

Derivadas direcionais

Definição (Derivadas segundo um vector): Seja $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in int(Dom(f))$ então

$$D_{\vec{v}}f(P_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + \lambda\vec{v}) - f(P_0)}{\lambda||\vec{v}||}$$

representa a derivada direcional de f segundo o vector $\vec{v}$ no ponto P_0 (no caso do limite existir).

Interpretações:

- $D_{\vec{v}}f(P_0)$ indica o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto P_0 que tem a direcção do vector $\vec{v}$.

- $D_{\vec{v}}f(P_0)$ indica a taxa de variação, ou seja, a quantidade de variação por unidade na direcção de $\vec{v}$, de f no ponto P_0 .

Calcule:

1. $D_{\vec{v}}f(P_0)$ para $f(x, y) = x^2y$, $\vec{v} = (2, 1)$ e $P_0 = (1, 0)$.
2. a derivada direccional de $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$, segundo o vector $\vec{v} = (3, -4)$ no ponto $P_0 = (1, \frac{\pi}{2})$.
3. a derivada de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ x & \text{se } x + y = 0 \end{cases}$$

segundo os vectores $\vec{v}_1 = (1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1)$ no ponto $P_0 = (0, 0)$.

4. a derivada direccional de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

segundo o vector $\vec{v} = (1, 1)$ no ponto $P_0 = (0, 0)$.

5. a derivada direccional de

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

segundo os vectores $\vec{v}_1 = (0, 2)$ e $\vec{v}_2 = (1, 2)$ no ponto $P_0 = (0, 0)$.

Derivadas Parciais: Às derivadas direccionais segundo os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, chamam-se **derivadas parciais**.

No caso de **n=2...** os vectores da base canónica são $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

Chama-se **derivada parcial de f em relação a x** no ponto $P_0(x_0, y_0)$ a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda, y_0) - f(x_0, y_0)}{\lambda}$$

(é a derivada direcciona segund o vector $(\vec{i}) = (1, 0)$).

Chama-se **derivada parcial de f em relação a y** no ponto $P_0(x_0, y_0)$ a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \lambda) - f(x_0, y_0)}{\lambda}$$

(é a derivada direccional segundo o vector $\vec{j} = (0, 1)$).

Obs: Para calcular a derivada (parcial) num ponto, procedemos da seguinte forma: Se, na vizinhança (bola) desse ponto a função está definida por:

- **apenas uma expressão:** Usaremos regras de derivação.
- **mais do que uma expressão:** Usaremos a definição de derivada parcial.

Interpretações:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ indica o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ que é paralela ao eixo dos xx .
- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ indica a taxa de variação, ou seja, a quantidade de variação por unidade de x , de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exercícios Calcule

- $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ onde $f(x, y) = x^2y + 2e^{xy}$.

- as derivadas parciais de $f(x, y, z) = e^x z + x \sin(zy) + zx$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- as derivadas parciais de f nos pontos $(0, 2)$ e $(0, 0)$ onde:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{x^2+y^2} & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \\ e^{y-2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Derivadas de ordem superior:

Derivadas de 2ª ordem de funções de duas variáveis
 $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Exercícios

1. Calcule as derivadas até à 2ª ordem das funções:

(a) $f(x, y) = 5xy^3 + 2x^2y^2$

(b) $f(x, y) = \sin(x)y^5$

2. Estude se para $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e $g(x, y) = x \ln(x) + ye^x$ se tem que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)\right)^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 14) + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 0.$$

3. Verifique que para $g(x, y) = xye^{\frac{x}{y}}$ se tem que

$$x \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x^2} = 0$$

Teorema de Schwarz: Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, e $(x_0, y_0) \in \text{int}(D_f)$ tal que

- $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existem numa vizinhança (bola) de (x_0, y_0) ;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em (x_0, y_0) .

Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Exercícios

1. Confirme que o teorema se verifica no exercício anterior.

2. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

(b) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

3. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

(b) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Classe $C^k(A)$: Seja A um conjunto aberto contido no domínio de f e $k \in \mathbb{N}$. Uma função f diz-se **de classe C^k** em A se e só se f admite derivadas até à ordem k (inclusive) em A contínuas e escreve-se

$$f \in C^k(A)$$

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$:

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \text{int}(D_f)$. Diz-se que f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se existem as suas derivadas parciais (em x e em y) neste ponto e se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Proposição:

Se f e g são funções diferenciáveis então $f \pm g$, fg , $\frac{f}{g}$, $(g(x) \neq 0, \forall x)$ são diferenciáveis.

Exemplos de funções DIFERENCIÁVEIS no seu domínio: Polinómios, funções algébricas, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas e exponenciais

Exemplos de funções NÃO-DIFERENCIÁVEIS no seu domínio: módulo (em 0), funções def. por ramos

Exercícios Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2)$.

2. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy \leq 0 \end{cases}$$

no ponto $(0, 0)$.

3. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no ponto $(0, 0)$.

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$:

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{int}(D_f)$ e $h(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

Diz-se que f é **diferenciável** em $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$

se existem as suas derivadas parciais neste ponto e se

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(P_0 + h) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)h_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)h_n}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0$$

Propriedades das funções diferenciáveis:

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_0 \in \text{int}(D_f)$

- f diferenciável em $P_0 \implies f$ contínua em P_0 .
- f diferenciável em $P_0 \implies \left\{ \begin{array}{l} f \text{ admite derivadas segundo} \\ \text{qualquer direção em } P_0. \\ \text{(Em particular as derivadas} \\ \text{de primeira ordem).} \end{array} \right.$
- $\left. \begin{array}{l} f \text{ tem todas as derivadas} \\ \text{parciais de primeira} \\ \text{ordem em } B(P_0; \epsilon) \\ \text{e são contínuas em } P_0 \end{array} \right\} \implies f \text{ diferenciável em } P_0$.

ou seja,

- Se f não é contínua em $P_0 \Rightarrow f$ não é dif. em P_0 .

- f não admite derivadas
segundo qualquer direção
em P_0 . (Em particular
as derivadas de primeira
ordem).
- $$\left. \vphantom{\begin{array}{l} f \text{ não admite derivadas} \\ \text{segundo qualquer direção} \\ \text{em } P_0. \text{ (Em particular} \\ \text{as derivadas de primeira} \\ \text{ordem).} \end{array}} \right\} \Rightarrow f \text{ não é dif. em } P_0.$$

Exercícios

Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados:

1. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x-3y}{x+y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no ponto $(0, 0)$.

2. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no ponto $(0, 0)$.

3. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no ponto $(0, 0)$.

Plano tangente:

Seja $z = f(x, y)$ uma função **diferenciável** em (x_0, y_0) .

O plano de equação:

$$z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é chamado de **plano tangente** ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Observações sobre o plano tangente:

- Podemos usar o **plano tangente** como uma aproximação (por um polinómio de grau 1) ao gráfico de f numa vizinhança (bola) do ponto (x_0, y_0) .

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\forall (x, y)$ próximo de (x_0, y_0) .

- O **plano tangente** ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor:

$$\vec{N}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

- A equação do **plano tangente** ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pode ser escrita, em notação do produto escalar, da seguinte forma:

$$\vec{N}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$

- A reta que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor $\vec{N}(x_0, y_0)$ é chamada de **reta normal** ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, e sua equação é dada por:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\vec{N}(x_0, y_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercício: Determine o plano tangente:

1. ao gráfico da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ em $P=(1,1,3)$.
2. à superfície de equação $z - 2x^2 - 4y^2 = 0$ em $P=(1,2,18)$.
3. à superfície de equação $z = 1 - x^2$ em $P=(0,0,1)$.
(ver fig.)

O gradiente:

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \text{int}(D_f)$. Define-se o **gradiente** de f no ponto $\vec{a}$ por:

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

Exercício: Calcule $\vec{\nabla} f(1, 2)$ onde $f(x, y) = y \ln(x) + xy^2$.

Aplicação do gradiente: derivada direcional

Se $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é **diferenciável** em $P_0 \in \text{int}(D_f)$ e $\vec{u}$ é um vector de $\mathbb{R}^n$ então a **derivada direcional de f em P_0 na direção de $\vec{u}$** é dada por

$$D_{\vec{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

onde $\cdot$ significa produto interno.

Exercícios: Calcule:

1. A derivada de $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$ no ponto $P_0(2, 0)$, segundo o vector $\vec{u} = (1, 2)$.
2. A derivada de $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ no ponto $P_0(-2, 1)$, na direcção de $A\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ para $B(0, 1)$.
3. Determine a taxa de variação de

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

no ponto $P_0(1, -2)$ na direcção do ponto dado à origem.

Nota: A derivada direccional de f no ponto P_0 na direcção do vector $\vec{u}$:

$$D_{\vec{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \|\nabla f(P_0)\| \cos(\alpha)$$

onde α é o menor ângulo formado pelos vectores $\nabla f(P_0)$ e $\vec{u}$.

Portanto, se f é uma função diferenciável em P_0 tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$. Então :

- $D_{\vec{u}}f(P_0)$ é **nula** quando $\vec{u}$ e $\vec{\nabla} f(P_0)$ são perpendiculares, ou seja, **o vetor gradiente é perpendicular às curvas de nível**.
- $D_{\vec{u}}f(P_0)$ é **máxima** quando $\alpha = 0$, ou seja, quando $\vec{\nabla} f(P_0)$ e $\vec{u}$ são dois vectores com a mesma direcção e

sentido, e o seu valor é $\|\vec{\nabla} f(P_0)\|$. Assim a **direcção de crescimento máximo(máximo positivo)** de f é dada por $\vec{\nabla} f(P_0)$.

- $D_{\vec{u}}f(P_0)$ é **mínima** quando $\alpha = \pi$, ou seja, quando $\vec{\nabla} f(\vec{a})$ e $\vec{u}$ são dois vectores com a mesma direcção e sentidos contrários, e o seu valor é $-\|\vec{\nabla} f(P_0)\|$. Assim a **direcção de crescimento mínimo (máximo negativo)** de f é dada por $-\vec{\nabla} f(P_0)$.

Exercícios

1. Seja $f(x, y) = 2x^2y + e^{xy}$ uma função diferenciável no seu domínio.
 - (a) Determine o gradiente de f no ponto $(1,0)$ e represente-o graficamente.
 - (b) Calcule $D_{\vec{u}}f(1, 0)$, onde $\vec{u} = (1, 1)$.
 - (c) Determinar um vector unitário $\vec{u}$ de modo que $D_{\vec{u}}f(-1, 0) = \frac{1}{2}$.
 - (d) Qual o valor máximo da derivada direccional de f no ponto $(1, 1)$?

2. Considere o campo escalar $f(x, y) = e^{x^2+y} - 2xy$.
- (a) Calcule as funções derivadas parciais de primeira ordem de f e justifique que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
- (b) Determine os vectores segundo o qual a taxa de variação de f no ponto $(1, -1)$ é nula.
3. Numa placa semi-circular $x^2 + y^2 \leq 4$, com $x \geq 0$ a temperatura é dada pela lei

$$T(x, y) = 3yx^2 - x^3 + 60$$

Determine um vector no ponto $P = (1, 1)$ tangente à isotérmica que passa nesse ponto.

4. Considere o campo escalar definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = x^2 e^{-2y}$$

e o ponto $P = (-2, 0)$. Determine

- (a) A direção segundo a qual a função cresce mais rapidamente em P.
- (b) O valor máximo da derivada direcional no ponto P.
- (c) A direção $\vec{v}$ segundo a qual $D_{\vec{v}}f(2, 0) = 0$

Matriz jacobiana: derivada direcional

Derivada segundo a direção de $\vec{u}$ para funções vectoriais
Seja $\vec{f}: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $P_0 \in \text{int}(D_f) \subset \mathbb{R}^n$ onde

$$\vec{f}(P_0) = (f_1(P_0), \dots, f_m(P_0))$$

Para funções vectoriais temos que

$$D_{\vec{u}}\vec{f}(P_0) = (D_{\vec{u}}f_1(P_0), \dots, D_{\vec{u}}f_m(P_0))$$

ou seja, se cada uma das funções componentes for diferenciável, então matricialmente:

$$D_{\vec{u}}\vec{f}(P_0) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Chama-se **matriz Jacobiana** de $\vec{f}$ em P_0 a

$$J_{\vec{f}}(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Se $m = n$, o determinante da matriz Jacobiana pode ser calculado e chama-se o **Jacobiano**.

Exercícios

1. Seja $\vec{f}(x, y) = (\ln(4 - x^2 - y^2), \sqrt{y - x})$ calcule a matriz Jacobiana de $\vec{f}$ no ponto $(0, 1)$ e verifique que o Jacobiano nesse ponto é $-\frac{1}{3}$.

2. Considere a função vectorial $\vec{f} : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujas funções componentes são

$$f_1(x, y) = \frac{2x}{y - 2}$$

e

$$f_2(x, y) = \ln(y - x + 2)$$

calcule a derivada parcial de f segundo o vector $(0, 1)$ no ponto $(1, 1)$.

Derivada da Composta:

Revisão de cálculo I

$$[\text{sen}(x^2)]' = \cos(x^2).2x$$

pois

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$$

ou seja, num ponto x_0 temos:

$$[f(g(x))]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

desde que f seja diferenciável em $g(x_0)$ e g em x_0 .

Regra da Cadeia- versão I

Sejam $\vec{g} : D_g \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $\vec{f} : D_f \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ duas funções vectoriais. Se g é diferenciável em $P_0 \in \text{int}(D_g)$ e f é diferenciável em $\vec{g}(P_0) \in \text{int}(D_f)$, então $\vec{h} = f \circ \vec{g} : D_h \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em P_0 e tem-se:

$$J_{\vec{h}}(P_0) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(P_0)) J_{\vec{g}}(P_0)$$

Exercícios

1. Seja $\vec{f}(x, y, z) = (xy, yz)$ e $\vec{g}(u, v) = (2u + v^2, 3u^2 - v)$.
Sendo $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ calcule $J_{\vec{h}}(0, 1, 0)$.

2. Sejam

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2)$$

e

$$\vec{g}(u, v, w, s) = (2uw + (sv)^2, 3su^2 - vw, uvws).$$

Sendo $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$ calcule $J_{\vec{h}}(0, 1, 1, 0)$.

Regra da cadeia- versão II Suponhamos que $f(x, y)$ é uma função diferenciável e que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são duas funções diferenciáveis, então $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ é uma função diferenciável de u e v , tendo-se

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Exercícios:

1. Sejam $f(u, v) = u^3 + uv$
com $u(x, y) = xy^2$ e $v(x, y) = x \sin(y)$,
calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (pelos dois métodos).
2. $u(x, y, z) = x + 2y + 3z$ com
 $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = \cos(1 - t)$ e $z(t) = \frac{1}{t^2}$.
Calcule $\frac{\partial u}{\partial t}$ para $t = 1$.
3. Sejam $f(u, v) = u^2 v^3$
com $u(x, y) = x + y$ e $v(x, y) = x^2 - y^2$,
calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

4. Verifique que a função

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

satisfaz a equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

5. Seja f uma função diferenciável. Prove que

$$z = xy + f(x^2 + y^2)$$

satisfaz a equação

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

6. Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$g(s, t) = h(s^2 - t^2, t^2 - s^2).$$

(a) Mostre que

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

(b) Supondo que $J_h(3, -3) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ calcule $J_g(2, 1)$.

7. Seja f uma função real de variável real continuamente diferenciável até pelo menos à 2ª ordem e seja

$$u = xy + f(z)$$

com $z = \frac{y}{x^2}$ e $x \neq 0$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^4} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

8. Sabendo que

$$\varphi(x, y) = \frac{y^2}{2} + \theta\left(\frac{1}{x} + \ln(y)\right)$$

onde φ e θ são funções de classe C^2 , no respectivo domínio, mostrar que:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

9. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável tal que

$$\vec{F}(0, 1) = (1, 1, 0), \quad J_{\vec{F}}(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } G(u, v, w) = ue^{vw} + uvw.$$

Calcule $(G \circ F)'(0, 1)$

10. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(u, 0) = 0$ e $f(0, v) = v$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$\vec{g}(x, y) = (x^2 - x - y, y^2 - x - y)$$

- (a) Mostre que $h = f \circ \vec{g}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$
- (b) Calcule $J_h(2, 2)$.

Teorema da Função Implícita (TFI):

Consideremos $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, a equação $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ e A um conjunto aberto que contém (P_0, u_0) , onde $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Se

$$F(P_0, u_0) = 0$$

$$F \in C^1(A)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(P_0, u_0) \neq 0$$

Então, existe uma bola aberta $B = B(P_0; r)$ e uma única função $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definida em B tal que:
 $u \in C^1(B)$, $u_0 = u(P_0)$ e $F(P, u(P)) = 0$.

Além disso,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(P_0, u_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(P_0, u_0)}$$

Exercícios

1. Mostre que a equação $x^2z + 3xz^2 = 4xy$ define $x = \phi(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial y}(1, 0)$.
2. Determine para que valores de k a equação $x^2 + yz + z^2 + xz = 7$ define $z = \phi(x, y)$ numa vizinhança do ponto $(2, 0, k)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 0)$.

3. Mostre que a equação $(x^2 + y^2) e^{xy} = 1$ define implicitamente y como função de x , $y = \phi(x)$, na vizinhança do ponto $(0, 1)$.
4. Seja $h(x, y) = xy + \cos(x)$. Mostre que a equação $h(x, y) = \frac{\pi}{2}$ define localmente $y = \phi(x)$ numa vizinhança do ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Determine $\frac{\partial y}{\partial x}(\frac{\pi}{2})$.

Observação: Vimos atrás que para uma função $z = f(x, y)$ diferenciável em (a, b) existe um plano tangente definido pela equação

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Consideremos que se tem uma equação

$$F(x, y, z) = 0$$

que define implicitamente z como função de x e y na vizinhança de um ponto (a, b, c) então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}.$$

Substituindo na equação do plano tangente:

$$z - f(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}(x - a) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}(y - b)$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}(x - a) + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}(y - b) + z - c = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)(z - c) = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \right) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$$

$$\nabla F(a, b, c) \cdot (P - P_0) = 0,$$

com $P = (x, y, z)$ e $P_0 = (a, b, c)$.

Portanto o plano tangente é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que definem com $P_0 = (a, b, c)$ vectores $P - P_0$ perpendiculares ao vector gradiente.

Nota: O vector gradiente é perpendicular ao plano tangente ao gráfico.

☐ **recta normal à superfície** de equação $F(x, y, x) = 0$ no ponto $P_0 = (a, b, c)$ tem, portanto a direcção do vector gradiente , pelo que é definida pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x-a=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \\ y-b=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c), \quad \lambda \in \\ z-c=\lambda\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \end{cases}$$

(equação paramétrica da recta normal à superfície)

Exercícios

1. Considere a superfície de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 6$ e o ponto $P = (3, -1, 2)$.
 - (a) Determine a equação do plano tangente à superfície em P .

- (b) Determine a equação da recta normal à superfície em P .

2. Considere a equação

$$xyz \sin(xyz) - \frac{\pi}{2} = 0.$$

- (a) Verifique que a equação dada define implicitamente uma função $z = \phi(x, y)$ numa vizinhança de $P = (1, 1, \frac{\pi}{2})$.
- (b) Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto P .
- (c) Determine a equação da recta normal à superfície no ponto P .

(d) Calcule um valor aproximado de $z = \phi(1.2, 0.9)$ considerando $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$.

Diferencial :

Se f é diferenciável em (a, b)

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}_{\Delta f(a, b) \rightarrow \text{diferencial de } f \text{ no ponto } (a, b)}$$

para x “próximo” de a
e y “próximo” de b .

Exercícios

1. Calcule um valor aproximado de $e^{1.1 \times 0.9}$.
2. Calcule um valor aproximado de $\sqrt{9 \times (1.95)^2 + (8.01)^2}$.

Máximos e Mínimos

Valores extremos relativo ou local de funções de duas variáveis

Definição: Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_0, y_0) \in D_f$

$f(x_0, y_0)$ é um **máximo** relativo ou local de f se existe uma vizinhança $V_\epsilon(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall x, y \in D_f \cap V_\epsilon(x_0, y_0).$$

$f(x_0, y_0)$ é um **mínimo** relativo ou local de f se existe uma vizinhança $V_\epsilon(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall x, y \in D_f \cap V_\epsilon(x_0, y_0).$$

Obs:

- O maior dos máximos relativos é o **máximo absoluto**.
- O menor dos mínimos relativos é o **mínimo absoluto**.
- Chamam-se **extremos** aos máximos e aos mínimos de f .
- A (x_0, y_0) chama-se ponto **maximizante (minimizante)** de f .

definição: Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x, y)$ é chamado **ponto crítico de f** se $\nabla f(x_0, y_0)$ não existe ou $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Obs:

- Os extremos encontram-se entre os pontos críticos.
- Os pontos críticos que não são extremos são **pontos de sela**.

Teste do hessiano: (Condição suficiente para um ponto crítico ser extremo relativo)

Definição: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. A matriz hessiana de f num ponto $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ é definida como:

$$H[f(P)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x_1}(P) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{bmatrix}$$

Observação:

- Note que $H[f(P)]$ é uma matriz simétrica.
- No caso $n = 2$ a matriz hessiana de f é dado por:

$$H[f(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Teorema Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que $P_0(x_0, y_0) \in A$ seja um ponto crítico de f . Seja $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $\Delta_2 = \det(H[f(x_0, y_0)])$, então:

- $\Delta_2 > 0, \Delta_1 > 0, \rightarrow P_0$ é ponto Mínimo local.
- $\Delta_2 > 0, \Delta_1 < 0, \rightarrow P_0$ é ponto Máximo local.
- $\Delta_2 < 0 \rightarrow P_0$ é ponto Ponto de sela.
- $\Delta_2 = 0 \rightarrow$ Nada se conclui.

Exercícios

Calcule e classifique os extremos de

1. $f(x, y) = y^2 - x^2$.

2. $f(x, y) = e^{-x^2+4y^2}$.

3. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\frac{y}{2}}$

4. $f(x, y) = y + x \sin y$.

5. $f(x, y) = 3x^2 - y^2$.

6. $f(x, y) = \frac{y^3}{3} + 12y - 4x + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}y^2 + 4.$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$

8. $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4.$

9. $f(x, y) = xy^2 + x^2 + y^2.$

10. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 9x + y^3 + 3y^2.$

Teorema(caso geral) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $P_0 \in A$ seja um ponto crítico de f . Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz hessiana de f em P_0 . Temos

- Se $\lambda_i > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ então P_0 é ponto de mínimo local de f ;
- Se $\lambda_i < 0, \forall 1 \leq i \leq n$ então P_0 é ponto de máximo local de f ;
- Se existirem dois autovalores λ_i e λ_j com sinais opostos então P_0 é um ponto de sela de f ;
- Nos demais casos não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico P_0 .

Definição: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n . Definimos o menor principal de ordem k da matriz A como a submatriz $A_k = [a_{ij}]$ com $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ e denotemos por $m_k(A) = \det\{A_k\}$.

Teorema: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz simétrica de ordem n . Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz A .

- $\lambda_i > 0, \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow m_k(A) > 0, \forall 1 \leq k \leq n$
- $\lambda_i < 0, \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} m_k(A) < 0, \forall k \text{ ímpar e} \\ m_k(A) > 0, \forall k \text{ par.} \end{cases}$

Valores extremos absoluto de funções de duas variáveis

Definição: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_0, y_0) \in D$

$f(x_0, y_0)$ é um valor **máximo absoluto** de f , se

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall x, y \in D_f.$$

$f(x_0, y_0)$ é um valor **mínimo absoluto** de f , se

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall x, y \in D.$$

Teorema: Se $z = f(x, y)$ é uma função contínua num conjunto limitado e fechado $D \subset \mathbb{R}^2$, então f tem um valor de máximo absoluto e mínimo absoluto em D .

Obs: Nas condições do teorema acima, temos os extremos absolutos são atingidos em pontos no interior de D ou na fronteira de D .

Máximos e Mínimos com restrições

Multiplicadores de Lagrange

O problema consiste em procurar os extremos da função $f(x, y)$, para $(x, y) \in \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma curva no plano xy definida pela equação $g(x, y) = 0$.

A condição $\mathcal{C} : g(x, y) = 0$ é chamada de **restrição**, e o problema correspondente é um **problema de extremos condicionados**.

Para resolver tal problema podemos, quando possível, reduzi-lo, usando a restrição, ao cálculo dos máximos e mínimos de uma função de uma variável. Nem sempre tal procedimento é praticável e, freqüentemente, o método a seguir é mais conveniente.

Teorema:

- Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções de classe C^1 num conjunto aberto U do plano xy .
- Seja $\mathcal{C}$ curva de equação $g(x, y) = 0$ contida em U .

Se $f(x, y)$ tem um valor máximo ou mínimo no ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, então existe um número real λ tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

O número λ é chamado de **multiplicador de lagrange**.

Observação:

- Na demonstração do teorema é essencial que o ponto (x_0, y_0) não fosse uma extremidade da curva $\mathcal{C}$ e que $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.
- Pode ocorrer que um ponto na extremidade de $\mathcal{C}$ ou um ponto de $\mathcal{C}$ onde $\nabla g(x, y) = \vec{0}$ seja um ponto de máximo ou mínimo da função f .
- No teorema acima, se $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ é um ponto extremo de $f(x, y)$, então a curva de nível de equação de equação $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ é tangente à curva $\mathcal{C}$ em (x_0, y_0) .

Teorema:

- Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ funções de classe C^1 num conjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$.
- Seja $\mathcal{S}$ a superfície de equação $g(x, y, z) = 0$ contida em U .

Se $f(x, y, z)$ tem um valor máximo ou mínimo no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, então existe um número real λ tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Teorema:

- Sejam $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$ e $g_2(x, y, z)$ funções de classe C^1 num conjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$.
- Seja $\mathcal{C}$ a curva de interseção das superfícies de equações $g_1(x, y, z) = 0$ e $g_2(x, y, z) = 0$, ambas contidas em U .

Se $f(x, y, z)$ tem um valor máximo ou mínimo no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ e $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, então existem números reais λ_1 e λ_2 tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0).$$