Máximos e Mínimos

Valores extremos relativo ou local de funções de duas variáveis

Definição: Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_0, y_0) \in D_f$

$f(x_0, y_0)$ é um **máximo** relativo ou local de f se existe uma vizinhança $V_\epsilon(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall x, y) \in D_f \cap V_\epsilon(x_0, y_0).$$

$f(x_0, y_0)$ é um **mínimo** relativo ou local de f se existe uma vizinhança $V_\epsilon(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall x, y) \in D_f \cap V_\epsilon(x_0, y_0).$$

Obs:

- O maior dos máximos relativos é o **máximo absoluto**.

- O menor dos mínimos relativos é o **mínimo absoluto**.

- Chamam-se **extremos** aos máximos e aos mínimos de f.

- A (x_0, y_0) chama-se ponto **maximizante (minimizante)**de f.

definição: Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x, y)$ é chamado **ponto crítico de** f se $\nabla f(x_0, y_0)$ não existe ou $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Obs:

- Os extremos encontram-se entre os pontos críticos.

- Os pontos críticos que não são extremos são **pontos de sela**.

Teste do hessiano: (Condição suficiente para um ponto crítico ser extremo relativo)

Definição: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. A matriz hessiana de f num ponto $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ é definida como:

$$H[f(P)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & . & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x_1}(P) & . & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{bmatrix}$$

Observação:

- Note que $H[f(P)]$ é uma matriz simétrica.

- No caso $n = 2$ a matriz hessiana de f é dado por:

$$H[f(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Teorema Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que $P_0(x_0, y_0) \in A$ seja um ponto crítico de f. Seja $\boldsymbol{\Delta}_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \boldsymbol{\Delta}_2 = \det(H[f(x_0, y_0)])$, então:

- $\boldsymbol{\Delta}_2 > 0, \boldsymbol{\Delta}_1 > 0, \rightarrow P_0$ **é ponto Mínimo local**.

- $\boldsymbol{\Delta}_2 > 0, \boldsymbol{\Delta}_1 < 0, \rightarrow P_0$ **é ponto Máximo local**.

- $\boldsymbol{\Delta}_2 < 0 \rightarrow P_0$ **é ponto Ponto de sela**.

- $\boldsymbol{\Delta}_2 = 0 \rightarrow$ **Nada se conclui**.

Exercícios

Calcule e classifique os extremos de

1. $f(x,y) = y^2 - x^2$.

2. $f(x,y) = e^{-x^2+4y^2}$.

3. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{\frac{y}{2}}$

4. $f(x,y) = y + x\sin y$.

5. $f(x,y) = 3x^2 - y^2$.

6. $f(x,y) = \frac{y^3}{3} + 12y - 4x + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}y^2 + 4.$

7. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$

8. $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4.$

9. $f(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2.$

10. $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 9x + y^3 + 3y^2.$

Teorema(caso geral) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $P_0 \in A$ seja um ponto crítico de f. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz hessiana de f em P_0. Temos

- Se $\lambda_i > 0, \ \forall\, 1 \leq i \leq n$ então P_0 é ponto de mínimo local de f;

- Se $\lambda_i < 0, \ \forall\, 1 \leq i \leq n$ então P_0 é ponto de máximo local de f;

- Se existirem dois autovalores λ_i e λ_j com sinais opostos então P_0 é um ponto de sela de f;

- Nos demais casos não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico P_0.

Definição: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. Definimos o menor principal de ordem k da matriz A como a submatriz $A_k = [a_{ij}]$ com $1 \leq i \leq k,\ \ 1 \leq j \leq k$ e denotemos por $m_k(A) = det\{A_k\}$.

Teorema: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz simétrica de ordem n. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz A.

- $\lambda_i > 0,\ \ \forall\, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow\ m_k(A) > 0,\ \forall 1 \leq k \leq n$

- $\lambda_i < 0,\ \ \forall\, 1 \leq i \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} m_k(A) < 0,\ \forall k \text{ impar e} \\ m_k(A) > 0,\ \forall k \text{ par.} \end{array} \right.$

Valores extremos absoluto de funções de duas variáveis

Definição: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_0, y_0) \in D$

$f(x_0, y_0)$ é um valor **máximo absoluto** de f, se

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall x, y) \in D_f.$$

$f(x_0, y_0)$ é um valor **mínimo absoluto** de f, se

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall x, y) \in D.$$

Teorema: Se $z = f(x, y)$ é uma função contínua num conjunto limitado e fechado $D \subset \mathbb{R}^2$, então f tem um valor de máximo absoluto e mínimo absoluto em D.

Obs: Nas condiçoes do teorema acima, temos os extremos absolutos sao atingidos em pontos no interior de D ou na fronteira de D.