots$

Em geral:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Então, provamos o seguinte teorema:

Teorema 1.12. *Se f é analítica em x_0 ; então:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho.$$

Esta série é chamada série de Taylor de f centrada em x_0 .

Do teorema segue que se f for analítica em x_0 , então f é de classe C^∞ em x_0 . A recíproca é falsa.

Exemplo 1.28.

[1] Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

f é de classe C^∞ em 0, mas tem série de Taylor nula em 0. Veja exercício 9.

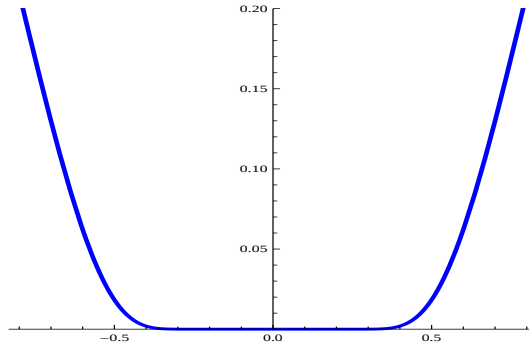


Figura 1.16: Gráfico de f ao redor da origem.

[2] Ache a série de Taylor de $f(x) = \text{sen}(x)$ em torno de 0.

$$f(x) = \text{sen}(x),$$

$$f'(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\text{sen}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

Logo, $f^{(2n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$; então:

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. (Verifique!). Por outro lado, sabemos que:

$$\cos(x) = (\text{sen}(x))' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]'$$

Então:

$$\cos(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Logo:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

[3] Ache a série de Taylor de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ em torno de 0. Utilize esta série para calcular:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}.$$

Seja $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, então $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Pelos exemplos anteriores, sabemos que:

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n},$$

se $|x| < 1$. Por outro lado:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \int_0^x t^{2n} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

se $|x| < 1$. Note que:

$$\begin{aligned} f(1/3) &= \ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right) = \ln(2) \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Logo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{3}.$$

Proposição 1.11. Se f e g são funções analíticas em x_0 ; então:

1. $\alpha f + \beta g$ é analítica em x_0 .

2. $f \circ g$ é analítica em x_0 .

Exemplo 1.29.

Ache a série de Taylor de $f(x) = \cosh(x)$ em torno de 0.

Sabemos que:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e que} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é analítica. Logo:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Proposição 1.12. *A representação em série de potências de uma função analítica é única.*

De fato, se $f, g : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Se $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; então:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in (-\rho, \rho)$.

1.8 Exercícios

1. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{3^n n^2}$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n!}$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! (x-1)^n}{5^n}$$

$$\text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n^2}$$

$$\text{g) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$\text{h) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x+1)^n$$

$$\text{j) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)! x^n}{n!}$$

2. Determine a série de Taylor das seguintes funções, em torno do ponto dado:

$$\text{a) } f(x) = e^{-2x}, \quad x_0 = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \cos(3x), \quad x_0 = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \ln(x), \quad x_0 = 1$$

$$\text{d) } f(x) = (1+x)^{-2}, \quad x_0 = 0$$

$$\text{e) } f(x) = e^x, \quad x_0 = 2$$

$$\text{f) } f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{g) } f(x) = \cos(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{h) } f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

3. Verifique que:

$$\text{a) } \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\text{b) } \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{c) } \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{d) } \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{e) } \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{f) } \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{g) } \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

4. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. A seguinte série é chamada **binomial**:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}.$$

a) Verifique que: $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$

b) Ache o raio de convergência da série. ($|x| < 1$).

c) Se $\alpha \in \mathbb{N}$, verifique que: $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

d) Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, calcule $f^{(10)}(0)$.

e) Na teoria da relatividade especial a massa de um objeto se movendo a uma velocidade v é dada por: $m = \frac{m_0}{\Omega(v)}$, onde $\Omega(v) = \sqrt{1-v^2/c^2}$, m_0 é a massa do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A energia cinética do objeto é dada por:

$$K(v) = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left[\frac{1}{\Omega(v)} - 1 \right].$$

Determine a série de Taylor de $K = K(v)$ em torno de 0.

5. Esboce o gráfico das funções de [2] e da sua respectiva série de Taylor para $n = 1, 2, 3$.

6. **Polinômios de Taylor** Se $f, f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ são de classe C^{n+1} em $|x-x_0| < \rho$, então,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

O polinômio $P_n(x)$ é dito n -ésimo polinômio de Taylor de f ao redor de x_0 e o termo $R_n(x)$ é dito resto da série de Taylor.

Se $|f^{(n+1)}(x)| < M, |x-x_0| < \rho$, é possível verificar que o erro E , da aproximação da função pelo polinômio de Taylor é:

$$E = |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1},$$

para $|x - x_0| < \rho$.

a) Calcule $\text{sen}(1)$ com um erro menor que 10^{-4} .

b) Calcule $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ com um erro menor que 10^{-3} .

c) Estime o erro de aproximação de $K(v)$, de [4] por $P_1(v)$ se $|v| < 100 \text{ m/s}$.

7. Utilizando $P_7(x)$, calcule o valor aproximado de:

a) $\int_0^1 e^{x^2} dx.$

b) $\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x^2) dx.$

8. Verifique quais funções de [3] são analíticas para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Verifique que a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

possui todas as derivadas em $x_0 = 0$ mas não é analítica em $x_0 = 0$.

10. Se f e g são funções analíticas em x_0 ; verifique que:

a) $f + g$ é analítica em x_0 . Calcule o raio de convergência.

b) $f \cdot g$ é analítica em x_0 . Calcule o raio de convergência.

c) Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; então:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right] x^n.$$

Determine a série de potências de $f(x) = e^x \cdot \text{sen}(x)$.

Capítulo 2

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE EDO'S LINEARES

2.1 Introdução

Neste capítulo indicamos a leitura em [NP] do capítulo que estuda das edo's lineares de segunda ordem. Nós utilizaremos as notações de [NP]. Algumas provas dos teoremas podem ser vistas no Apêndice.

Consideremos a edo linear de ordem n :

$$P_n(x) y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + P_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) y = h(x), \quad (2.1)$$

onde $P_i = P_i(x)$ e $h = h(x)$ são funções definidas num intervalo aberto I .

Definição 2.1. O ponto x_0 é dito **regular** de (2.1) se $P_n(x_0) \neq 0$. Caso contrário é dito **singular**.

Note que se $P_n = P_n(x)$ é contínua e x_0 é um ponto regular de (2.1), então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $P_n(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Exemplo 2.1.

[1] **Equação de Airy:**

$$y'' + x y = 0.$$

Nesta equação todos os pontos são regulares. A edo de Airy é utilizada na teoria da difração.

[2] **Equação de Bessel de ordem $\nu \geq 0$:**

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

$P_2(x) = x^2 = 0$, se e somente se $x = 0$; logo, $x = 0$ é o único ponto singular da edo de Bessel. Esta edo é utilizada no estudo da vibração de membranas.

[3] **Equação de Hermite de ordem $p \in \mathbb{R}$:**

$$y'' - 2xy' + py = 0.$$

Nesta equação todos os pontos são regulares. Um tipo especial de solução da edo de Hermite (os polinômios) são utilizados na Mecânica Quântica para estudar as soluções da equação de Schrödinger para osciladores harmônicos.

[4] **Equação de Laguerre de ordem $p \in \mathbb{R}$:**

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0.$$

$P_2(x) = x = 0$, se e somente se $x = 0$; logo, $x = 0$ é o único ponto singular da edo. Um tipo especial de solução da edo de Laguerre (os polinômios) são utilizados na Mecânica Quântica do átomo de hidrogênio.

[5] **Equação de Legendre:**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$P_2(x) = 1-x^2 = 0$, se e somente se $x = \pm 1$; logo, $x = 1$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares da edo de Legendre. Esta edo aparece no estudo das soluções da equação de potencial em esferas.

2.2 Soluções em Torno de Pontos Regulares

Seja x_0 ponto regular de (2.1); então podemos reescrever a edo (2.1):

$$y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + A_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + A_0(x)y = H(x). \quad (2.2)$$

Teorema 2.1. *Se x_0 é um ponto regular de (2.1) tal que $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, H$ são funções analíticas em $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$, então toda solução de (2.2) definida em x_0 é analítica em x_0 .*

Observações 2.1.

1. Os métodos que estudaremos a seguir podem ser utilizados em edo's lineares de qualquer ordem. Nestas notas estudaremos apenas o caso de ordem $n = 2$ pois é onde se encontram as edo's mais importantes da Física-Matemática.
2. Dentre as edo's de segunda ordem, estudaremos as homogêneas, pois os métodos para achar soluções particulares de edo continuam válidos. Veja [NP].

Consideremos a edo de segunda ordem homogênea:

$$P_2(x) y'' + P_1(x) y' + P_0(x) y = 0. \quad (2.3)$$

Seja x_0 um ponto regular de (2.3); então:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0. \quad (2.4)$$

Suponha que $x_0 = 0$ é um ponto regular de (2.3). Como $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são analíticas, então tem raio de convergência $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, respectivamente. Seja ρ o menor entre ρ_1 e ρ_2 e:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad |x| < \rho.$$

Procuramos soluções do tipo:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \rho.$$

Derivando formalmente esta série, temos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n; \end{aligned}$$

onde na primeira série trocamos $n-1$ por n e na segunda série trocamos $n-2$ por n . Então:

$$p(x) y'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+1) p_{n-k} a_{k+1} \right] x^n$$

$$q(x) y(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right] x^n.$$

Então a edo (2.3) pode ser reescrita como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1) p_{n-k} a_{k+1} + q_{n-k} a_k] \right] x^n = 0.$$

Pela unicidade das série de potências, temos:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

A expressão (2.5) é dita a **recorrência da série** e determina a_n em função das constantes arbitrárias a_0 e a_1 . Por exemplo:

$$\begin{aligned} n=0 &\rightarrow a_2 = -\frac{q_0 a_0 + p_0 a_1}{2} \\ n=1 &\rightarrow a_3 = -\frac{p_1 a_1 + q_1 a_0 + 2p_0 a_2 + q_0 a_1}{6} = \frac{(p_0 q_0 - q_1) a_0 + (-p_1 + p_0^2 - q_0) a_1}{6} \end{aligned}$$

Agora devemos mostrar que a solução $y = y(x)$ converge se $|x| < \rho$.

Seja $0 < r < \rho$, então as séries numéricas $p(r)$ e $q(r)$ convergem; em particular, os termos gerais destas séries tendem a zero; logo são limitados; isto é, existe $M > 0$ tal que:

$$|p_n| r^n \leq M \quad \text{e} \quad |q_n| r^n \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|] r^k \\ &\leq \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|] r^k + M|a_{n+1}| r. \end{aligned}$$

Denotemos por: $b_0 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$ e:

$$(n+1)(n+2)b_n = \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)b_{k+1} + b_k] r^k + M b_{n+1} r. \quad (2.6)$$

Note $0 \leq |a_n| \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se trocamos n por $n-1$ e n por $n-2$ em (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} n(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-1}} \sum_{k=0}^n [(k+1)b_{k+1} + b_k] r^k + M b_n r \\ n(n-1)b_n &= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^n [(k+1)b_{k+1} + b_k] r^k + M b_{n-1} r. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira igualdade por n e utilizando a segunda igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
r n (n-1) b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^n [(k+1) b_{k+1} + b_k] r^k + r M (n b_n - b_{n-1}) + M b_n r^n \\
&= n (n-1) b_n - M b_{n-1} r + r M (n b_n - b_{n-1}) + M b_n r^n \\
&= [n (n-1) + r M n + M r^n] b_n.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{r n (n+1)}{(n-1) n + M n r + M r^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = r.$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < r$, como $|a_n| \leq b_n$, temos que a solução $y = y(x)$ também converge. Não é difícil verificar que a solução obtida satisfaz a edo (2.3). Logo, provamos:

Corolário 2.2. Se $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são analíticas em x_0 , então (2.4) possui duas soluções linearmente independentes, analíticas, cada uma da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n;$$

o raio de convergência de qualquer destas soluções é no mínimo a distância (no plano) de x_0 ao ponto singular (real ou complexo) mais próximo.

Exemplo 2.2.

[1] A edo de Legendre:

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \alpha(\alpha + 1) y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$P_2(x) = 1 - x^2$; os únicos pontos singulares são 1 e -1 . Por exemplo, o ponto $x_0 = 0$ é um ponto regular da edo; então, as soluções analíticas no ponto 0 devem ter raio de convergência $\rho < 1$.

[2] A edo:

$$(x^2 + 9) y'' + x y' + x^2 y = 0.$$

$P_2(x) = x^2 + 9$; logo, os únicos pontos singulares (complexos) são $3i$ e $-3i$. Por exemplo, o ponto $x_0 = 4$ é um ponto regular da edo; então, as soluções analíticas no ponto 4 devem ter raio de convergência $\rho < 5$.

Corolário 2.3. *Nas condições do corolário anterior, dados $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, então, existe uma única solução y analítica em x_0 tal que:*

$$\begin{cases} y(x_0) &= a_0 \\ y'(x_0) &= a_1. \end{cases}$$

A seguir, apresentamos o primeiro exemplo de como achar as soluções de uma edo. Tentaremos fazer todos os detalhes importantes do desenvolvimento.

Exemplo 2.3.

[1] Ache a solução geral da edo:

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

As funções $p(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$ e $q(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ são analíticas se $|x| < 1$; logo, acharemos as soluções da edo em torno de $x_0 = 0$, as quais tem raio de convergência $\rho < 1$. Temos:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n, \\ 4xy' &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 4n a_n x^n \\ (x^2 - 1)y'' &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, trocando $n - 2 = m$ ou $n = m + 2$ na segunda série:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 1)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}] x^n.
\end{aligned}$$

onde na segunda série trocamos a variável muda m por n . Logo, a equação pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)(a_n - a_{n+2}) x^n = 0.
\end{aligned}$$

Pela unicidade da representação em séries de potências, temos que:

$$(n+2)(n+1)(a_n - a_{n+2}) = 0,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Logo:

$$a_{n+2} = a_n,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; esta expressão é chamada recorrência da série. Então, se:

$$n = 0 \rightarrow a_2 = a_0$$

$$n = 1 \rightarrow a_3 = a_1$$

$$n = 2 \rightarrow a_4 = a_2 = a_0$$

$$n = 3 \rightarrow a_5 = a_3 = a_1$$

$$n = 4 \rightarrow a_6 = a_4 = a_0.$$

Em geral

$$a_{2n} = a_0 \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = a_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Logo, a solução geral da edo é:

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = (a_0 + a_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Denotando por:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$y = y_1(x)$ é uma série geométrica que converge se $|x| < 1$. Por outro lado:

$$y_2(x) = \frac{x}{1-x^2};$$

logo, y_1 e y_2 são l.i. (linearmente independentes) e:

$$y(x) = \frac{a_0}{1-x^2} + \frac{a_1 x}{1-x^2}$$

é a solução geral da edo.

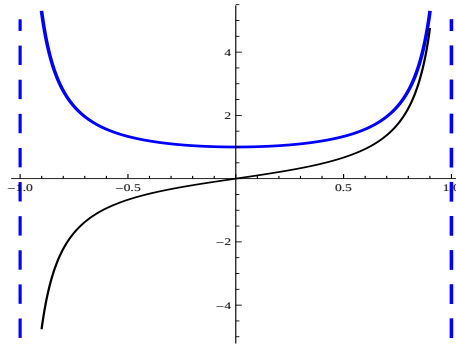


Figura 2.1: Gráficos de y_1 e y_2 , respectivamente.

[2] Ache a solução geral da edo:

$$y'' + x y' + y = 0.$$

$p(x) = x$ e $q(x) = 1$ são analíticas para todo $x \in \mathbb{R}$; logo, acharemos as soluções em torno de $x_0 = 0$, a qual tem raio de convergência $\rho = +\infty$. Temos:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Note que:

$$x y' = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n.$$

A equação pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} y'' + x y' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

onde na primeira série trocamos $n-2$ por n . Logo:

$$\begin{aligned} y'' + x y' + y &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n] x^n = 0; \end{aligned}$$

pela unicidade da representação em séries de potências, temos que:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = (n+1) [(n+2) a_{n+2} + a_n] = 0,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Logo:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2},$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; esta expressão é chamada recorrência da série. Então, se:

$$\begin{aligned} n=0 &\rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2} \\ n=1 &\rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3} \\ n=2 &\rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \times 4} \\ n=3 &\rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5} = -\frac{a_1}{3 \times 5} \\ n=4 &\rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2 \times 4 \times 6} \\ n=5 &\rightarrow a_7 = -\frac{a_5}{7} = \frac{a_1}{3 \times 5 \times 7} \\ n=6 &\rightarrow a_8 = -\frac{a_6}{8} = \frac{a_0}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \\ n=7 &\rightarrow a_9 = -\frac{a_5}{9} = -\frac{a_1}{3 \times 5 \times 7 \times 9}. \end{aligned}$$

Em geral

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n-2)(2n)} \quad \text{e}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n-1)(2n+1)}.$$

Utilizando as notações:

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n-2)(2n) = (2n)!!$$

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n-1)(2n+1) = (2n+1)!!$$

Temos:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!!}.$$

Logo, a solução geral da edo é:

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!!} \right] + a_1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!} \right].$$

Denotando por:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!!} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!},$$

temos que o wronskiano (veja [NP]):

$$W(y_1(0), y_2(0)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

logo, y_1 e y_2 são l.i. (linearmente independentes).

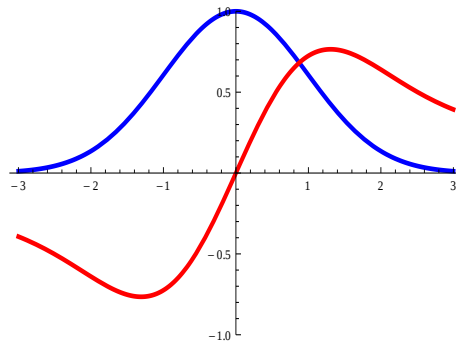


Figura 2.2: Gráficos de y_1 e y_2 , respectivamente.

[3] Ache a solução geral da seguinte edo, em torno de $x_0 = 0$:

$$(1 + x^2) y'' - 4x y' + 6y = 0.$$

$p(x) = -\frac{4x}{1+x^2}$ e $q(x) = \frac{6}{1+x^2}$ são analíticas em torno de $x_0 = 0$. Temos:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Note que:

$$6y = \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n, \quad 4xy' = \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4n a_n x^n$$

$$\begin{aligned} (1+x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n-1) a_n] x^n. \end{aligned}$$

onde na primeira série trocamos $n-2$ por n . Logo, a equação pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} (1+x^2)y'' - 4xy' + 6y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 5n + 6) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n-3)(n-2) a_n] x^n = 0; \end{aligned}$$

pela unicidade da representação em séries de potências, temos que:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n-3)(n-2) a_n = 0,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Logo:

$$a_{n+2} = -\frac{(n-3)(n-2)a_n}{(n+2)(n+1)},$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Então, se:

$$n = 0 \rightarrow a_2 = -3 a_0$$

$$n = 1 \rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$n = 2 \rightarrow a_4 = 0$$

$$n = 3 \rightarrow a_5 = 0;$$

como $a_4 = 0$, então $a_6 = a_8 = \dots = a_{2n} = 0$ se $n = 2, 3, \dots$, analogamente, como $a_5 = 0$, então $a_7 = a_9 = \dots = a_{2n+1} = 0$ se $n = 2, 3, \dots$.

Logo, a solução geral da edo é:

$$y(x) = a_0 [1 - 3x] + a_1 [x - \frac{x^3}{3}].$$

Denotando: $y_1(x) = 1 - 3x$ e $y_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$, temos que o wronskiano:

$$W(y_1(0), y_2(0)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

logo, y_1 e y_2 são l.i. (linearmente independentes). Qual é o raio de convergência?

[4] Ache a solução do PVI (problema de valor inicial):

$$\begin{cases} (t^2 - 2t - 3) \frac{d^2 y}{dt^2} + 3(t - 1) \frac{dy}{dt} + y(t) = 0 \\ y(1) = 4 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Note que os únicos pontos singulares da edo são $t = -1$ e $t = 3$; logo $t_0 = 1$ é ponto regular; então, acharemos solução em $t_0 = 1$, a qual deve ter raio de convergência $\rho < 2$. Logo, consideramos inicialmente soluções do tipo:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

Fazendo $x = t - 1$, temos que $x^2 - 4 = t^2 - 2t - 3$ e se $t = 1$, então $x = 0$; por outro lado se denotamos $y' = \frac{dy}{dx}$, utilizando a regra da cadeia, obtemos o PVI:

$$\begin{cases} (x^2 - 4) y'' + 3x y' + y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Notamos que $x_0 = 0$ é ponto regular e que o raio de convergência da solução deve ser $\rho < 2$. (Por que?).

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} 3x y' &= \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n, \\ (x^2 - 4) y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

A equação pode ser reescrita:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

isto é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

onde na segunda série trocamos $n-2$ por n . Logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^2 a_n - 4(n+2)(n+1) a_{n+2}] x^n = 0,$$

pela unicidade da representação em série de potências, temos que:

$$(n+1)^2 a_n - 4(n+2)(n+1) a_{n+2} = 0$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Logo:

$$a_{n+2} = \frac{(n+1) a_n}{4(n+2)},$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Então, se:

$$\begin{aligned}
n = 0 &\rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2 \times 4} \\
n = 1 &\rightarrow a_3 = \frac{2 a_1}{3 \times 4} \\
n = 2 &\rightarrow a_4 = \frac{3 a_2}{4 \times 4} = \frac{3 a_0}{4 (2 \times 4)} \\
n = 3 &\rightarrow a_5 = \frac{4 a_3}{5 \times 4} = \frac{(2 \times 4) a_1}{4 (3 \times 5)} \\
n = 4 &\rightarrow a_6 = \frac{5 a_4}{6 \times 4} = \frac{(3 \times 5) a_0}{4 (2 \times 4 \times 6)} \\
n = 5 &\rightarrow a_7 = \frac{6 a_5}{7 \times 4} = \frac{(2 \times 4 \times 6) a_1}{4 (3 \times 5 \times 7)} \\
n = 6 &\rightarrow a_8 = \frac{7 a_6}{8 \times 4} = \frac{(3 \times 5 \times 7) a_0}{4 (2 \times 4 \times 6 \times 8)} \\
n = 7 &\rightarrow a_9 = \frac{8 a_7}{9 \times 4} = \frac{(2 \times 4 \times 6 \times 8) a_1}{4 (3 \times 5 \times 7 \times 9)}.
\end{aligned}$$

Em geral

$$a_{2n} = \frac{(2n+1)!! a_0}{4 (2n)!!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{(2n)!! a_1}{4 (2n+1)!!}.$$

Logo, a solução geral da edo é:

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! x^{2n}}{4 (2n)!!} \right] + a_1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!! x^{2n+1}}{4 (2n+1)!!} \right].$$

Com as mesmas notações do exercício anterior temos que: y_1 e y_2 são l.i. Observe que:

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 [1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots] + a_1 [x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots], \\
y'(x) &= a_0 [2 a_2 x + 4 a_4 x^3 + \dots] + a_1 [1 + 3 a_3 x^2 + 5 a_5 x^4 + \dots].
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
4 &= y(0) = a_0 \\
1 &= y'(0) = a_1.
\end{aligned}$$

Voltando às variáveis originais:

$$y(t) = 4 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! (t-1)^{2n}}{4 (2n)!!} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!! (t-1)^{2n+1}}{4 (2n+1)!!}.$$

2.3 A Equação de Legendre

A edo de Legendre é uma edo clássica em Matemática, que está vinculada a diversas situações físicas. Por exemplo, aparece no estudo das soluções da equação do potencial em esferas, em problemas de gravitação, mecânica quântica, entre outros.

Acharemos a solução geral da edo de Legendre, em torno de $x_0 = 0$:

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \alpha(\alpha + 1) y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como $x = 1$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares, a solução deve ter raio de convergência $\rho < 1$.

Por outro lado:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha + 1) y &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha + 1) a_n x^n, \\ 2x y' &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n, \\ (1 - x^2) y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n] x^n; \end{aligned}$$

onde na primeira série trocamos $n - 2$ por n . Logo. A equação pode ser reescrita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) + 2n - \alpha(\alpha + 1)] a_n x^n = 0,$$

logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-\alpha)(n+\alpha+1) a_n] x^n = 0,$$

pela unicidade da representação em série de potências, temos que:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\alpha)(n+\alpha+1)a_n = 0,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Logo:

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(n+\alpha+1)a_n}{(n+1)(n+2)},$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Então, se:

$$n = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)a_0}{2}$$

$$n = 1 \rightarrow a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)a_1}{1 \times 2 \times 3}$$

$$n = 2 \rightarrow a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)a_2}{3 \times 4} = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)a_0}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$n = 3 \rightarrow a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)a_3}{4 \times 5} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)a_1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$n = 4 \rightarrow a_6 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)a_4}{5 \times 6} = -\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)a_0}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$n = 5 \rightarrow a_7 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)a_5}{6 \times 7} = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)a_1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}.$$

Em geral

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \alpha(\alpha-2) \dots (\alpha-2n+2)(\alpha+1)(\alpha+3) \dots (\alpha+2n-1)a_0}{(2n)!}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n (\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2n+1)(\alpha+2)(\alpha+4) \dots (\alpha+2n)a_1}{(2n+1)!}.$$

Logo, a solução geral da edo é: $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, onde:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha(\alpha-2) \dots (\alpha-2n+2)(\alpha+1)(\alpha+3) \dots (\alpha+2n-1)x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2n+1)(\alpha+2)(\alpha+4) \dots (\alpha+2n)x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

É imediato que y_1 e y_2 são l.i. Lembremos que a recorrência da edo de Legendre é:

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(n + \alpha + 1) a_n}{(n + 1)(n + 2)},$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

1. Se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então para $\alpha = n$ temos $a_{n+2} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Se α é par $y_1(x)$ é um polinômio e se α é ímpar $y_2(x)$ é um polinômio.
3. Por exemplo, escolhendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, temos $y = y_1$ e escolhendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, temos $y = y_2$.

$$\alpha = 0 \rightarrow a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0 \rightarrow y_1(x) = 1$$

$$\alpha = 1 \rightarrow a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0 \rightarrow y_2(x) = x$$

$$\alpha = 2 \rightarrow a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 0 \rightarrow y_1(x) = 1 - 3x^2$$

$$\alpha = 3 \rightarrow a_5 = a_7 = a_9 = \dots = 0 \rightarrow y_2(x) = x - \frac{5x^3}{3}.$$

4. É usual nas aplicações, multiplicar cada termo dos polinômios por uma constante adequada tal que estes sejam iguais a 1 quando calculados para $x = 1$, isto é:

$$P_n(x) = \begin{cases} \frac{y_1(x)}{y_1(1)} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{y_2(x)}{y_2(1)} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

5. Estes polinômios são chamados de Legendre e denotados por $P_n(x)$.
6. Os polinômios $P_n(x)$ estão definidos para todo x , mas são solução da edo de Legendre somente se $x \in (-1, 1)$.
7. Os seis primeiros polinômios de Legendre (normalizados) são:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

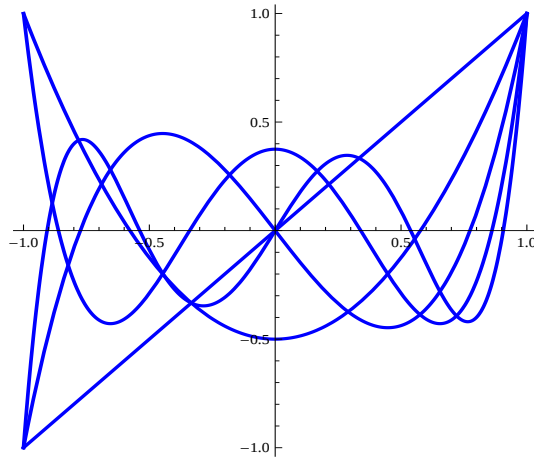


Figura 2.3: Gráficos de P_1 , P_2 , P_3 , P_4 e P_5 .

Em geral, os polinômios de Legendre são dados por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!},$$

onde N é o maior inteiro $\leq n/2$. Note que, $P_n(1) = 1$ e $P_n(-1) = (-1)^n$ para todo n . Gráficos de alguns dos polinômios:

Proposição 2.1. Fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

De fato, utilizando que:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-\alpha)} = \frac{(2n-2\alpha)! x^{n-2\alpha}}{(n-2\alpha)!}.$$

Como:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} x^{2(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{aligned}$$

Os polinômios de Legendre aparecem no problema geométrico de determinar a distância inversa. Devido a isto, são utilizados com frequência em problemas de eletrostática e gravitação.

2.3.1 Exemplos e Aplicações

1. Os polinômios de Legendre satisfazem à seguinte propriedade:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Esta propriedade é chamada ortogonalidade dos polinômios de Legendre. Para mais detalhes, veja o próximo capítulo. Primeiramente mostraremos que:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) R_m(x) dx = 0,$$

onde $R_m(x)$ é um polinômio de grau $0 \leq m < n$. Logo, basta mostrar que:

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0.$$

Denotemos por $Q(x) = (x^2 - 1)^n$ e $Q^{(n)}(x) = \frac{d^n Q(x)}{dx^n}$; então pela fórmula de Rodrigues:

$$2^n n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = \int_{-1}^1 x^m Q^{(n)}(x) dx.$$

Integramos por partes a última integral utilizando que $Q^{(n)}(\pm 1) = 0$; logo, integraremos por partes, m vezes, a integral resultante:

$$\begin{aligned} 2^n n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx &= x^m Q^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 x^{m-1} Q^{(n-1)}(x) dx \\ &= -m \int_{-1}^1 x^{m-1} Q^{(n-1)}(x) dx \\ &= (-1)^m m! \int_{-1}^1 Q^{(n-m)}(x) dx \\ &= (-1)^m m! Q^{(n-m-1)}(x) \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Em particular:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m.$$

Se $n = m$:

$$I = (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 Q^{(n)}(x) Q^{(n)}(x) dx.$$

Integramos por partes a última integral; logo, integraremos por partes n vezes a integral resultante:

$$\begin{aligned} I &= Q^{(n)}(x) Q^{(n-1)}(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q^{(n+1)}(x) Q^{(n-1)}(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 Q^{(n+1)}(x) Q^{(n-1)}(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 Q^{(2n)}(x) Q(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [(x^2 - 1)^n] (x^2 - 1)^n dx \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (-1)^n (1 - x^2)^n dx \\ &= (2n)! \int_{-1}^1 (1 + x)^n (1 - x)^n dx, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [(x^2 - 1)^n] = (2n)!$ (verifique!). Integramos por partes a última integral e novamente integraremos por partes n vezes a integral resultante:

$$\begin{aligned} I &= (2n)! \left[\frac{(1-x)^n (1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 + \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1+x)^{n+1} (1-x)^{n-1} dx \right] \\ &= \frac{(2n)! n}{n+1} \int_{-1}^1 (1+x)^{n+1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{(2n)! n (n-1) (n-2) \dots 2 \cdot 1}{(n+1) (n+2) (n+3) \dots 2n} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx \\ &= \frac{(2n)! n! n!}{(2n)! (2n+1)} (1+x)^{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

2. A equação de Laplace para o potencial $V = V(x, y, z)$ é dada por:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , a equação de Laplace fica:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot g(\theta)}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0.$$

Se o potencial V não depende do ângulo ϕ , isto é, se $V(r, \theta) = r^\alpha \Theta(\theta)$, a equação de Laplace fica:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot g(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} + \alpha(\alpha + 1)\Theta = 0.$$

Fazendo $x = \cot g(\theta)$ e substituindo Θ por y na edo anterior, temos a edo de Legendre.

3. Os polinômios de Legendre são uma solução da edo de Lagrange. Por outro lado, a edo de Legendre é de segunda ordem; logo deve existir a segunda solução da edo, i.e. com os polinômios. É possível mostrar que a segunda solução da edo de Legendre é dada por:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{x-t} dt, \quad \text{se } |x| < 1.$$

Utilizando integração por partes, temos que as funções $Q_n = Q_n(x)$ também são soluções da edo de Legendre para $|x| > 1$. Note que:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \\ Q_1(x) &= -1 + \frac{x}{2} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \\ Q_2(x) &= -\frac{3x}{2} + \frac{3x^2-1}{4} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \\ Q_3(x) &= \frac{2}{3} - \frac{5x^2}{2} + \frac{x(5x^2-3)}{4} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \\ Q_4(x) &= \frac{55x}{24} - \frac{35x^3}{8} + \frac{3-30x^2+35x^4}{16} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right]. \end{aligned}$$

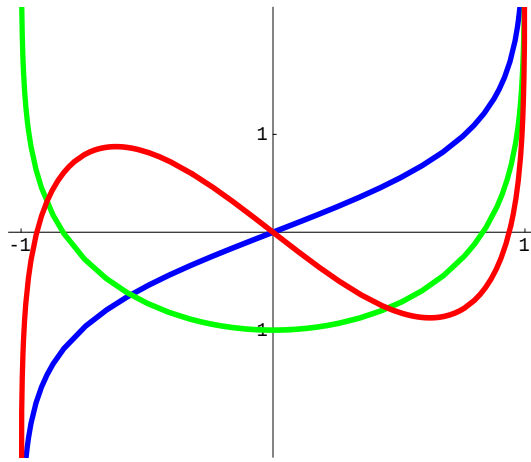
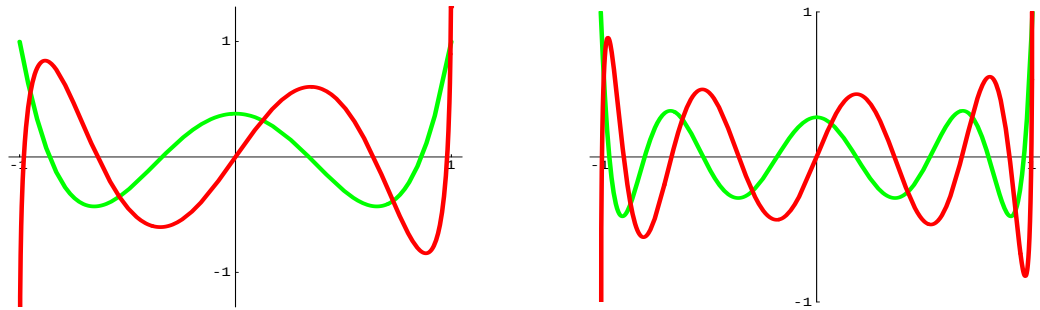


Figura 2.4: Gráficos de Q_0 , Q_1 e Q_2 .

Nos seguintes desenhos, gráficos de $P_4(x)$, $Q_4(x)$ e $P_8(x)$, $Q_8(x)$, respectivamente:



2.4 Exercícios

1. Achar as soluções em torno do ponto regular $x_0 = 0$ das seguintes edo's, verificando que são linearmente independentes e determinando seu raio de convergência:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(x^2 - 1) y'' + 4x y' + 2y = 0$ | b) $(x^2 + 2) y'' + 4x y' + 2y = 0$ |
| c) $y'' + x y' + y = 0$ | d) $(x^2 + 1) y'' + 6x y' + 4y = 0$ |
| e) $(x^2 - 3) y'' + 2x y' = 0$ | f) $(x^2 - 1) y'' - 6x y' + 12y = 0$ |
| g) $y'' + 2xy = 0$ | h) $y'' + x^2 y = 0$ |
| i) $y'' - xy = 0$, edo de Airy | j) $y'' + xy' + y = 0$ |

2. Analogamente ao item anterior, achar as soluções dos seguintes PVI:

- | | |
|---|---|
| a) $\begin{cases} (1 + x^2) y'' + 2x y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} y'' + x y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} y'' - e^x y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ | |

3. Fazendo a mudança $x = t - x_0$, achar os 10 primeiros termos de cada solução dos seguintes PVI:

- | | |
|--|---|
| a) $\begin{cases} (4t^2 + 16t + 17) y'' - 8y = 0 \\ y(-2) = 1 \\ y'(-2) = 0 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} (2t - t^2) y'' - 6(t - 1) y' - 4y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ |
|--|---|

4. Sejam $P_n = P_n(x)$ os polinômios de Legendre, verifique que:

- | | |
|--|---|
| a) $P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$ | b) $P'_n(-1) = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$ |
| c) $P'_{n+1} - 2x P'_n + P'_{n-1} - P_n = 0$ | d) $x P'_n - P'_{n-1} - n P_n = 0$ |

5. **Edo de Hermite:** Seja $\alpha > 0$; a edo de Hermite de ordem α é:

$$y'' - 2x y' + \alpha y = 0.$$

6. Verifique que as soluções da edo de Hermite são:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \alpha(\alpha-2) \dots (\alpha-2n+2) x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2n+1) x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7. Verifique que se α é um inteiro par, $y_1(x)$ é um polinômio; analogamente, se α é um inteiro ímpar, $y_2(x)$ é um polinômio. Estes polinômios são chamados de Hermite e são denotados por $H_n(x)$.

8. Verifique que:

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

9. Esboce o gráfico de $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ e $H_4(x)$.

10. Verifique que:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n H_n(-x) \quad \text{e} \\ H_{n+1}(x) + 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

11. Considere as edo's do tipo:

$$y'' + (1 - x^2 + 2\alpha) y = 0.$$

Verifique que fazendo $y = e^{-x^2} v$, obtemos a edo de Hermite.

12. Utilizando vi), determine a solução da edo de Weber:

$$y'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

13. Seja $\mathbf{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$. A equação de Schrödinger é :

$$i \Psi_t = -\frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi + V \Psi,$$

onde $i = \sqrt{-1}$, $\Delta \Psi$ é a equação de Laplace, $\Psi = \Psi(\mathbf{x})$ e $V = V(x, y, z)$ é uma função diferenciável, $m > 0$ e $\hbar$ é a constante de Plank. Esta equação descreve a interação de uma partícula quântica de massa m com um potencial V . Em particular, a equação de Schrödinger para um oscilador harmônico unidimensional com função potencial $V(x) = \frac{k x^2}{2}$ e energia total E constante, é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{k x^2}{2} \Psi(x) = E \Psi(x).$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x & \alpha^4 &= \frac{m k}{\hbar^2} \\ \lambda &= \frac{2 E}{\hbar \omega_0} & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}, \end{aligned}$$

verifique que a edo unidimensional de Schrödinger pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) \Psi(\xi) = 0.$$

Utilize a mudança $\Psi = y(\xi) e^{-\xi^2/2}$ para reescrever a última edo como a edo de Hermite:

$$y'' - 2\xi y' + (\lambda - 1)y = 0.$$

Ache a solução para $\lambda = 2n + 1$.

Capítulo 3

MÉTODO DE FROBENIUS

Os procedimentos que utilizaremos para achar soluções de edo's, neste capítulo, são bastante similares aos estudados no capítulo anterior, os quais são conhecidos como **Método de Fobenius**. O método será apresentado através de diversos exemplos.

3.1 Introdução

Primeiramente estudaremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.

Edo de Euler-Lagrange:

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Note que $x_0 = 0$ é ponto singular da edo. Por outro lado, procuramos soluções do tipo $y(x) = x^\alpha$ com $x \neq 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$; isto é, α não é necessariamente um número natural.

$$\begin{aligned} y &= x^\alpha, & y' &= \alpha x^{\alpha-1}, \\ y'' &= \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Logo a edo pode ser reescrita:

$$x^2 y'' + a x y' + b y = [\alpha(\alpha-1) + a\alpha + b] x^\alpha = 0;$$

logo, $\alpha(\alpha-1) + a\alpha + b = 0$. Sejam α_1 e α_2 as soluções desta equação de segundo grau. Logo:

1. Se $\alpha_i \in \mathbb{R}$ é tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, então:

$$y(x) = c_1 |x|^{\alpha_1} + c_2 |x|^{\alpha_2}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2. Se $\alpha_i \in \mathbb{R}$ é tal que $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, então:

$$y(x) = c_1 |x|^\alpha + c_2 \ln(|x|) |x|^\alpha, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

3. Se $\alpha_i \in \mathbb{C}$, então $\alpha_1 = a + i b$ e $\alpha_2 = a - i b$; então:

$$y(x) = |x|^a \left[c_1 \cos(\ln(b|x|)) + c_2 \sin(\ln(b|x|)) \right], \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Isto nos mostra que ainda em torno de pontos singulares é possível achar solução. Estas soluções não são analíticas; como por exemplo, na equação de Euler-Lagrange quando as raízes da equação de segundo grau forem $\alpha_1 = \sqrt{2}$ e $\alpha_2 = -\sqrt{2}$. Portanto, em torno de um ponto singular não procuraremos soluções em forma de séries de potências (expoentes naturais). Procuraremos soluções que tenham como caso particular as soluções da edo de Euler-Lagrange.

3.2 Soluções em Torno de Pontos Singulares

A seguir determinaremos quais singularidades admitem soluções "tipo"edo de Euler-Lagrange.

Definição 3.1. *Seja x_0 um ponto singular da edo (2.3). O ponto x_0 é dito singular regular, se se verificam simultaneamente as condições:*

1. $(x - x_0) \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ é analítica em x_0 e,
2. $(x - x_0)^2 \frac{P_0(x)}{P_2(x)}$ é analítica em x_0 .

Observações 3.1.

1. Uma singularidade que não é regular é dita irregular.
2. Isto é, se x_0 é singular regular as singularidades da edo podem ser "removidas".

Exemplo 3.2.

[1] Considere a edo de Euler-Lagrange:

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. A única singularidade é $x_0 = 0$; por outro lado:

1. $x \left[\frac{a x}{x^2} \right] = a$ é analítica em 0 e,
2. $x^2 \left[\frac{b}{x^2} \right] = b$ é analítica em 0. Logo $x_0 = 0$ é singular regular.

[2] Considere a edo de Bessel de ordem $\nu \geq 0$:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

A única singularidade é $x_0 = 0$; por outro lado:

1. $x \left[\frac{x}{x^2} \right] = 1$ é analítica em 0 e,
2. $x^2 \left[\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \right] = x^2 - \nu^2$ é analítica em 0. Logo $x_0 = 0$ é singular regular.

[3] Considere a edo de Legendre

$$(1 - x^2) y'' - 2 x y' + \alpha (\alpha + 1) y = 0.$$

Os únicos pontos singulares são $x_0 = \pm 1$; então para $x_0 = 1$:

1. $-(x - 1) \left[\frac{2 x}{1 - x^2} \right] = \frac{2 x}{x + 1}$ é analítica em 1 e,
2. $(x - 1)^2 \left[\frac{\alpha (\alpha + 1)}{1 - x^2} \right] = -\frac{\alpha (\alpha + 1) (x - 1)}{x + 1}$ é analítica em 1. Logo $x_0 = 1$ é singular regular.

Analogamente para $x_0 = -1$. Logo $x_0 = \pm 1$, necessariamente, devem ser singulares regulares.

[4] Considere a edo:

$$(x - 1)^2 y'' + 2 y' + x y = 0.$$

A única singularidade é $x_0 = 1$; por outro lado:

1. $(x-1) \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right] = \frac{1}{x-1}$ que não é analítica em 1 e,
2. $(x-1)^2 \left[\frac{1}{(x-1)^2} \right] = \frac{1}{(x-1)^2}$ também não é analítica em 1. Logo $x_0 = 1$ é ponto irregular.

3.2.1 A Equação Indicial

Se x_0 é ponto singular regular da edo (2.3), então as funções:

$$(x-x_0) \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad \text{e} \quad (x-x_0)^2 \frac{P_0(x)}{P_2(x)}$$

são analíticas em torno de x_0 . Neste caso:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{P_0(x)}{P_2(x)}$$

existem.

Logo, se x_0 é ponto singular regular da edo (2.3) consideramos a equação de segundo grau:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \quad (3.1)$$

onde :

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{P_0(x)}{P_2(x)}.$$

Definição 3.2. A equação (3.1) é dita **equação indicial (e.i.)** associada a edo (2.3).

Exemplo 3.3.

[1] Considere a edo de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

No ponto singular regular $x_0 = 1$, temos:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} -(x-1) \left[\frac{2x}{1-x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x+1} = 1$ e,
2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\alpha(\alpha+1)(x-1)}{x+1} = 0.$

3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r-1) + r = r^2 = 0;$$

e suas raízes são $r = 0$.

[2] Considere a edo:

$$2x^2 y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0.$$

No ponto singular regular $x_0 = 0$, temos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{3x}{2x^2} \right] = \frac{3}{2} \text{ e},$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{2x^2 - 1}{2x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r-1) + \frac{3r}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(r+1)(2r-1) = 0;$$

e suas raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = \frac{1}{2}$.

[3] Considere a edo:

$$x^2 y'' - xy' - (x^2 + 5/4)y = 0.$$

No ponto singular regular $x_0 = 0$, temos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[-\frac{1}{x} \right] = -1 \text{ e},$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[-\frac{x^2 + 5/4}{x^2} \right] = -\frac{5}{4}.$$

3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r-1) - r - \frac{5}{4} = 0;$$

e suas raízes são $r_1 = \frac{5}{2}$ e $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Seja x_0 um ponto singular regular da edo (2.3) e denotemos os raios de convergência das séries que representam as funções analíticas

$$(x - x_0) \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \quad \text{e} \quad (x - x_0)^2 \frac{P_0(x)}{P_2(x)}$$

por $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, respectivamente. Seja ρ o menor entre ρ_1 e ρ_2 .

Teorema 3.1. *Sejam x_0 um ponto singular regular da edo (2.3), r_1 e r_2 raízes da (3.1). Se $r_i \in \mathbb{R}$ é tal que $r_1 \geq r_2$, então uma solução da edo (2.3) é da forma:*

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right],$$

para $0 < |x - x_0| < \rho$.

1. Se $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, então existe uma segunda solução l.i., do tipo:

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right].$$

2. Se $r_1 = r_2$, então existe uma segunda solução l.i., do tipo:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right].$$

3. Se $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, então existe uma segunda solução l.i., do tipo:

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right],$$

onde a constante C pode ser zero

Se a (3.1) possui raízes complexas, isto é: $r_1 = a + i b$ e $r_2 = a - i b$, utilizando a fórmula de Euler, temos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= |x - x_0|^a \left[w_1 \cos(b \ln |x - x_0|) + w_2 \sin(b \ln |x - x_0|) \right], \\ y_2(x) &= |x - x_0|^a \left[w_1 \cos(b \ln |x - x_0|) - w_2 \sin(b \ln |x - x_0|) \right], \end{aligned}$$

$$\text{onde } w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad \text{e} \quad w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Exemplo 3.4.

[1] Considere a edo:

$$2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0.$$

O único ponto singular da edo é $x_0 = 0$, o qual é singular regular; por outro lado:

$$1. \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} -x \left[\frac{x}{2x^2} \right] = -\frac{1}{2} \text{ e,}$$

$$2. \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{1+x}{2x^2} \right] = \frac{1}{2}.$$

3. Logo, a e.i. é:

$$r(r-1) - \frac{r}{2} + \frac{1}{2} = 2r^2 - 3r + 1 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = \frac{1}{2}$.

Como $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$, do teorema de Frobenius, segue que a edo possui duas soluções, linearmente independentes, da forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}.$$

Então, procuramos soluções do tipo:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \text{e} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
(1+x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}, \\
xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r}, \\
2x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r}.
\end{aligned}$$

A edo pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} \right] &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} \right] &= 0
\end{aligned}$$

onde na última série trocamos $n+1$ por n . Temos:

$$P(r) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n+2r-1)(n+r-1) a_n + a_{n-1} \right] x^{n+r} = 0,$$

onde $P(r) = (2r(r-1) - r + 1)$. Logo, obtemos:

1. $P(r) a_0 = 0$; como a constante arbitrária $a_0 \neq 0$, então $2r(r-1) - r + 1 = 0$ que é a equação indicial
2. $[(2n+2r-1)(n+r-1)] a_n + a_{n-1} = 0$, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Caso $r = 1$. Do ítem 2:

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned}
n=1 &\rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{3} = -\frac{a_0}{1 \times 3} \\
n=2 &\rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2 \times 5} = \frac{a_0}{(1 \times 2)(1 \times 3 \times 5)} \\
n=3 &\rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{3 \times 7} = -\frac{a_0}{(1 \times 2 \times 3)(1 \times 3 \times 5 \times 7)} \\
n=4 &\rightarrow a_4 = -\frac{a_3}{4 \times 9} = \frac{a_0}{(1 \times 2 \times 3 \times 4)(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9)}.
\end{aligned}$$

Em geral:

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n! (2n+1)!!},$$

escolhendo $a_0 = 1$:

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n! (2n+1)!!} \right].$$

Caso $r = \frac{1}{2}$. Do item 2:

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1 \rightarrow b_1 = -\frac{b_0}{1}$$

$$n = 2 \rightarrow b_2 = -\frac{b_1}{2 \times 3} = \frac{b_0}{1 \times 2 \times 3}$$

$$n = 3 \rightarrow b_3 = -\frac{b_2}{3 \times 5} = -\frac{b_0}{(1 \times 2 \times 3)(1 \times 3 \times 5)}$$

$$n = 4 \rightarrow b_4 = -\frac{b_3}{4 \times 7} = \frac{b_0}{(1 \times 2 \times 3 \times 4)(1 \times 3 \times 5 \times 7)}.$$

Em geral:

$$b_n = \frac{(-1)^n b_0}{n! (2n-1)!!},$$

escolhendo $b_0 = 1$:

$$y_2(x) = \sqrt{x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n! (2n-1)!!} \right].$$

Claramente y_1 e y_2 são l.i.

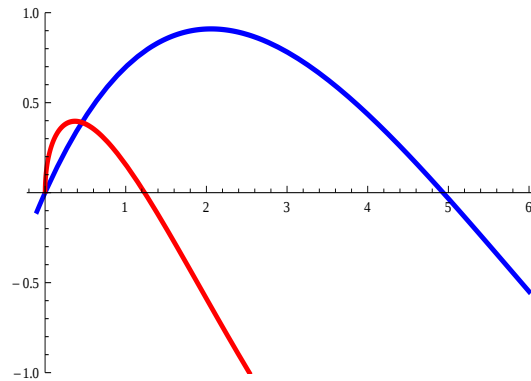


Figura 3.1: As soluções de [1].

[2] Considere a edo:

$$4x y'' + 2y' + y = 0.$$

O único ponto singular da edo é $x_0 = 0$; por outro lado:

$$1. \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{2}{4x} \right] = \frac{1}{2} \mathbf{e},$$

$$2. \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{1}{2x} \right] = 0.$$

3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r-1) + \frac{r}{2} = r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = 0$ e $r_2 = \frac{1}{2}$.

Como $r_1 - r_2 = -\frac{1}{2}$, do teorema de Frobenius, segue que a edo possui duas soluções, linearmente independentes, da forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad \mathbf{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}.$$

Então, procuramos soluções do tipo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \mathbf{e}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Logo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

$$2y' = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) a_n x^{n+r-1},$$

$$4xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1}.$$

A edo pode ser reescrita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(4n+4r-2)] a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

$$r(4r-2)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(4n+4r-2)a_n + a_{n-1}] x^{n+r-1} = 0$$

onde na última série trocamos n por $n-1$. Logo, obtemos:

1. $r(4r-2)a_0 = 0$; como a constante arbitrária $a_0 \neq 0$, então $r(4r-2) = 0$ que é a equação indicial.

2. $(n+r)(4n+4r-2)a_n + a_{n-1} = 0$, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Caso $r = 0$. Do item 2:

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{a_0}{2!}$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{3 \times 4} = -\frac{a_0}{4!}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{5 \times 6} = -\frac{a_0}{6!}$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = -\frac{a_3}{7 \times 8} = -\frac{a_0}{8!}.$$

Em geral: $a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$. Logo, fazendo $a_0 = 1$:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \cos(\sqrt{x}).$$

Caso $r = \frac{1}{2}$. Do item 2:

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{2n(2n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1 \rightarrow b_1 = -\frac{b_0}{2 \times 3} = -\frac{b_0}{3!}$$

$$n = 2 \rightarrow b_2 = -\frac{b_1}{4 \times 5} = -\frac{b_0}{5!}$$

$$n = 3 \rightarrow b_3 = -\frac{b_2}{6 \times 7} = -\frac{b_0}{7!}$$

$$n = 4 \rightarrow b_4 = -\frac{b_3}{8 \times 9} = -\frac{b_0}{9!}.$$

Em geral: $b_n = \frac{(-1)^n b_0}{(2n+1)!}$. Logo, fazendo $b_0 = 1$:

$$y_2(x) = \sqrt{x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)/2}}{(2n+1)!} = \text{sen}(\sqrt{x}).$$

Claramente y_1 e y_2 são l.i. e a solução é:

$$y(x) = c_0 \cos(\sqrt{x}) + c_1 \text{sen}(\sqrt{x}).$$

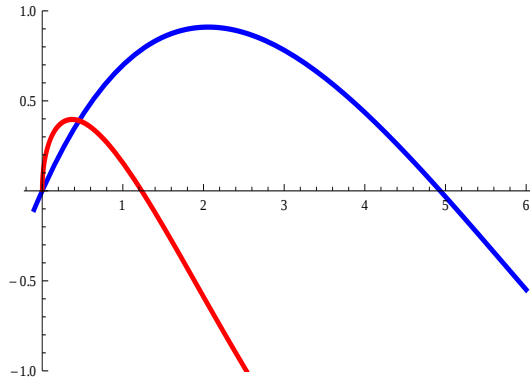


Figura 3.2: As soluções de [2].

[3] Considere a edo:

$$x^2 y'' - x y' - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = 0, \quad x > 0.$$

O único ponto singular da edo é $x_0 = 0$; por outro lado:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[-\frac{1}{x} \right] = -1$ e,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[-\frac{x^2 + 5/4}{x^2} \right] = -\frac{5}{4}$.
3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r-1) - r - \frac{5}{4} = 0;$$

$$\text{e suas raízes são } r_1 = \frac{5}{2} \text{ e } r_2 = -\frac{1}{2}.$$

Como $r_1 - r_2 = 3$, do teorema de Frobenius, segue que a edo possui duas soluções, linearmente independentes, da forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad (a_0 \neq 0) \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} + C y_1(x) \ln(x), \quad (b_0 \neq 0);$$

onde a constante C pode ser nula. Então, procuramos soluções do tipo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \text{e}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}.$$

Logo:

$$\left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{4} a_n x^{n+r},$$

$$x y' = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r},$$

$$x^2 y'' = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r}.$$

A edo pode ser reescrita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + \frac{5}{4} \right] a_n x^{n+r} = 0,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + \frac{5}{4} \right] a_n x^{n+r} = 0$$

onde na última série trocamos n por $n-2$. Então:

$$P(r) a_0 x^r + h(r) a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n-2} + g(r) a_n] x^{n+r} = 0$$

onde $P(r) = r^2 - 2r + \frac{5}{4}$, $h(r) = r^2 + \frac{1}{4}$ e $g(r) = (n+r)(n+r-1) - (n+r) + \frac{5}{4}$.

Logo, obtemos:

1. $P(r) a_0 = 0$; como a constante arbitrária $a_0 \neq 0$, então $r^2 - 2r + \frac{5}{4} = 0$, que é a equação indicial.

2. $h(r) \neq 0$, então $a_1 = 0$.

3. Por outro lado, temos:

$$\left[(n+r)(n+r-2) + \frac{5}{4} \right] a_n - a_{n-2} = 0,$$

para todo $n = 2, 3, \dots$

Caso $r = \frac{5}{2}$. Do item 3:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n+3)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Como $a_1 = 0$, temos que $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. Em geral $a_{2n+1} = 0$, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} n = 2 &\rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2 \times 5} \\ n = 4 &\rightarrow a_4 = \frac{a_2}{4 \times 7} = \frac{a_0}{(2 \times 4) \times (5 \times 7)} \\ n = 6 &\rightarrow a_6 = \frac{a_4}{6 \times 9} = \frac{a_0}{(2 \times 4 \times 6) \times (5 \times 7 \times 9)} \\ n = 8 &\rightarrow a_8 = \frac{a_6}{8 \times 11} = \frac{a_0}{(2 \times 4 \times 6 \times 8) \times (5 \times 7 \times 9 \times 11)}. \end{aligned}$$

Em geral:

$$a_n = \frac{a_0}{(2n)!!(2n+3)!!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = 0,$$

todo $n = 1, 2, 3, \dots$; logo:

$$y_1(x) = a_0 x^{5/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!(2n+3)!!} \right].$$

Para achar y_2 , podemos supor que $C = 0$ e determinamos a série para a segunda raiz da equação indicial.

Caso $r = -\frac{1}{2}$. Do item 3:

$$n(n-3)b_n = b_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Sabemos que $b_0 \neq 0$ e $b_1 = 0$. Por outro lado, se $n = 3$, temos

$$0b_3 = b_1 = 0;$$

logo, b_3 arbitrário. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
n = 2 &\rightarrow b_2 = -\frac{b_0}{2} \\
n = 4 &\rightarrow b_4 = \frac{b_2}{4} = -\frac{b_0}{2 \times 4} \\
n = 5 &\rightarrow b_5 = \frac{b_3}{2 \times 5} \\
n = 6 &\rightarrow b_6 = \frac{b_4}{6 \times 3} = -\frac{b_0}{(2 \times 4 \times 6) \times 3} \\
n = 7 &\rightarrow b_7 = \frac{b_5}{4 \times 7} = \frac{b_3}{(2 \times 4) \times (5 \times 7)} \\
n = 8 &\rightarrow b_8 = \frac{b_6}{5 \times 8} = -\frac{b_0}{(2 \times 4 \times 6 \times 8) \times (3 \times 5)}
\end{aligned}$$

Em geral:

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= -\frac{b_0}{(2n)!! (2n-3)!!} \quad n = 3, 4, \dots \\
b_{2n+1} &= \frac{b_3}{(2n-2)!! (2n+1)!!} \quad n = 2, 3, 4, \dots;
\end{aligned}$$

logo, temos que:

$$y_2(x) = \frac{b_0}{\sqrt{x}} h_1(x) + \frac{b_3}{\sqrt{x}} h_2(x),$$

onde:

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!! (2n-3)!!} \\
h_2(x) &= x^3 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n-2)!! (2n+1)!!} = x^3 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!! (2n+1)!!} \right] \\
&= x^3 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!! (2n+3)!!} \right].
\end{aligned}$$

Então, escrevemos:

$$y_2(x) = \frac{b_0}{\sqrt{x}} h_1(x) + b_3 x^{5/2} h_2(x).$$

Fazendo $b_0 = 0$ e $b_3 = a_0$, temos que $y_2(x) = y_1(x)$; logo y_2 é a solução geral da edo.

[4] Se $y_1(x) = 1$ é uma solução da edo:

$$x y'' + (1 - x) y' = 0, \quad x > 0.$$

Determine a segunda solução l.i. ao redor do ponto $x_0 = 0$.

O único ponto singular da edo é $x_0 = 0$; por outro lado:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1-x}{x} \right] = 1 \text{ e,}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 [0] = 0.$$

3. Logo, a **e.i.** é:

$$r^2 = 0;$$

e suas raízes são $r = r_1 = r_2 = 0$

Como $r_1 - r_2 = 0$, do teorema de Frobenius, segue que a segunda solução da edo, linearmente independentes, é da forma:

$$y_2(x) = \ln(x) y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

Determinemos $y_2 = y_2(x)$.

$$y_2 = \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad y_2' = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} \quad \text{e}$$

$$y_2'' = -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}.$$

Logo, a edo pode ser reescrita:

$$-\frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n = 0,$$

$$b_1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)^2 b_{n+1} - n b_n] x^n = 0$$

onde na primeira série trocamos n por $n-1$. Então:

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ (n+1)^2 b_{n+1} - n b_n = 0, \end{cases}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Logo,

$$b_{n+1} = \frac{n b_n}{(n+1)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1 \rightarrow b_2 = \frac{b_1}{2^2} = -\frac{1}{2(1 \times 2)} = \frac{1}{2 \times 2!}$$

$$n = 2 \rightarrow b_3 = \frac{2 b_2}{3^2} = \frac{1}{3(1 \times 2 \times 3)} = \frac{1}{3 \times 3!}$$

$$n = 3 \rightarrow b_4 = \frac{3 b_3}{4^2} = \frac{1}{4(1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{1}{4 \times 4!}$$

$$n = 5 \rightarrow b_5 = \frac{4 b_4}{5^2} = \frac{1}{5(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)} = \frac{1}{5 \times 5!}.$$

Em geral $a_n = \frac{1}{n n!}$, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$; logo:

$$y_2(x) = \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!}.$$

[5] Considere a edo:

$$x y'' + (x+2) y' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

O único ponto singular da edo é $x_0 = 0$; por outro lado:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{2}{x} + 1 \right] = 2 \text{ e,}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[-\frac{2}{x} \right] = 0.$$

3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r+1) = 0;$$

e suas raízes são $r_1 = 0$ e $r_2 = -1$.

Como $r_1 - r_2 = 1$, do teorema de Frobenius, segue que a edo possui duas soluções, linearmente independentes, da forma:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \quad (a_0 \neq 0) \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} + C y_1(x) \ln(x), \quad (b_0 \neq 0);$$

onde a constante C pode ser nula. Neste exemplo utilizaremos uma estratégia diferente da utilizada nos outros exemplos. Primeiramente procuraremos soluções para $r = 0$:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, & y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \text{e} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n, \\ (x+2)y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^{n-1}, \\ xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

A edo pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1) + 2n] a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n(n+2) + 2(n+1)) a_{n+1} + (n+2) a_n] x^n &= 0 \end{aligned}$$

onde na primeira série trocamos n por $n-1$. Então:

$$(n+2)(n+1) a_{n+1} + (n+2) a_n = 0,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Logo,

$$(n+1) a_{n+1} + a_n = 0,$$

para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e:

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{1} \\ n = 1 &\rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{1 \times 2} \\ n = 2 &\rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{1 \times 2 \times 3} \\ n = 3 &\rightarrow a_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \\ n = 4 &\rightarrow a_5 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}. \end{aligned}$$

Em geral $a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n!}$, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$; logo:

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = a_0 e^{-x}.$$

Para determinar y_2 , utilizaremos redução da ordem. Para isto, consideremos a edo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

e determinamos uma função $v = v(x)$ tal que a segunda solução l.i. da edo é da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, onde:

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

Na edo temos que $p(x) = \frac{2}{x} + 1$ e $q(x) = \frac{2}{x}$. Logo:

$$v(x) = \int \frac{e^x}{x^2} dx.$$

Esta integral não pode ser calculada diretamente. Por outro lado, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; logo, podemos reescrever:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}, \\
\frac{e^x}{x^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}, \\
v(x) &= \int \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)!}.
\end{aligned}$$

Então,

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = e^{-x} \ln(x) + \frac{e^{-x}}{x} \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)!} \right].$$

3.3 A Edo de Bessel

Acharemos a solução geral da edo de Bessel de ordem $\nu \geq 0$:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

O ponto $x = 0$ é o único ponto singular da edo de Bessel. Este ponto é singular regular.

1. $p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{x}{x^2} \right] = 1,$
2. $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \right] = -\nu^2.$
3. Logo, a **e.i.** é:

$$r(r-1) + r - \nu^2 = 0,$$

cujas raízes são $r_1 = \nu$ e $r_2 = -\nu$.

Como $r_1 - r_2 = 2\nu$, devemos estudar os casos $\nu = 0$, $2\nu \in \mathbb{N}$ e $2\nu \notin \mathbb{N}$.

3.4 Edo de Bessel de Ordem Zero

A edo de Bessel de ordem 0 é:

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0,$$

cujas raízes da **e.i.** são $r_1 = r_2 = 0$.

3.4.1 Primeira Solução:

Para $(x > 0)$, procuramos soluções do tipo.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Então:

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2},$$

$$x y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

Logo, a edo pode ser reescrita:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

onde, na última série trocamos $n+2$ por n . Então:

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n^2 a_n + a_{n-2}] x^n = 0.$$

Logo:

1. $a_1 = 0$.

2. $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$ para todo $n = 2, 3, \dots$, então $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ para todo $n = 2, 3, \dots$

Os itens 1 e 2 implicam que $a_{2n+1} = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e:

$$\begin{aligned}
n = 2 &\rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2^2} \\
n = 4 &\rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^4 (1 \times 2)^2} \\
n = 6 &\rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^6 (1 \times 2 \times 3)^2} \\
n = 8 &\rightarrow a_8 = -\frac{a_6}{8^2} = \frac{a_0}{2^8 (1 \times 2 \times 3 \times 4)^2} \\
n = 10 &\rightarrow a_{10} = -\frac{a_8}{10^2} = -\frac{a_0}{2^{10} (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)^2}.
\end{aligned}$$

Em geral:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} (n!)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

escolhendo $a_0 = 1$, a primeira solução é:

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n}.$$

A notação clássica desta solução é:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n}.$$

Observações 3.2.

1. A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. A função J_0 é dita de Bessel de ordem zero de segunda espécie.
3. $J_0(0) = 1$.
4. J_0 é analítica em $(0, +\infty)$. (Analogamente em $(-\infty, 0)$).

3.4.2 Segunda Solução:

Procuramos soluções do tipo:

$$y_2(x) = \ln(x) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

onde $b_0 = 1$ e $x > 0$. Derivando esta última expressão:

$$y_2' = J_0' \ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1},$$

$$y_2'' = J_0'' \ln(x) + \frac{2 J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}.$$

Então:

$$x^2 y_2 = x^2 J_0 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = x^2 J_0 \ln(x) + \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2} x^n,$$

$$x y_2' = x J_0' \ln(x) + J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n,$$

$$x^2 y_2'' = x^2 J_0'' \ln(x) + 2 x J_0' - J_0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n.$$

Utilizando que J_0 é solução da edo de Bessel, temos que:

$$\ln(x) [x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0] = 0;$$

logo, a edo de Bessel pode ser reescrita:

$$2 x J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n = 0,$$

$$2 x J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^n + \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2} x^n = 0,$$

$$2 x J_0' + b_1 x + 4 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2 b_n + b_{n-2}] x^n = 0.$$

Por outro lado:

1. Utilizamos a série de J_0 para achar a de J_0' :

$$J_0' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}, \quad \text{e} \quad 2x J_0' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n-2}(n-1)!n!} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^{2n},$$

$$\text{onde } q_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}(n-1)!(n!)}.$$

2. Separando em termos de ordem par e ímpares da série:

$$\sum_{n=3}^{\infty} [n^2 b_n + b_{n-2}] x^n = S_p + S_i,$$

onde:

$$S_p = \sum_{n=2}^{\infty} [(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2}] x^{2n} \quad \text{e} \quad S_i = \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)^2 b_{2n+1} + b_{2n-1}] x^{2n+1}.$$

Voltando à equação:

$$b_1 x + 4 b_2 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^{2n} + S_p + S_i = 0.$$

Então:

$$b_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)^2 b_{2n+1} + b_{2n-1}] x^{2n+1} + [q_1 + 4 b_2] x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [q_n + (2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2}] x^{2n} = 0,$$

donde obtemos:

1. $b_1 = 0$ e $(2n+1)^2 b_{2n+1} + b_{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, então, $b_{2n+1} = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$
2. $q_1 + 4 b_2 = 0$. Como $q_1 = -1$, obtemos $b_2 = \frac{1}{4}$.
4. $q_n + (2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = 0$, $n = 2, 3, \dots$. Isto é:

$$b_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2} [q_n + b_{2n-2}], \quad n = 2, 3, \dots$$

Então:

$$\begin{aligned} n = 2 &\rightarrow b_4 = -\frac{1}{(2 \times 2)^2} [q_2 + b_2] = -\frac{1}{2^4 (2!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] \\ n = 3 &\rightarrow b_6 = -\frac{1}{(2 \times 3)^2} [q_3 + b_4] = \frac{1}{2^6 (3!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] \\ n = 4 &\rightarrow b_8 = -\frac{1}{(2 \times 4)^2} [q_4 + b_6] = -\frac{1}{2^8 (4!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] \\ n = 5 &\rightarrow b_{10} = -\frac{1}{(2 \times 5)^2} [q_5 + b_8] = -\frac{1}{2^{10} (5!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right]. \end{aligned}$$

Em geral, denotando por $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; então:

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n} (n!)^2}$$

e a segunda solução l.i., é:

$$y_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

A notação clássica desta solução é Y_0 . Para $x < 0$ fazemos $\psi = -x$. Logo, a solução geral da edo de Bessel de ordem zero é:

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x), \quad 0 < |x| < +\infty.$$

Observações 3.3.

1. $J_0(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} Y_0(x) = -\infty$.
2. As únicas soluções limitadas em intervalos do tipo $(0, a)$ são $y(x) = c J_0(x)$.
3. Em muitas aplicações, como segunda solução é utilizada a seguinte combinação:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} [Y_0(x) + (\gamma - \ln(x)) J_0(x)],$$

onde $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln(n)) \cong 0.57721 \dots$ é a constante de Euler.

4. A função N_0 é chamada de Neumann-Bessel de ordem zero.
5. Os gráficos de J_0 e Y_0 :

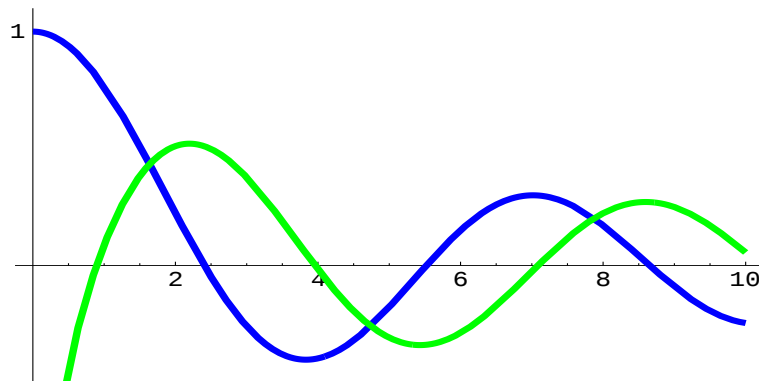


Figura 3.3: Gráficos de J_0 (azul) e Y_0 (verde).

3.5 Função Gama

Se $x > 0$, a função Gama é definida e denotada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Utilizando integração por partes, temos:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

Se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \dots 2 \times 1 \times \Gamma(1).$$

Como:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Logo, se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. De fato, fazendo $t = u^2$ temos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

então:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{-v^2} du dv = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv.$$

Utilizando coordenadas polares, obtemos o resultado. Veja [VC2].

Se $\nu \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+\nu+1) &= (n+\nu) \Gamma(n+\nu) \\ &= (n+\nu)(n+\nu-1) \Gamma(n+\nu-1) \\ &\vdots \\ &= (n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2) \dots (\nu+1) \Gamma(\nu+1). \end{aligned}$$

Por outro lado, para $x > 0$ temos:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

Definamos primeiramente a função Γ , para $-1 < x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-0.2) = -\frac{1}{0.2} \Gamma(-0.2+1) = -\frac{1}{0.2} \Gamma(0.8).$$

Logo, podemos definir a função Γ , para $-2 < x < -1$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-1.2) = -\frac{1}{1.2} \Gamma(-1.2+1) = -\frac{1}{1.2} \Gamma(-0.2) = \frac{1}{0.2} \frac{1}{1.2} \Gamma(0.8).$$

Continuando este processo, podemos definir a função Γ , para $x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

3.6 Edo de Bessel de Ordem $\nu > 0$

A edo de Bessel de ordem $\nu > 0$ é:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

As raízes da **e.i.** são $r = \pm\nu$. Então, procuramos soluções do tipo:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, & y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad \text{e} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} (x^2 - \nu^2) y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n x^{n+r}, \\ x y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r}, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r}. \end{aligned}$$

A edo pode ser reescrita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n^2 + 2nr + r^2 - \nu^2] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)^2 - \nu^2] a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0,$$

onde na última série trocamos $n+2$ por n . Logo,

$$(r^2 - \nu^2) a_0 x^r + [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)^2 - \nu^2] a_n + a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Temos:

1. $(r^2 - \nu^2) a_0 x^r = 0$; como $a_0 \neq 0$ é arbitrário, $r^2 - \nu^2 = 0$ é a **e.i.**
2. $[(r+1)^2 - \nu^2] a_1 x^{r+1} = 0$.
3. $[(n+r)^2 - \nu^2] a_n + a_{n-2} = 0$ para $n = 2, 3, \dots$

3.6.1 Primeira solução:

Para $r_1 = \nu$:

1. Como $[(\nu-1)^2 - \nu^2] a_1 x^{r+1} = 0$, então $a_1 = 0$.
2. A recorrência da série é:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Como $a_1 = 0$, utilizando a recorrência, obtemos: $a_{2n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do item 2, temos:

$$\begin{aligned} n=2 \rightarrow a_2 &= -\frac{a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)} \\ n=4 \rightarrow a_4 &= -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4(1 \times 2)(1+\nu)(2+\nu)} \\ n=6 \rightarrow a_6 &= -\frac{a_4}{6(6+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^6(1 \times 2 \times 3)(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} \\ n=8 \rightarrow a_8 &= -\frac{a_6}{8(8+2\nu)} = \frac{a_0}{2^8(1 \times 2 \times 3 \times 4)(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)(4+\nu)} \\ n=10 \rightarrow a_{10} &= -\frac{a_8}{10(10+2\nu)} \\ a_{10} &= -\frac{a_0}{2^{10}(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)(4+\nu)(5+\nu)}. \end{aligned}$$

Em geral:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1 + \nu) (2 + \nu) \dots (n + \nu)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a primeira solução é:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 x^{2n+\nu}}{2^{2n} n! (1 + \nu) (2 + \nu) \dots (n + \nu)}.$$

Se $\nu \in \mathbb{N}$, escolhemos $a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$; então:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n + \nu)!}.$$

Em geral, escolhendo $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ na solução da equação de Bessel, a primeira solução pode ser escrita:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n + \nu) (n + \nu - 1) (n + \nu - 2) \dots (\nu + 1) \Gamma(\nu + 1)}.$$

A série converge para todo $x > 0$. A notação clássica da primeira solução da edo de Bessel é $J_\nu(x)$ e é chamada função de Bessel de ordem ν . Logo, utilizando a função Γ , a primeira solução, pode ser escrita desta única forma:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu}.$$

Note que $J_\nu(0) = 0$. Alguns gráficos da função J_ν :

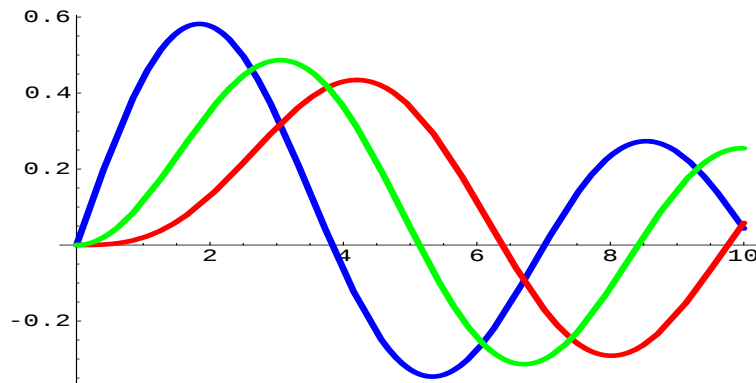


Figura 3.4: Gráficos de J_1 (azul), J_2 (verde) e J_3 (vermelho).

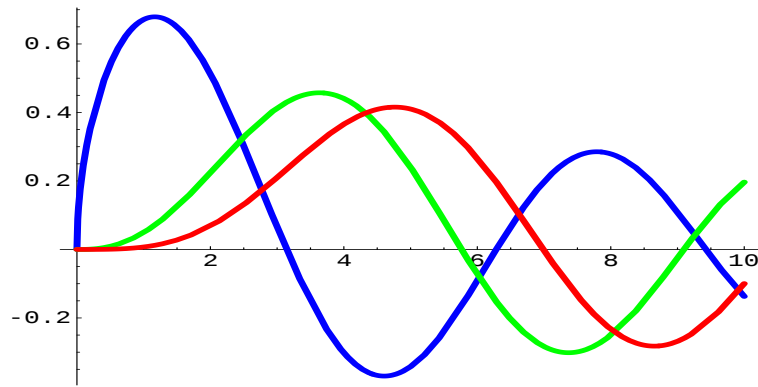


Figura 3.5: Gráficos de $J_{3/2}$ (azul), $J_{5/2}$ (verde) e $J_{7/2}$ (vermelho).

3.6.2 Segunda Solução

Se $r = -\nu$, a segunda solução linearmente independente da edo de Bessel depende de:

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2\nu \in \mathbb{N} & \text{ou} \\ 2\nu \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Primeiro Caso

Se $2\nu \notin \mathbb{N}$, então para $-\nu$, obtemos:

1. $[(-\nu - 1)^2 - \nu^2] a_1 x^{r+1} = 0$; logo, $a_1 = 0$.
2. A recorrência da série é:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Como $a_1 = 0$, utilizando a recorrência, obtemos: $a_{2n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do item 2, temos:

$$\begin{aligned}
n = 2 &\rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2(2-2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1-\nu)} \\
n = 4 &\rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4(4-2\nu)} = \frac{a_0}{2^4(1 \times 2)(1-\nu)(2-\nu)} \\
n = 6 &\rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6(6-2\nu)} = -\frac{a_0}{2^6(1 \times 2 \times 3)(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} \\
n = 8 &\rightarrow a_8 = -\frac{a_6}{8(8-2\nu)} = \frac{a_0}{2^8(1 \times 2 \times 3 \times 4)(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)(4-\nu)} \\
n = 10 &\rightarrow a_{10} = -\frac{a_8}{10(10-2\nu)} \\
a_{10} &= -\frac{a_0}{2^{10}(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)(4-\nu)(5-\nu)}.
\end{aligned}$$

Em geral:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1-\nu)(2-\nu) \dots (n-\nu)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a segunda solução é:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 x^{2n-\nu}}{2^{2n} n! (1-\nu)(2-\nu) \dots (n-\nu)}.$$

Com as notações utilizadas anteriormente, podemos reescrever a segunda solução l.i., como:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n-\nu+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n-\nu}.$$

Note que ambas as soluções são dadas por:

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n-\nu+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n-\nu}.$$

Logo, a solução geral é:

$$y(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad 0 < |x| < +\infty.$$

Segundo Caso

Se $2\nu \in \mathbb{N}$, a segunda solução é do tipo:

$$y_2(x) = C J_{\nu}(x) \ln(x) + x^{-\nu} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \right],$$

onde a constante C pode ser nula.

Se $2\nu \in \mathbb{N}$ e $\nu \notin \mathbb{Z}$ a constante é zero. Isto é, $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ são linearmente independentes. Logo, a solução geral é:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad \text{onde} \quad \nu = n + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para verificar que $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ são linearmente independentes, primeiramente observamos que:

$$\frac{d}{dx} [x W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)]] = 0,$$

logo $W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \frac{c}{x}$. Se $\nu \notin \mathbb{Z}$, utilizando a definição de $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ não é difícil ver que $c \neq 0$.

Se $2\nu \in \mathbb{N}$, então para $\nu = n$ mostraremos que $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n$, isto é, são linearmente dependentes. De fato:

$$J_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k-n)!} \left[\frac{x}{2} \right]^{2k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k-n)!} \left[\frac{x}{2} \right]^{2k-n},$$

pois, o termo $\frac{1}{(k-n)!} = 0$ se $k = 0, 1, \dots, n-1$; logo, trocando k por $k+n$:

$$J_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k! (k+n)!} \left[\frac{x}{2} \right]^{2k+n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left[\frac{x}{2} \right]^{2k+n} = (-1)^n J_n.$$

Logo, $\{J_n(x), J_{-n}(x)\}$ não é um conjunto fundamental de soluções da edo de Bessel. A segunda solução deve ser obtida a partir de:

$$y_2(x) = C J_n(x) \ln(x) + x^{-n} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \right].$$

O procedimento para achar esta segunda solução é análogo ao caso em que $\nu = 0$, apenas envolvendo muito mais cálculos, os quais ficam fora do contexto destas notas. Utilizando as notações anteriores, a segunda solução é denotada e dada por:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_n(x) \left(\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{2^{2k-n+1} n!} x^{2k-n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (H_k + H_{n+k})}{2^{2k+n+1} k! (n+k)!} x^{2k+n} \right].$$

As funções J_n e Y_n são linearmente independentes para $x > 0$. A solução geral da edo de Bessel de ordem n é:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \quad 0 < |x| < +\infty.$$

Observações 3.4.

1. Quando $\nu \notin \mathbb{N}$ definimos a função Y_ν da seguinte forma:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\nu \pi)} \left[J_\nu(x) \cos(\nu \pi) - J_{-\nu}(x) \right].$$

2. Se $\nu \notin \mathbb{N}$, a solução geral pode ser escrita:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) = \left[c_1 + c_2 \frac{\cos(\nu \pi)}{\operatorname{sen}(\nu \pi)} \right] J_\nu - \frac{c_2}{\operatorname{sen}(\nu \pi)} J_{-\nu}(x) \\ &= C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \end{aligned}$$

onde $C_1 = c_1 + c_2 \frac{\cos(\nu \pi)}{\operatorname{sen}(\nu \pi)}$ e $C_2 = -\frac{c_2}{\operatorname{sen}(\nu \pi)}$.

3. Claramente, Y_ν não é definida para $\nu \in \mathbb{N}$ e que $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ são linearmente independentes.

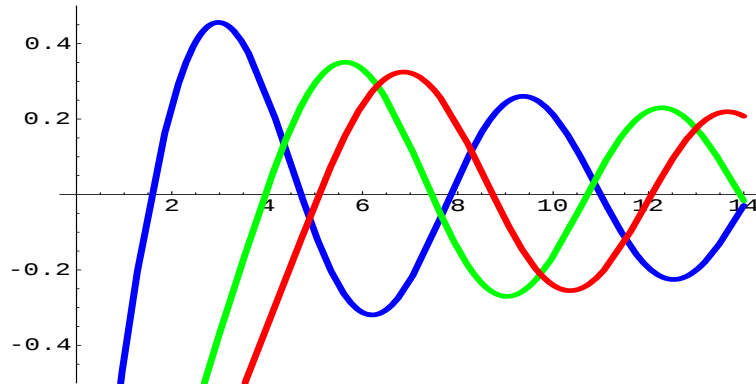


Figura 3.6: Gráficos de $Y_{1/2}$ (azul), $Y_{5/2}$ (verde) e $Y_{7/2}$ (vermelho).

4. É possível provar que:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu.$$

5. A função Y_ν é chamada função de Neumann-Bessel de ordem ν .

6. Alguns gráficos da função Y_ν :

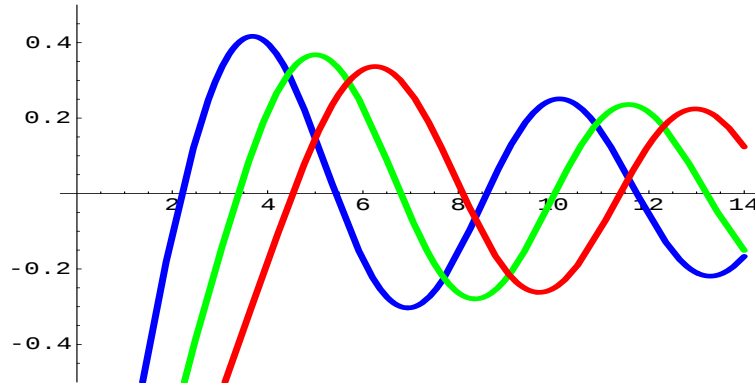


Figura 3.7: Gráficos de Y_1 (azul), Y_2 (verde) e Y_3 (vermelho).

Em resumo, temos:

Teorema 3.2. *Seja a equação de Bessel de ordem $\nu \geq 0$:*

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

1. *Se $\nu \notin \mathbb{Z}$, a solução geral é:*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

2. *Se $\nu = n \in \mathbb{N}$, a solução geral é:*

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x).$$

3. *Se ν é arbitrário, a solução geral é:*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x).$$

3.7 Exemplos e Aplicações

[1] Considere a edo de Bessel de ordem $\nu = \frac{1}{2}$, $x > 0$:

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

A solução geral:

$$y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x),$$

onde

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n + \frac{1}{2} + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+1/2}.$$

Da definição da função Gama, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)(2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}.$$

Então $\Gamma(n+1) \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}$. Dos itens anteriores, temos:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x).$$

De forma análoga:

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x),$$

e a solução geral da edo de Bessel de ordem $\nu = \frac{1}{2}$ é:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x)].$$

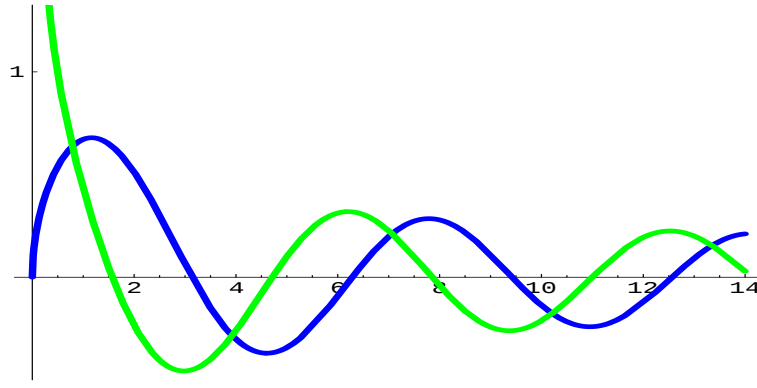


Figura 3.8: Gráficos de $J_{1/2}$ (azul) e $J_{-1/2}$ (verde) .

[2] Verifique que:

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x).$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 J'_{\nu}(x).$$

Como $J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu}$, temos que:

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) \pm J_{\nu+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu-1} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 2)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + \nu)}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu-1} \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(n + \nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu-1} \\ &= \frac{\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{\nu-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu-1} [n + \nu \pm (-1)^{-1} n]. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \nu \left[\frac{x}{2} \right]^{-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu} \right] \\ &= \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= \\
&= \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{\nu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\nu)}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2n+\nu-1} \right] \\
&= 2 J'_{\nu}(x).
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x)$, temos que:

$$\begin{aligned}
J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} [\operatorname{sen}(x) - x \cos(x)] \\
J_{-3/2}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} [\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)], \\
J_{5/2}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x^5}} [(x^2 - 3) \operatorname{sen}(x) + 3x \cos(x)] \\
J_{-5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}} [(3 - x^2) \cos(x) + 3x \operatorname{sen}(x)].
\end{aligned}$$

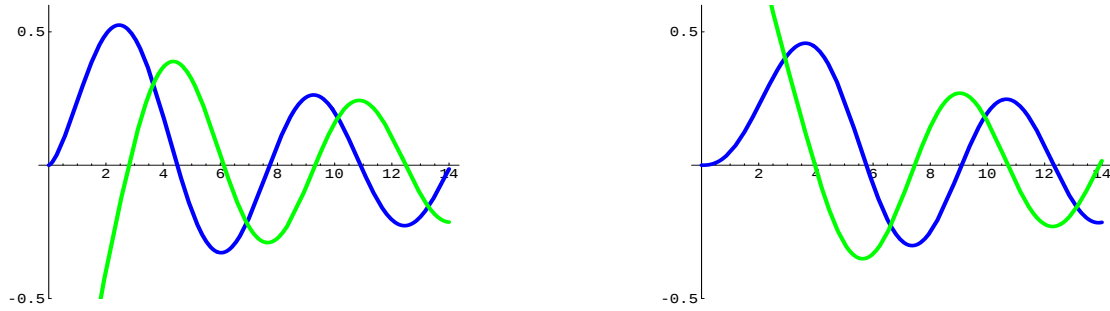


Figura 3.9: Gráficos de $J_{3/2}$, $J_{-3/2}$ e $J_{5/2}$, $J_{-5/2}$, respectivamente.

[3] As edo's do tipo:

$$x y'' + (1 - 2n) y' + x y = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

tem como solução particular $y(x) = x^n J_n(x)$.

De fato, derivando:

$$\begin{aligned}
x y &= x^{n+1} J_n(x) \\
(1 - 2n) y' &= (1 - 2n) x^{n-1} (n J_n(x) + x J'_n(x)) \\
x y'' &= x^{n-1} ((n^2 - n) J_n(x) + 2n x J'_n(x) + x^2 J''_n(x)).
\end{aligned}$$

Substituindo na edo:

$$x y'' + (1 - 2n) y' + x y = x^{n-1} [x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x)] = 0,$$

onde utilizamos que J_n é solução da edo de Bessel de ordem n . Por exemplo, a edo:

$$x y'' - y' + x y = 0,$$

tem como solução particular $y = x J_1(x)$.

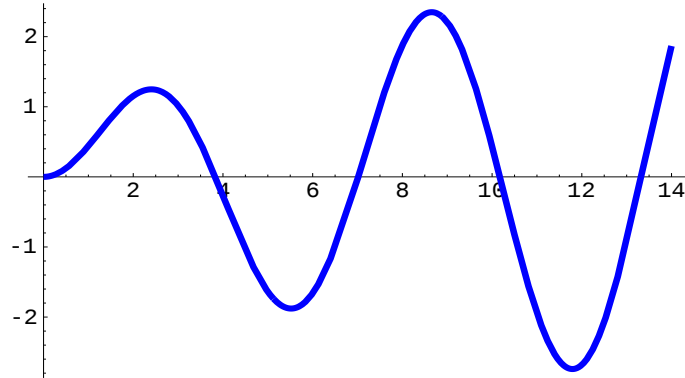


Figura 3.10: Gráfico de $y(x) = x J_1(x)$.

Diversas edo's que não são de Bessel podem ser reduzidas a edo's de Bessel através de uma mudança de variáveis. A seguir apresentaremos alguns exemplos.

[4] Ache a solução geral de:

$$x y'' + y' + k^2 x y = 0; \quad x > 0, k \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando a edo por x :

$$x^2 y'' + x y' + k^2 x^2 y = 0.$$

Fazendo $u = k x$, temos $u' = k$, e a edo fica:

$$u^2 y'' + u y' + u^2 y = 0.$$

Que é uma edo de Bessel zero para $y = y(u)$, logo a solução geral é: $y(u) = c_1 J_0(u) + c_2 Y_0(u)$. Voltando as variáveis originais:

$$y(x) = c_1 J_0(k x) + c_2 Y_0(k x).$$

[5] A edo:

$$4x^2 y'' + 4x y' + \left[x - \frac{1}{36}\right] y = 0, \quad x > 0,$$

não é de Bessel. Fazendo $z = \sqrt{x}$ ou $z^2 = x$ e utilizando a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{1}{4z^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz}; \end{aligned}$$

logo, a edo pode ser reescrita:

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + \left[z^2 - \frac{1}{36}\right] y(z) = 0.$$

Então, $\nu = \pm \frac{1}{6}$ e a solução é $y(z) = c_1 J_{1/6}(z) + c_2 J_{-1/6}(z)$, isto é:

$$y(x) = c_1 J_{1/6}(\sqrt{x}) + c_2 J_{-1/6}(\sqrt{x}).$$

[6] Em geral, toda edo da forma:

$$t^2 u''(t) + (1 - 2a)t u'(t) + (b^2 c^2 t^{2c} + a^2 - \nu^2 c^2) u(t) = 0, \quad a, b, c, \nu \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

pode ser transformada numa edo de Bessel de ordem ν . De fato, fazendo:

$$u(t) = t^a y(x) \quad \text{e} \quad x = b t^c,$$

obtemos:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Por exemplo:

A edo de Airy $u'' + t u = 0$. Para $t > 0$, consideramos:

$$t^2 u'' + t^3 u = 0$$

Logo, é uma edo do tipo 3.2 para $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{3}{2}$ e $\nu = \frac{1}{3}$. Então, com as mudanças:

$$u(t) = \sqrt{t} y(x) \quad \text{e} \quad x = \frac{2}{3} t^{3/2},$$

temos uma edo de Bessel de ordem $1/3$ e $y(x) = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$. Voltando as variáveis originais:

$$u(t) = \sqrt{t} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right) \right].$$

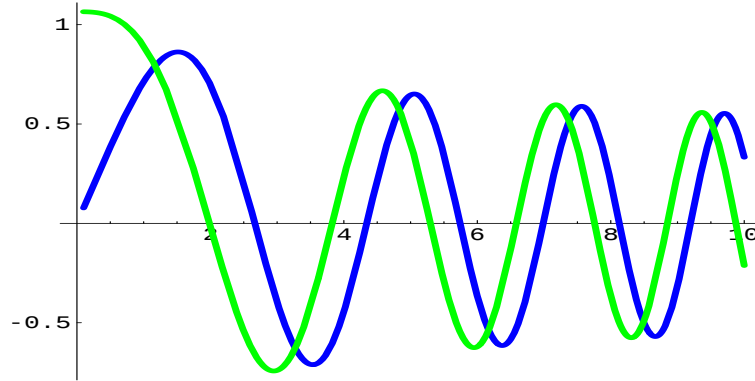


Figura 3.11: Gráficos para $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ (azul), $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ (verde).

Consideremos:

$$(r_0 + vt) \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2v \frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0.$$

Esta edo representa a evolução do movimento, para pequenas oscilações, (lembrando que $\sin(\theta) \simeq \theta$), de um pêndulo, onde a corda do pêndulo tem comprimento variável $r = r(t)$, com taxa de variação constante v e tal que $r(0) = r_0$.

Simplificamos a edo fazendo $x = \frac{r_0 + tv}{v}$ e obtemos:

$$xv \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2v \frac{d\theta}{dx} + g\theta = 0;$$

multiplicando a edo por xv^{-1} , temos:

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} + \frac{gx}{v} \theta = 0,$$

substituindo x por t :

$$t^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2t \frac{d\theta}{dt} + \frac{gt}{v} \theta = 0,$$

que é uma edo do tipo (3.2): para $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2\sqrt{\frac{g}{v}}$, $c = \frac{1}{2}$ e $\nu = 1$. Fazendo:

$$\theta(t) = \frac{y(x)}{\sqrt{t}} \quad \text{e} \quad x = b\sqrt{t},$$

obtemos:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0.$$

Logo, a solução é:

$$y(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Por outro lado $\theta(t) = t^{-1/2} y(x)$ e $x = 2\sqrt{t}$, logo:

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} [c_1 J_1(2\sqrt{t}) + c_2 Y_1(2\sqrt{t})].$$

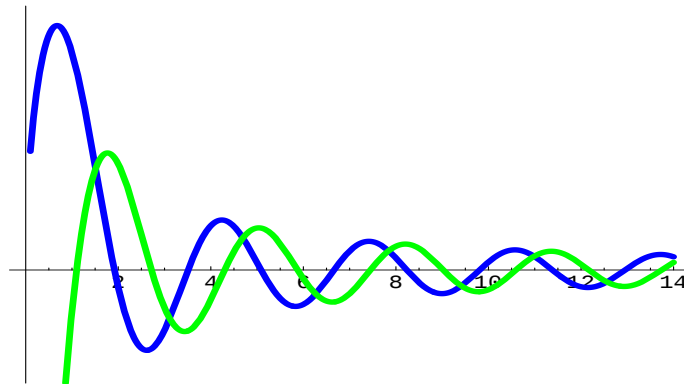


Figura 3.12: Gráfico de $\theta(t)$ para $c_1 = 0$ e para $c_2 = 0$.

3.8 Exercícios

1. Utilizando o método de Frobenius, achar as soluções ao redor do ponto singular regular $x_0 = 0$ das seguintes edo's:

a) $4x y'' + 2y' + y = 0$

b) $2x y'' + 3y' - y = 0$

c) $2x y'' - y' - y = 0$

d) $3x y'' + 2y' + 2y = 0$

e) $2x^2 y'' + x y' - (1 + 2x^2) y = 0$

f) $2x^2 y'' + x y' - (3 - 2x^2) y = 0$

g) $6x^2 y'' + 7x y' - (x^2 + 2) y = 0$

h) $3x^2 y'' + 2x y' + x^2 y = 0$

i) $2x y'' + (1 + x) y' + y = 0$

j) $2x y'' + (1 - 2x^2) y' - 4x y = 0$

2. Determine a solução da edo de Bessel para $\nu = \frac{3}{2}$ e $\nu = \frac{5}{2}$.

3. Utilizando 3.2, determine a solução de:

a) $t^2 u'' + (t^2 - 15/4) u = 0$

b) $t^2 u'' + t u' + (r^2 t^{2s/n} - s^2) u = 0$

c) $u'' + r^2 t^{(1-2n)/n} u = 0$

4. Verifique:

a) $\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu) = x^\nu J_{\nu-1}$

b) $\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_{-\nu}) = x^{-\nu} J_{\nu+1}$

c) $x J_{\nu+1} - 2\nu J'_\nu + x J_{\nu-1} = 0$

d) $J_{\nu+1} + 2J'_\nu - J_{\nu-1} = 0$

e) $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \right]$

f) $J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3 \sin(x)}{x^2} - \frac{3 \cos(x)}{x} - \sin(x) \right]$

g) $Y'_\nu + \frac{\nu}{x} Y_\nu = Y_{\nu-1}$

h) $Y_{\nu-1} - Y_{\nu+1} = 2Y'_\nu$

5. **Edo de Laguerre:** Seja $\alpha > 0$; a edo de Laguerre de ordem α é:

$$x y'' + (1 - x) y' + \alpha y = 0.$$

6. Verifique que uma das soluções da edo de Laguerre é:

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1) x^n}{(n!)^2 \Gamma(\alpha - n + 1)} \right].$$

7. Se $\alpha = m \in \mathbb{N}$, verifique que:

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n!} \binom{m}{n} x^n \right].$$

Ache o raio de convergência da solução.

8. Considerando $a_0 = m!$, temos:

$$L_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n m!}{n!} \binom{m}{n} x^n.$$

$L_m(x)$ são ditos polinômios de Laguerre de ordem m . Esboce o gráfico de $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ e $L_4(x)$.

9. Verifique que:

$$L_m(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

10. Fazendo:

$$y_2(x) = L_m(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

obtenha a segunda solução da edo de Laguerre:

$$y_2(x) = L_m(x) \ln(x) + LAG_1(x, m, n) + LAG_2(x, m, n),$$

onde:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$LAG_1(x, m, n) = \sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{m!}{n!} \binom{m}{n} \left[H_{m-n} - H_m - 2 H_n \right] x^n$$

$$LAG_2(x, m, n) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! x^{n+m}}{(m+1)^2 (m+2)^2 \dots (m+n)^2}.$$

