

Funções de Várias variáveis

Nesta seção estudaremos funções de duas ou mais variáveis

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}, \text{ com } n \geq 2)$$

ções de duas variáveis: Uma função de duas variáveis é simplesmente aquela que associa a cada par ordenado de números reais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um único valor real denotado por $f(x, y)$.

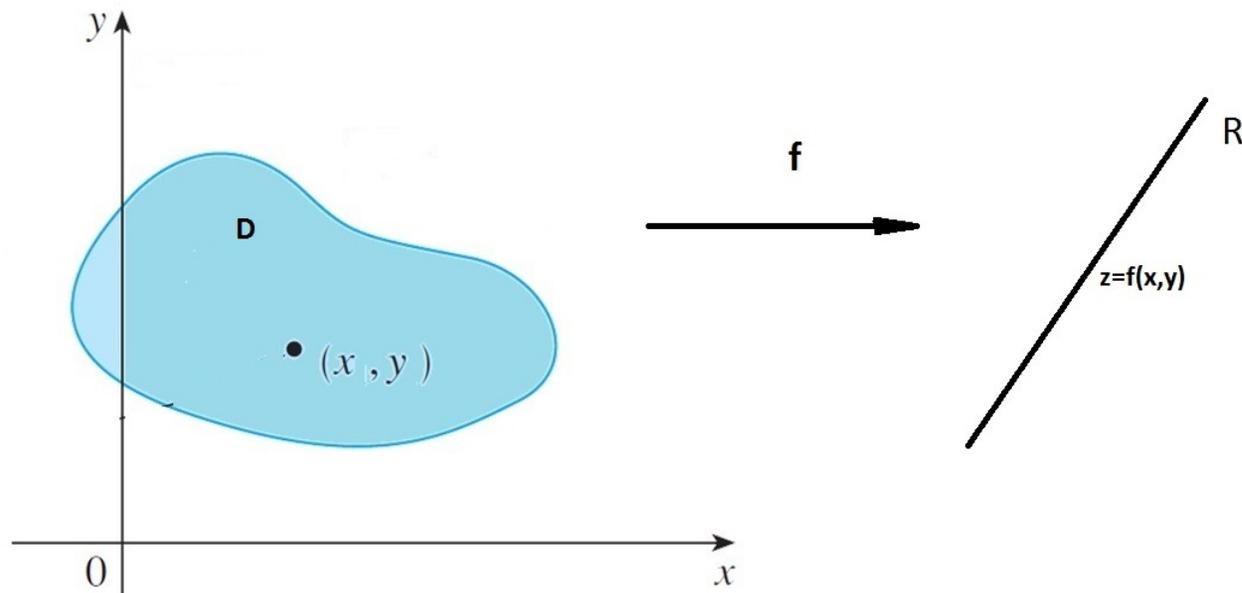
Definição .1 (Domínio de uma função) *Dada uma função*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

define-se o **domínio de f** por

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists^1 z \in \mathbb{R}, f(x, y) = z\}$$

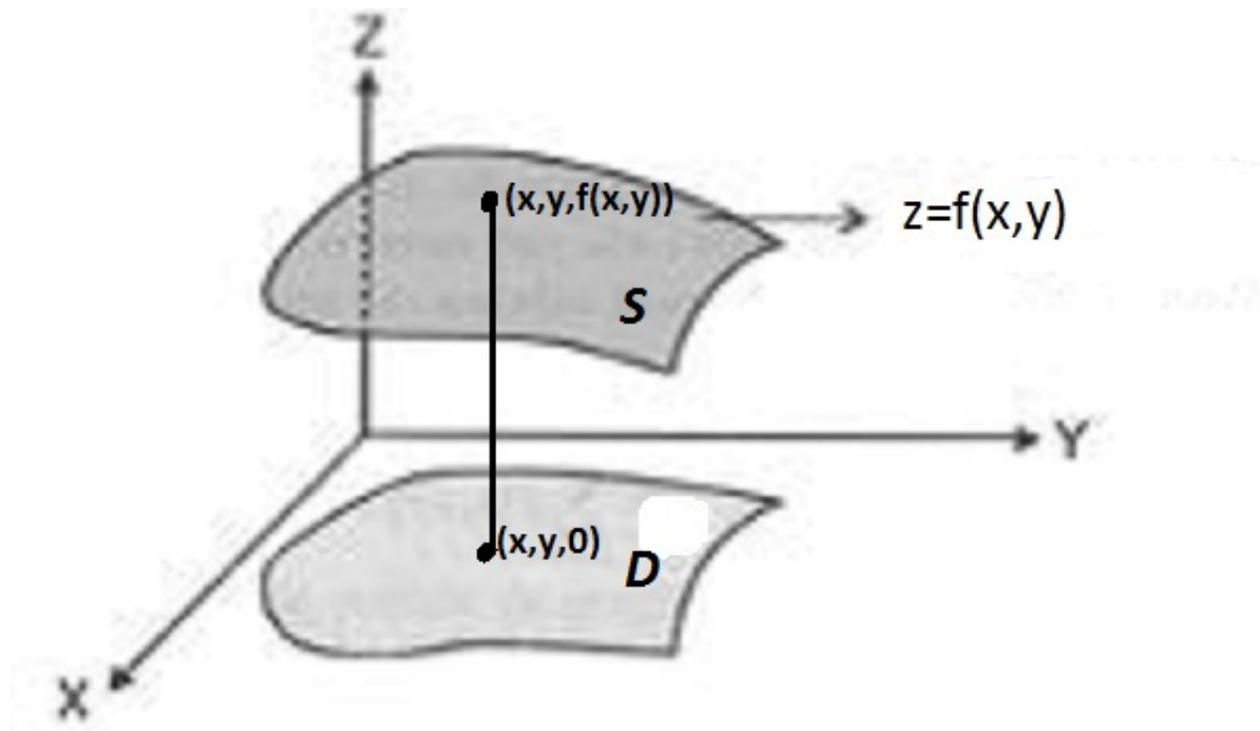
Uma maneira de visualizar essa função é pelo diagrama de setas, no qual o domínio D é representado como um subconjunto do plano xy .



Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

Definição .2 *Se f é uma função de duas variáveis com domínio D , então o gráfico de f é o conjunto:*

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \text{tal que } z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D_f\}$$



Exemplo:

Determine o domínio das seguintes funções e represente-o geometricamente:

$$1. f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$2. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$3. f(x, y) = \sqrt{4-y^2}$$

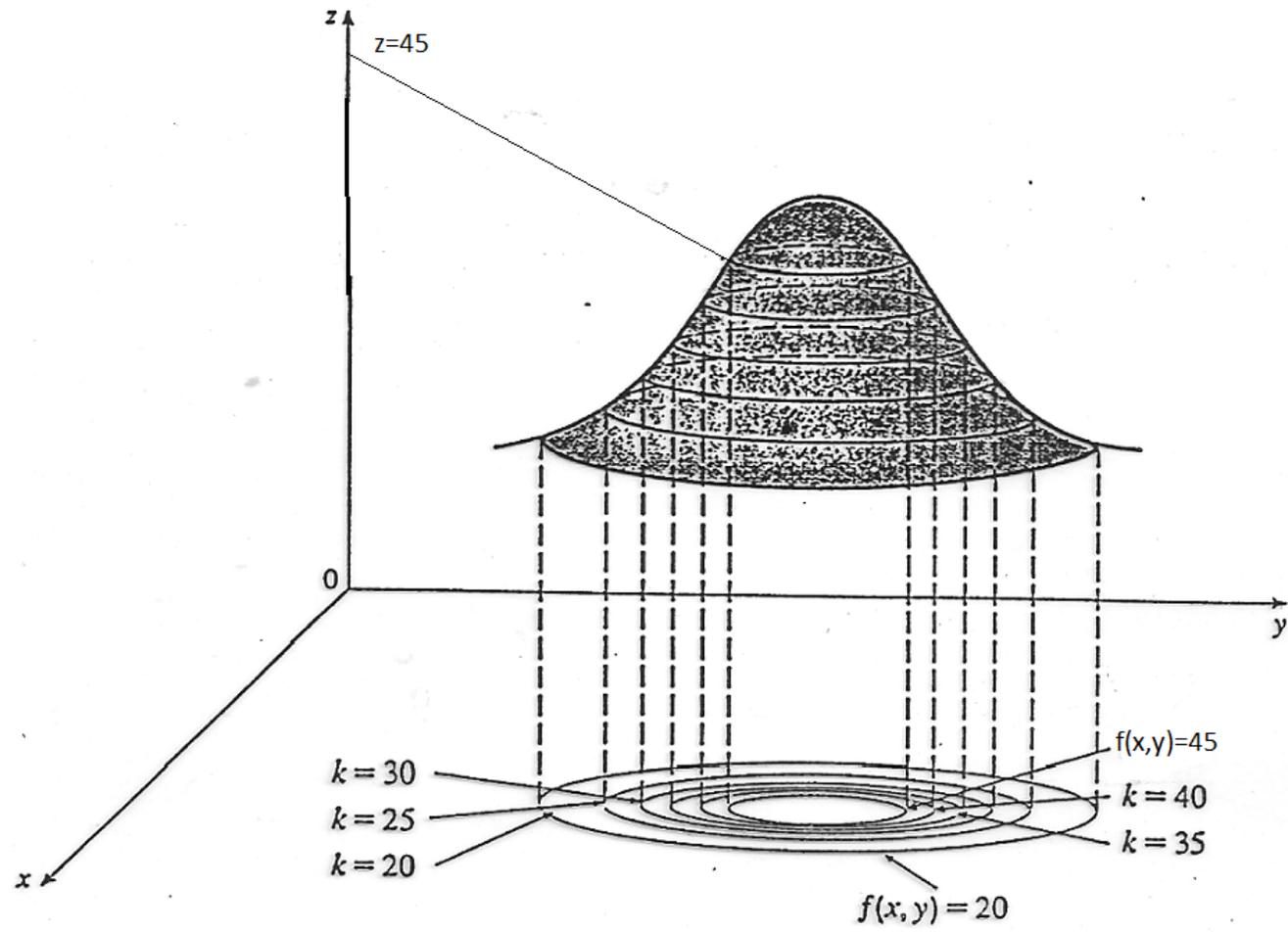
$$4. f(x, y) = \ln\left(\frac{x-y}{2x}\right)$$

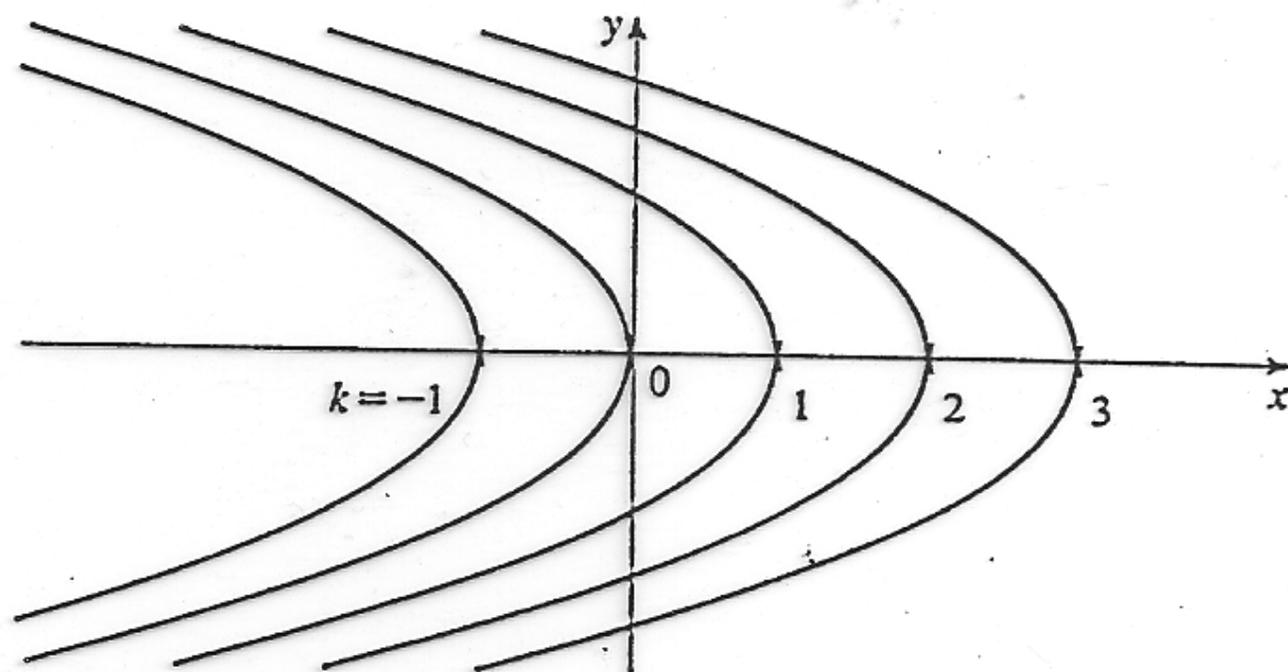
$$5. f(x, y) = \sqrt{y-2x^2}$$

Curva ou Linha de Nível

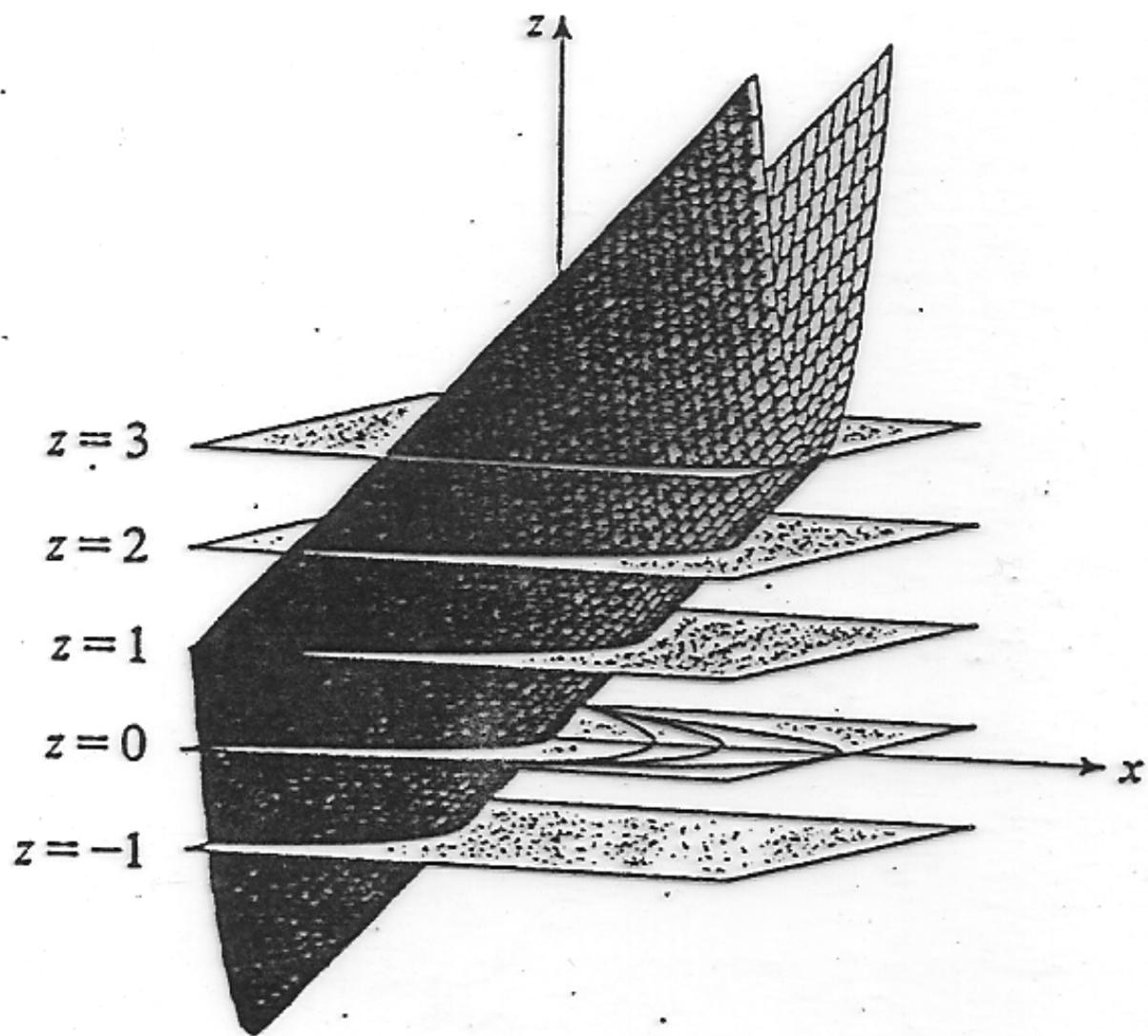
Definição .3 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se curva ou linha de nível k ao conjunto:*

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k, \text{ com } (x, y) \in D_f\}$$

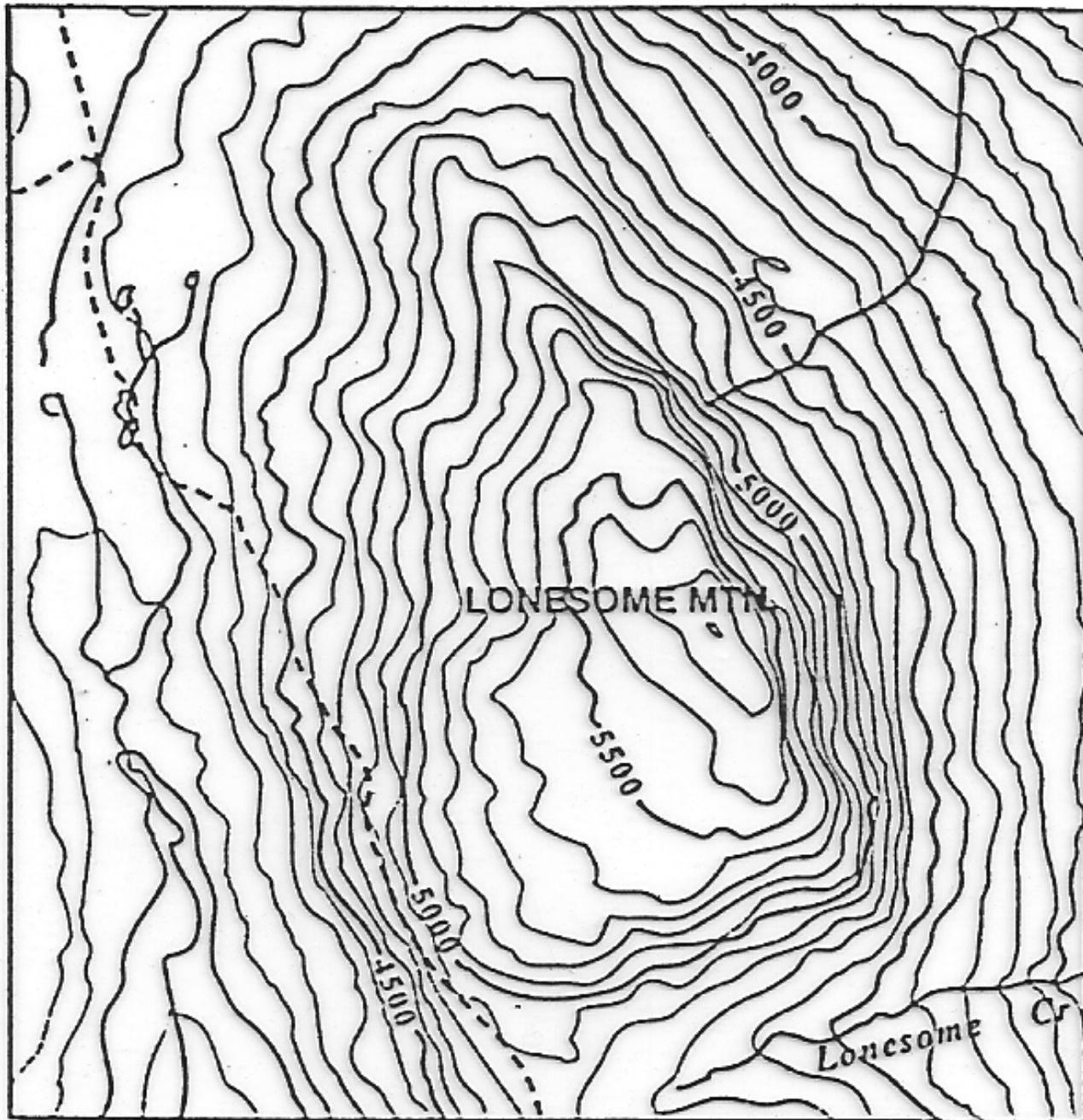


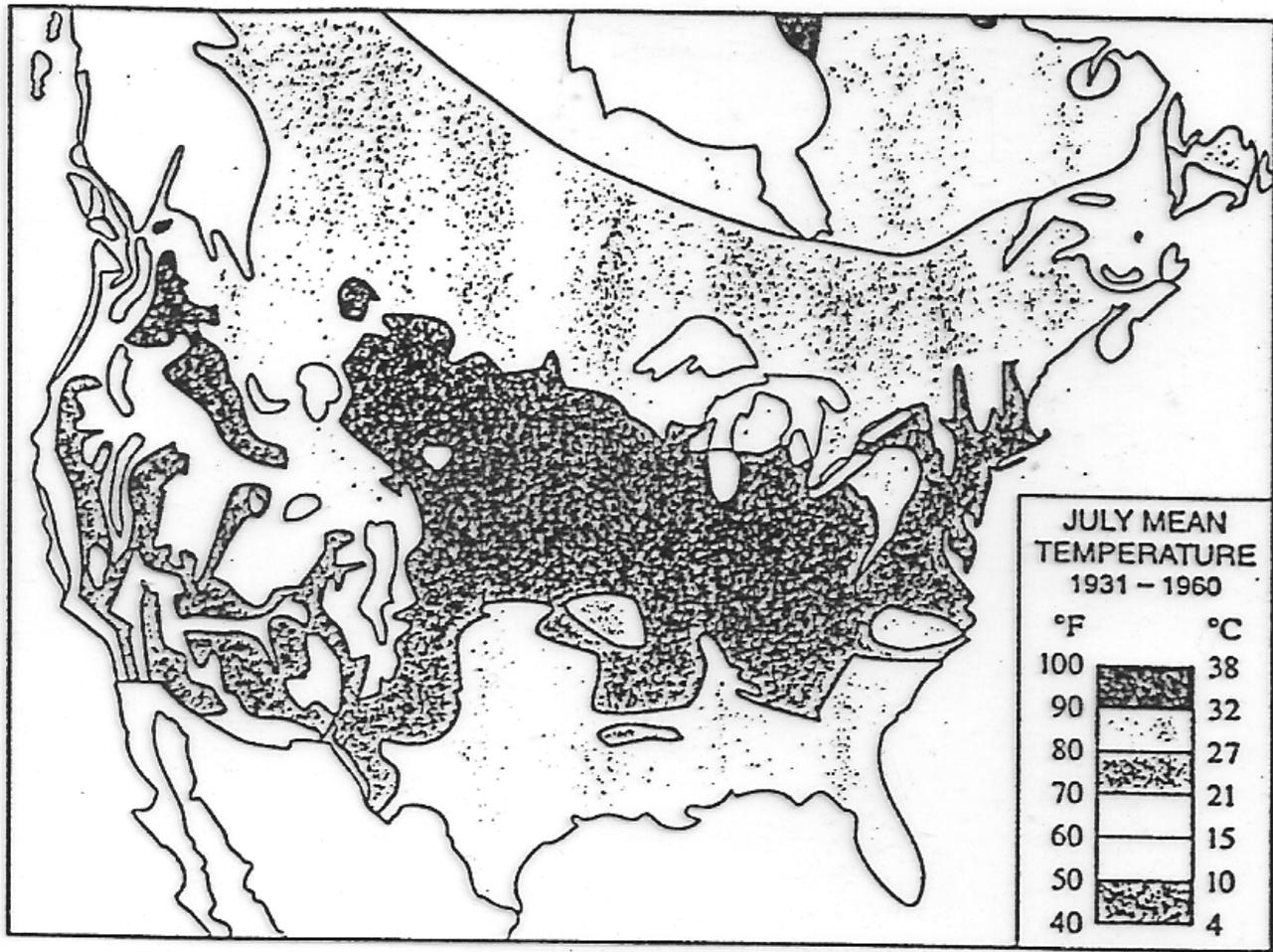


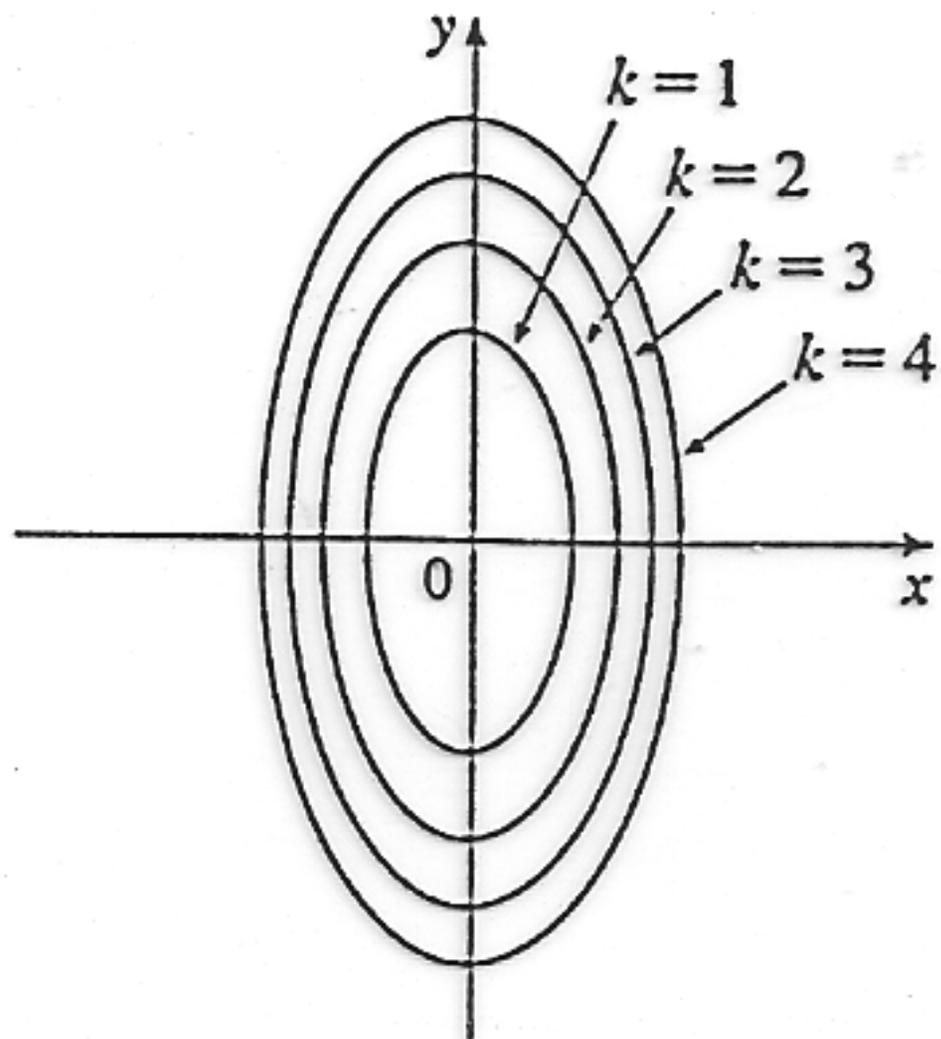
(a) Contour map of $f(x, y) = x + y^2$



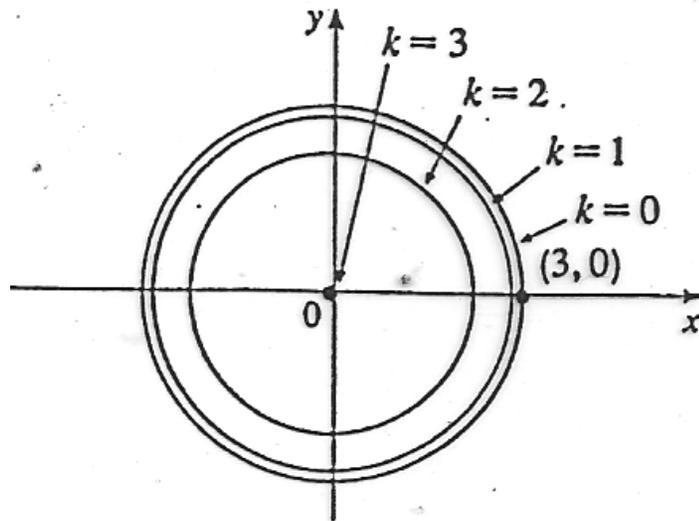
(b) Graph of $f(x, y) = x + y^2$



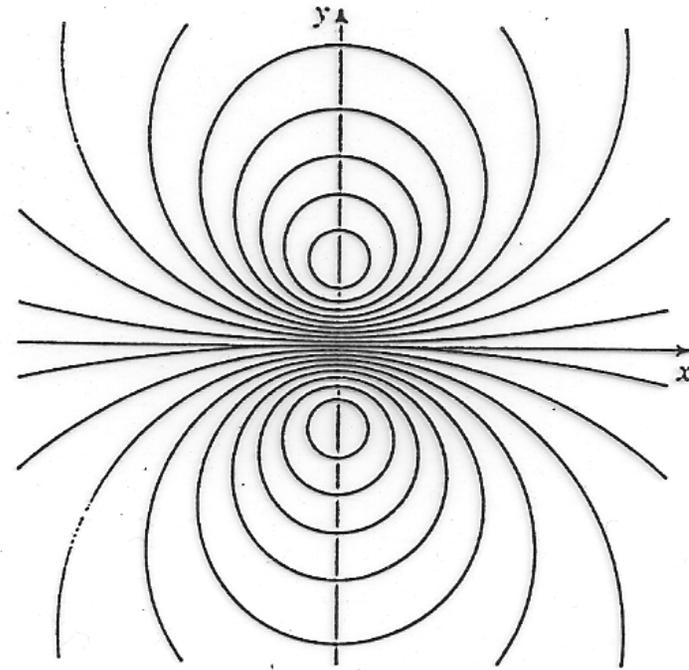




Contour map of $h(x, y) = 4x^2 + y^2$



Contour map of
 $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



(c) Level curves of $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Exercícios: Calcule algumas linhas de nível das funções que se seguem até conseguir fazer um esboço do gráfico da função:

1. $f(x, y) = xy$

2. $f(x, y) = x^2 - y^2$

3. $f(x, y) = y - \cos(x)$

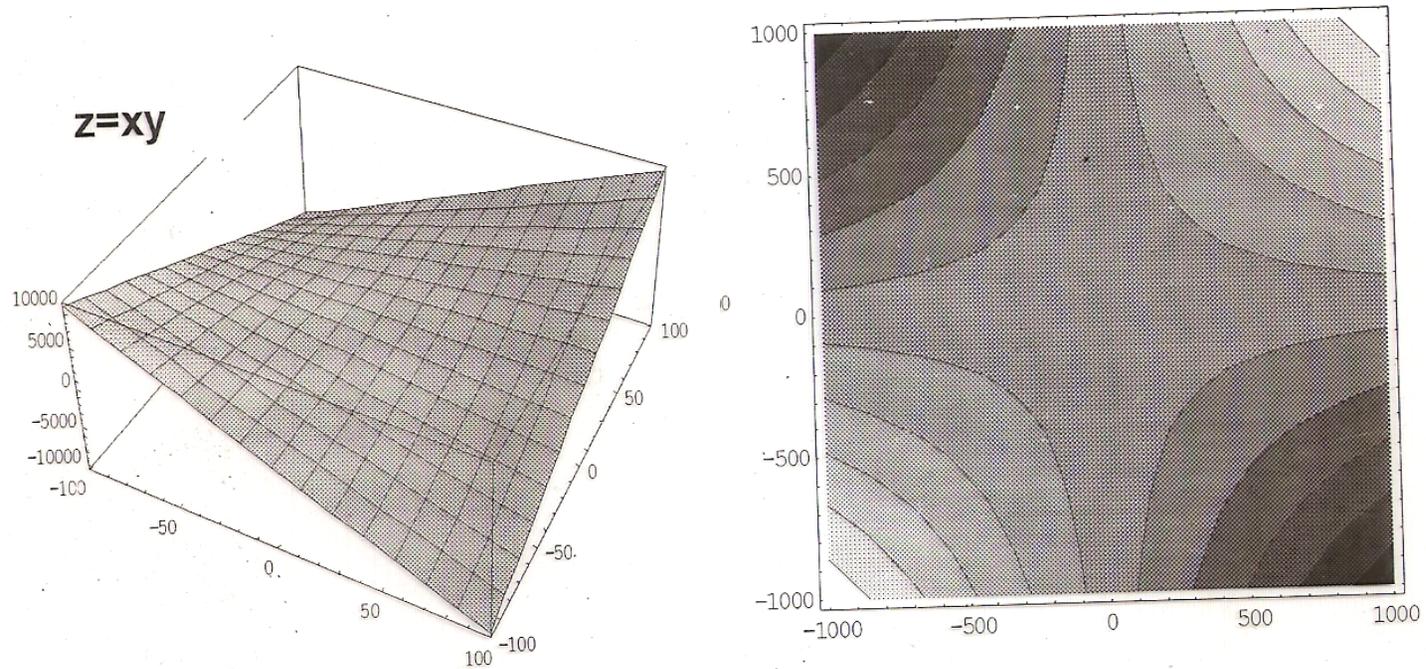
4. $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

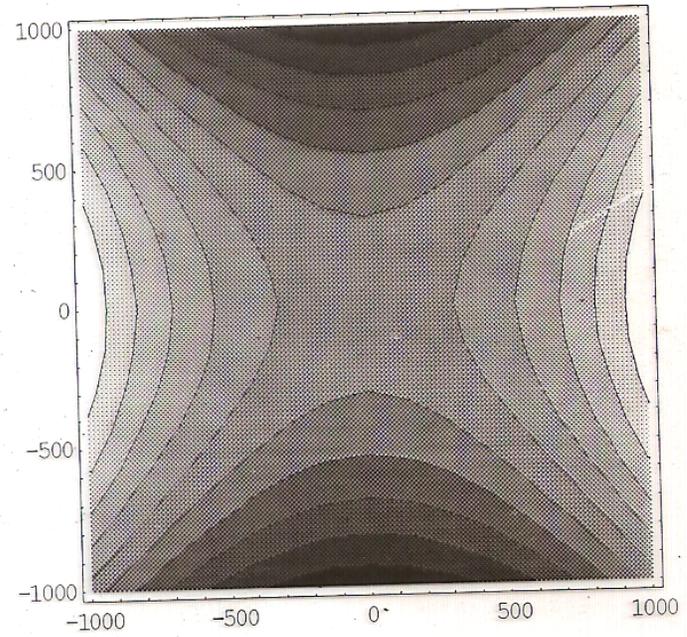
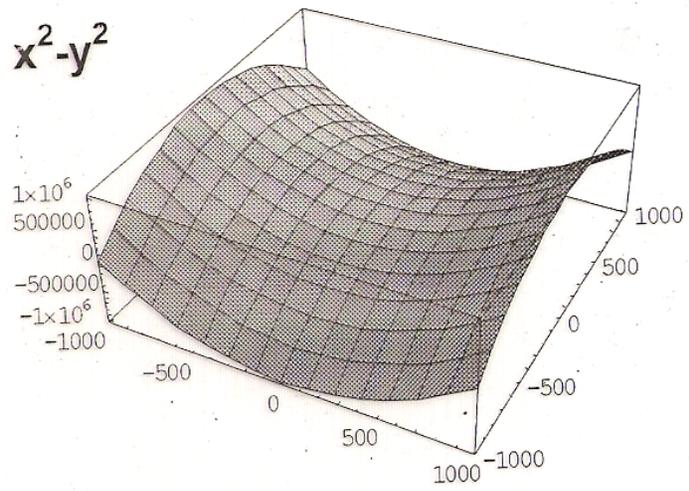
6. $f(x, y) = |x| + |y|$

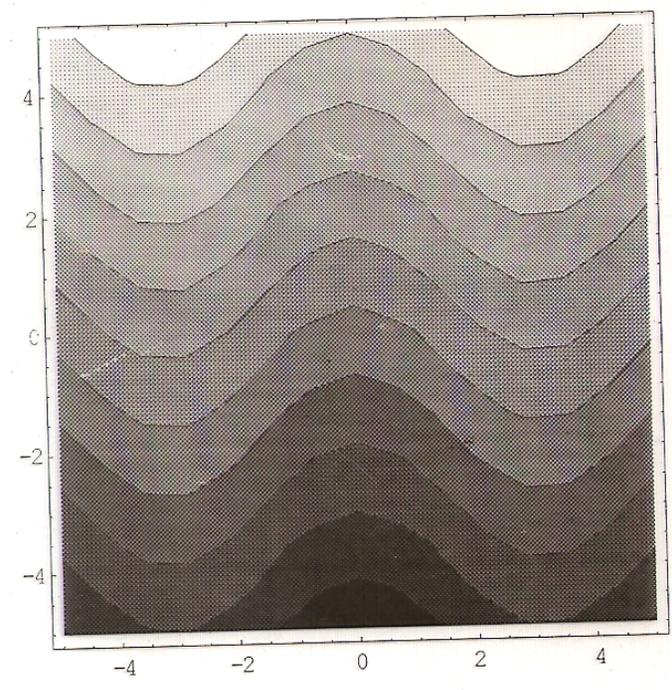
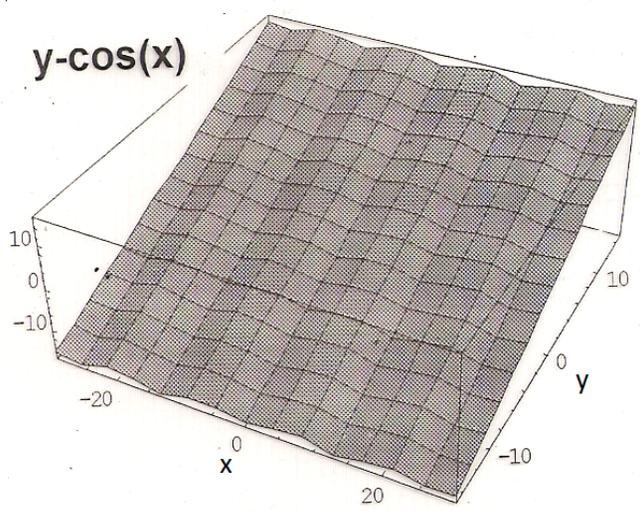
7. $f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ (atenção: domínio em $k=1$)

(ver figuras)

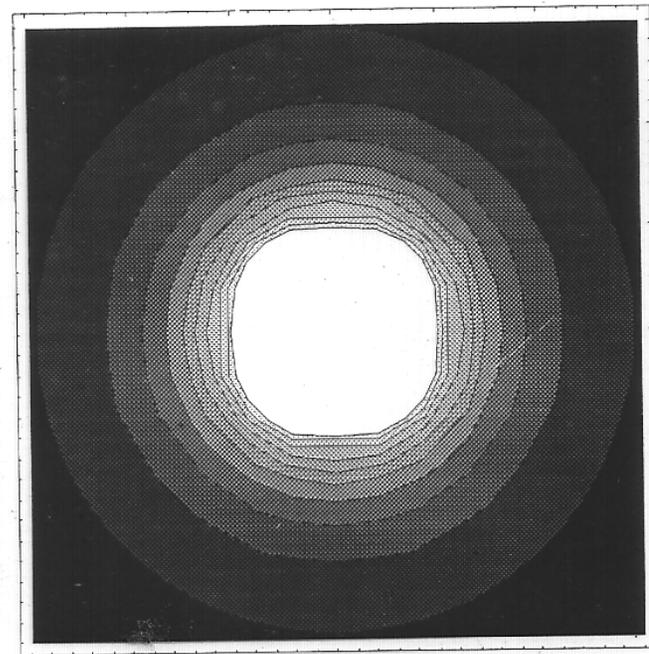
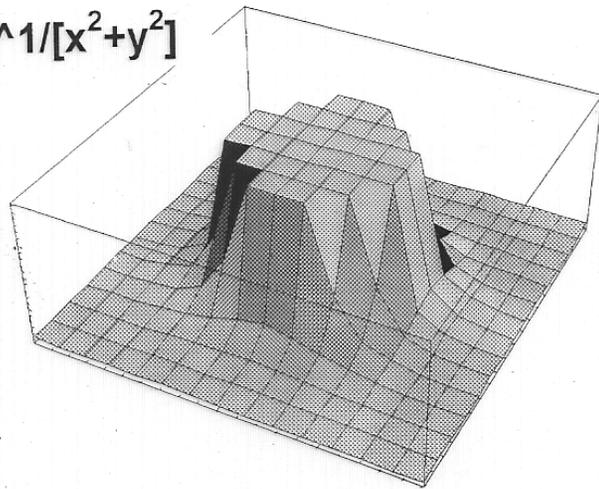


$$x^2 - y^2$$

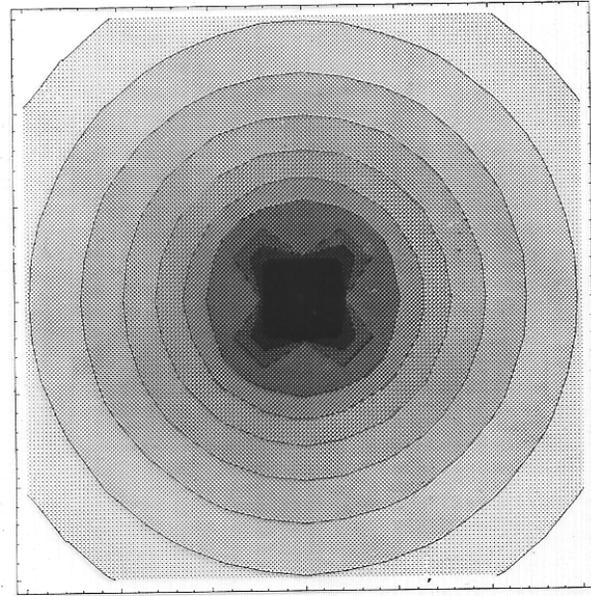
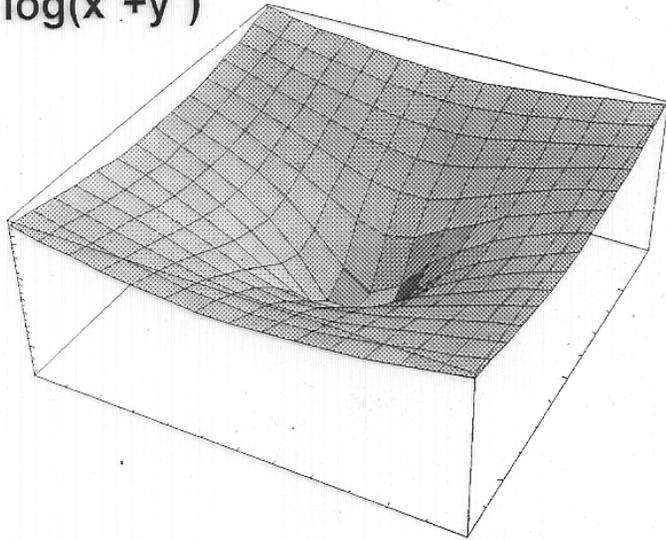




$$e^{1/[x^2+y^2]}$$



$$z = \log(x^2 + y^2)$$



$$z = |x| + |y|$$

