Integral de linha de campo vectorial

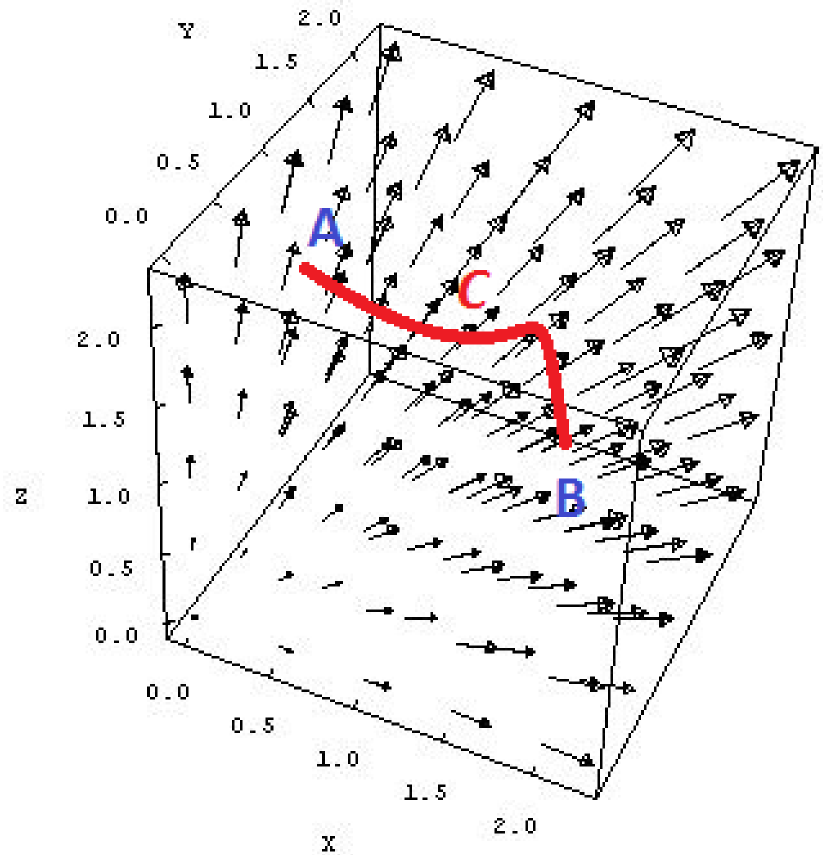
Sejam :

- $\mathcal{C}$ uma curva dada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$.

- e

$$\vec{F} : Dom(\vec{F}) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vectorial contínuo cujo $Dom(\vec{F})$ contem todos os pontos da curva $\mathcal{C}$

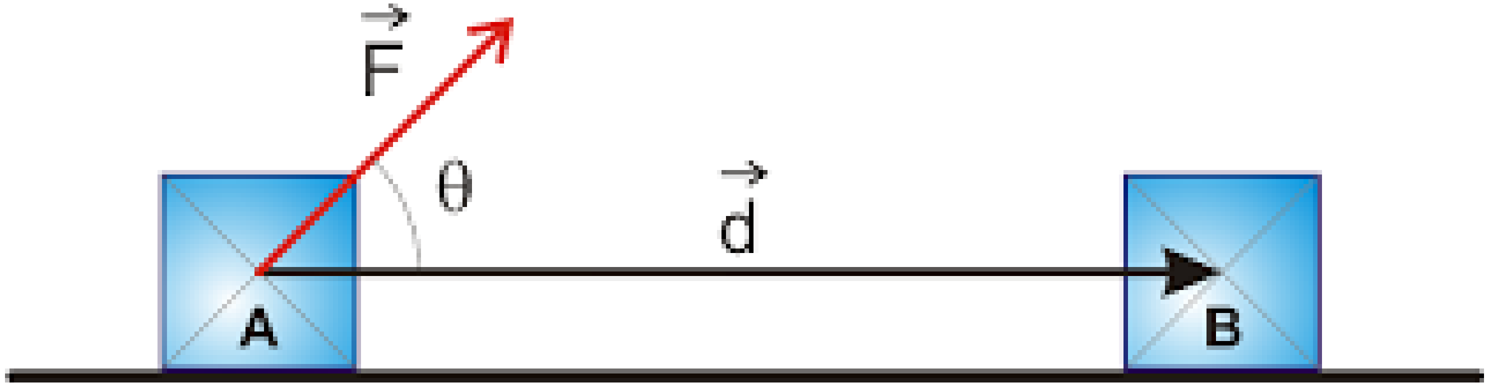


$$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

Motivação:

Para motivar a definição de integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$, suponhamos que $\vec{F}$ representa um campo de forças e calculemos o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo de $\mathcal{C}$

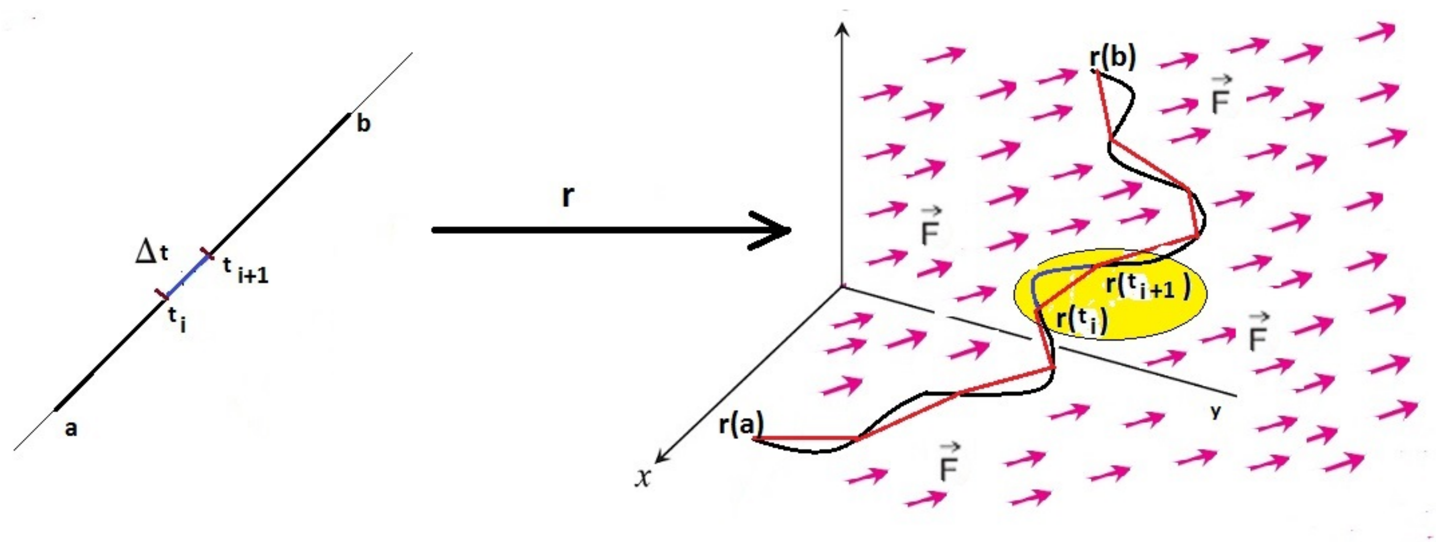
Quando $\mathcal{C}$ é um segmento de reta ligando o ponto A ao ponto B e $\vec{F}$ é uma força constante:

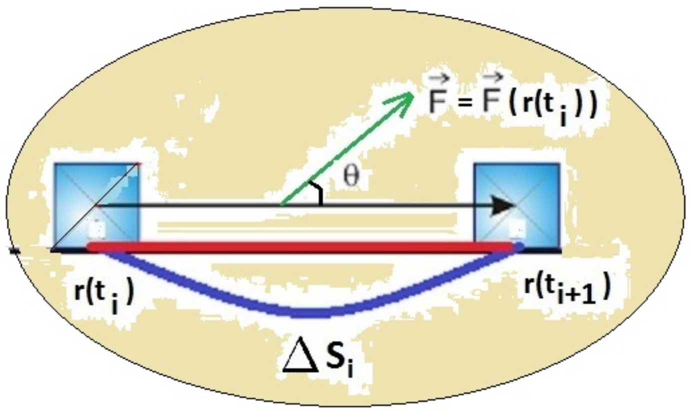


O trabalho realizado por $\vec{F}$ ao deslocar a partícula ao longo de $\mathcal{C}$ é dado por:

$$W = \left\|\vec{F}\right\| \left\|\vec{AB}\right\| \cos\theta = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Quando $\mathcal{C}$ não é um segmento de reta, podemos aproximá-la por uma linha poligonal com vertices em $\mathcal{C}$ do seguinte modo





$$\Delta S_i \cong r(t_{i+1}) - r(t_i) \cong r'(t_i)\Delta t_i$$

Portanto, O trabalho realizado para deslocar uma partícula de $r(t_i)$ até $r(t_{i+1})$ é aproximadamente

$$\vec{F}(r(t_i)) \cdot \triangle S_i \approx \vec{F}(r(t_i)) \cdot r'(t_i) \triangle t_i$$

Assim, o trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ para deslocar uma partícula ao longo de $\mathcal{C}$ do ponto A ao ponto B é:

$$W = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(r(t_i)) \cdot r^{'}(t_i) \triangle t_i \right)$$

Se $r \in C^1$ em $[a, b]$ e $\vec{F}$ é contínuo em $\mathcal{C}$, o limite acima existe e é igual a

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \; dt$$

Esta motivação sugere a definição como se segue

Definição .1 *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular dada por uma parametrização $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1, tal que $\vec{r}^{\,\prime}(t) \neq 0$, para todo $t \in]a,b[$. Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial continuo sobre $\mathcal{C}$. Então a* **integral de linha do campo vectorial** *$\vec{F}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$, denotado por ao integral $\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot dr$, é definida por:*

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt$$

Notas:

- Se admitirmos que $\vec{F}$ representa um campo de forças, o integral da função vectorial $\vec{F}$ ao longo da linha $\mathcal{C}$ representa o **trabalho** realizado por $\vec{F}$ para deslocar uma partícula ao longo da linha $\mathcal{C}$, do ponto $r(a)$ ao ponto $r(b)$.

- Este integral não depende da parametrização escolhida para $\mathcal{C}$, desde que não se inverta sua orientação.

Propriedades dos integrais de linha de campos vectoriais:

Seja $\vec{F}$ e $\vec{G}$ campos vetoriais contínuos com

$$Dom(\vec{F}), Dom(\vec{G}) \subset \mathbb{R}^n$$

e $\mathcal{C}$ curva regular totalmente contida em

$$Dom(\vec{F}) \cap Dom(\vec{G}).$$

$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ curvas regulares totalmente contidas em $Dom(\vec{F})$.
$-\mathcal{C}$ a curva inversa da curva $\mathcal{C}$ (totalmente contidas em $Dom(\vec{F})$).
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $\displaystyle\int_{-\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr = -\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr$

- $\int_{\mathcal{C}} \left[\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}\right] \cdot dr = \alpha \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr + \beta \int_{\mathcal{C}} \vec{G} \cdot dr$

- $\int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot dr$

Obs

Se $\mathcal{C}$ é uma curva fechada $(r(a) = r(b)$ e está orientada no sentido anti-horário, denotamos a integral de linha do campo vectorial $\vec{F}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$ por:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr$$

Exercícios:

1. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x,y) = (x^2 - 2xy, 2xy + y^2)$ ao longo da linha $y = x^2$ desde (0,0) até (3,9). R:405.9

2. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x,y) = (1+xy, x-y)$ no deslocamento do seu ponto de aplicação ao longo da linha fechada definida por $y = x$, $y = -1$, $x = 0$ e $x = 2$ no sentido horário. R:$-\frac{2}{3}$

3. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{f}(x,y) = (y, x)$ ao deslocar uma partícula desde (0,0) até (1,1) ao longo das linhas

(a) $y = x$

(b) $y = x^2$

(c) $y = x^3$

R:1

Campos conservativos

Definição .2 $\vec{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é um* **campo conservativo (ou campo gradiente)** *se existe* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{F} = \nabla\varphi(\vec{x}),$$

ou seja,

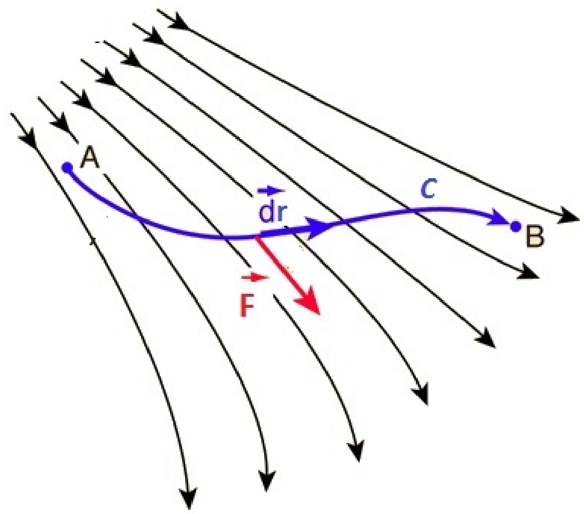
$$(F_1, F_2, ..., F_n) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$$

À função φ *chama-se a* **função potencial geradora** *de* $\vec{F}$*.*

Teorema:
Seja $\vec{F} = \nabla\varphi$ um campo vetorial gradiente contínuo definido num subconjunto aberto $U \in \mathbb{R}^3$. Se $\mathcal{C}$ é uma curva em U com pontos inicial e final A e B, respectivamente, parametrizada por uma função $r(t)$, C^1 por partes, então:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot dr = \varphi(B) - \varphi(A)$$

ou seja, o trabalho realizado por $\vec{F}$ é **independente do caminho**.



Suponhamos que

$$\vec{F} = \nabla\varphi$$

Então:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{B}) - \varphi(\mathbf{A})$$

Exercícios: Determine uma função potencial para cada campo gradiente $\vec{F}$ dado:

1. $\vec{f}(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2y)$

2. $\vec{f}(x,y) = (2x + 2y, 2x - 3y^2)$

3. $\vec{f}(x,y) = (\cos(y) - 2y\cos(x), -x\sin(y) - 2sin(x))$

4. $\vec{f}(x,y,z) = (2xyz, x^2z + 2, x^2y + 3z^2)$

5. $\vec{f}(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

Nota: Quando o campo é conservativo o trabalho ao longo de uma linha fechada é 0.

Teorema de Green

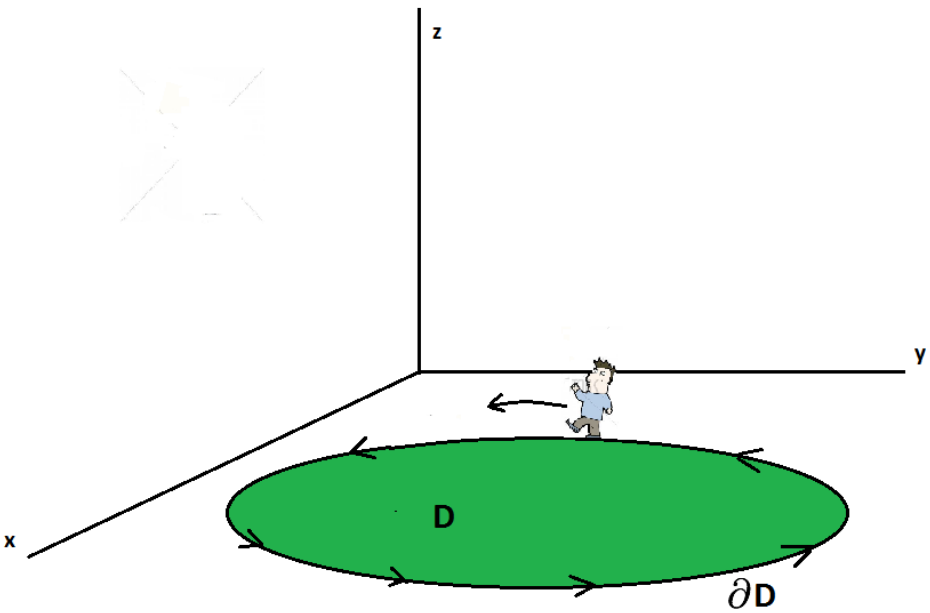
Biografia de George Green: Nascido em 1793 em Nottingham na Inglaterra, George Green passou grande parte da sua vida a trabalhar num moinho do seu pai, tendo frequentado apenas dois anos do ensino elementar. Com 30 anos Green tornou-se membro da Subscription Library, uma instituição fundada com o objectivo de servir de ponto de encontro de não-académicos para discutir assuntos científicos. Aos 35 anos publicou a primeira e, segundo muitos, mais importante obra sobre a **aplicação da análise matemática à teoria da electricidade e ao magnetismo**. Foi também a primeira pessoa a usar a expressão “potencial” na teoria do campo e introduziu vários teoremas de análise vectorial que permitiam calcular o potencial electrostático. Apenas aos 40 anos ingressa na universidade como estudante da licenciatura. Alguns anos mais tarde volta a

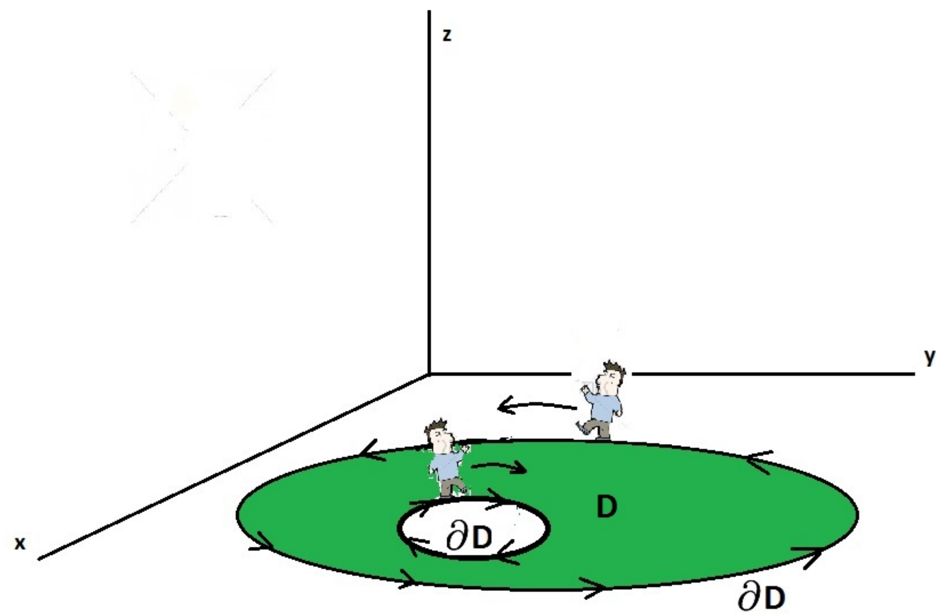
Notingham para trabalhar no seu moinho. Após a sua morte Lord Kelvin descobre os seus trabalhos e consegue a sua publicação num jornal de nome reconhecido. Na mesma altura, outros cientistas, entre os quais Carl Gauss, de forma idependente, chegam a alguns resultados já antes alcançados por Green.

Antes de enunciar o teorema de Green, faz-se necessário introduzir as seguintes definições.

Definição: Dizemos que uma região fechada e limitada D do plano xy é **simples** se D pode ser descrita como uma região do tipo I e de tipo II, simultaneamente.

Definição: Dizemos que a fronteira ∂D de uma região limitada D do plano xy está **orientada positivamente**, se a região D fica a esquerda, ao percorrermos a fronteira ∂D.





Teorema de Green:

Seja D uma região fechada e limitada do plano xy, cuja fronteira ∂D está orientada positivamente e é parametrizada por uma função de classe C^1 por partes, de modo ∂D seja percorrida apenas uma vez.

Se $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto que contém D, então:

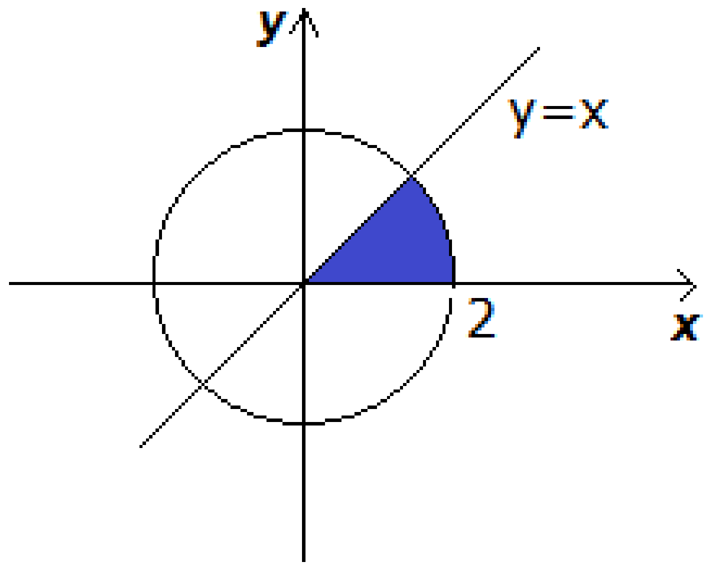
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot dr = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \ dy.$$

Exercícios

1. Verifique o teorema de Green para a função

$$\vec{F}(x,y) = (xy, x+y)$$

e a seguinte região sombreada:



2. Verifique o teorema de Green para a função

$$\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{e_1} + (x-y)\vec{e_2}$$

para a região de $\mathbb{R}^2$ em que

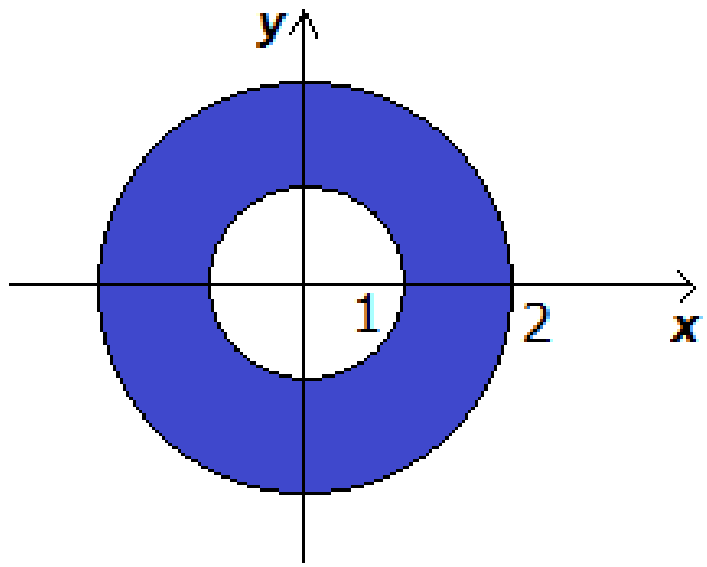
$$0 \leq y \leq x + 2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4.$$

Rpta: $\pi - \frac{2}{3}$

3. Verifique o teorema de Green para a função

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 1)$$

e a seguinte região sombreada:



4. Utilize o teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\vec{F}(x,y) = (1+y, y+x)$$

ao deslocar uma partícula ao longo da fronteira de

R percorrida no sentido positivo em que

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ y \leq x, \ x \geq 0\right\}.$$

5. Utilize o teorema de Green para calcular o valor de

$$\int\int_D ye^{x+y} \ dx \ dy$$

com $\vec{F}(x, y) = (ye^{x+y}, e^{x+y})$ e

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

6. Considere a linha

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1, \ x \leq 0\right\}$$

e o campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (xy^2, xy)$. Use o Teorema de Green para calcular o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de L.

7. Considere a região

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; y \geq x^2 - 1\right\}.$$

Calcule a área de R sem calcular integrais duplos.

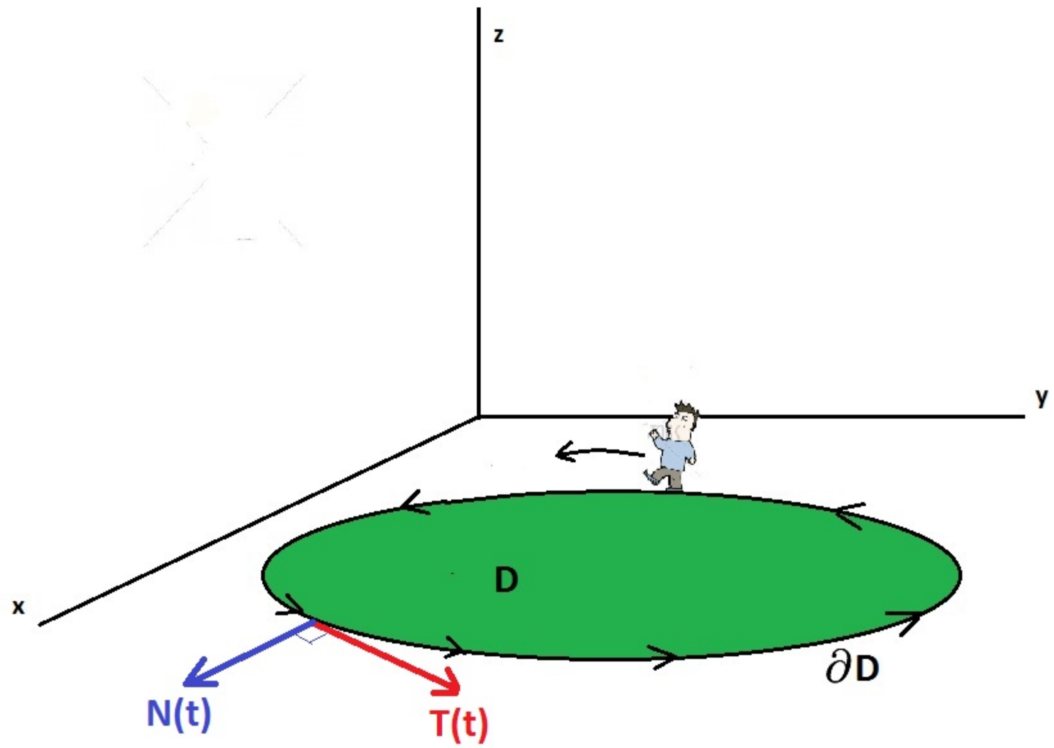
Interpretação vetorial do Teorema de Green

Suponhamos que D é uma região fechada e limitada do plano xy cuja fronteira ∂D é uma curva orientada em sentido anti-horário. Se ∂D tem uma parametrização $r(t) = (x(t), y(t))$ de classe C^1 com $t \in [a, b]$, cujo vetor tangente é nao nulo em cada ponto de ∂D, então denotemos os vetores tangente e normal unitário por:

$$T(t) = \frac{r^{'}(t)}{\left\|r^{'}(t)\right\|} = \left(\frac{x^{'}(t)}{\left\|r^{'}(t)\right\|}, \frac{y^{'}(t)}{\left\|r^{'}(t)\right\|}\right)$$

e

$$N(t) = \left(\frac{y^{'}(t)}{\left\|r^{'}(t)\right\|}, \frac{-x^{'}(t)}{\left\|r^{'}(t)\right\|}\right)$$



Neste caso o teorema de green assume a forma:

$$\oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot T) ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \ dy.$$

Este resultado é um caso particular do **Teorema de Stokes**, que veremos mais tarde.

Agora usando o vetor normal unitário $N(t)$ obtem-se:

$$\oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot N) ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\ dy.$$

Este resultado é a versão em duas dimensões do **Teorema de Gauss**, que veremos posteriormente.

Duas Formas para o Teorema de Green

Antes, faz-se necessário introduzir as seguintes definições.

Definição: Uma curva fechada $\mathcal{C}$ é chamada de **simples** se ela não tem interseção com ela mesma.

Definição: Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial com derivadas parciais definidas num subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$. O **campo vetorial rotacional** de $\vec{F}$, denotado por $rot(\vec{F})$, é definido por:

$$rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Definição: Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial com derivadas parciais definidas num subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$. O **divergente** de $\vec{F}$, denotado por $div(\vec{F})$, é definido por:

$$div(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$

Teorema de Green (Fluxo-Divergência ou forma normal) O fluxo exterior de um campo $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ através de uma curva fechada simples $\mathcal{C}$ é igual à integral dupla de $div(\vec{F})$ sobre Ω, limitada por $\mathcal{C}$.

$$\oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot N) ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dx\ dy.$$

Teorema de Green (Circulação-Rotacional ou Forma Tangencial) A circulação no sentido anti-horário de um campo $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ em torno de uma curva fechada simples $\mathcal{C}$ no plano é igual à integral dupla de $rot(\vec{F}) \cdot \vec{k}$ sobre Ω, limitada por $\mathcal{C}$.

$$\oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot T) ds = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\ dy.$$

Campos vetoriais conservativos no plano

Antes, faz-se necessário introduzir as seguintes definições.

Definição: Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é chamado de **conexo** se dois pontos quaisquer de Ω podem ser ligados por uma poligonal totalmente contida em Ω.

Definição: Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é chamado de **simplesmente conexo** se, para toda curva fechada $\mathcal{C}$ em Ω, a região limitada por $\mathcal{C}$ esta totalmente contida em Ω. Intuitivamente , um aberto Ω é **simplesmente conexo** se não tem "buracos".

Teorema: Seja $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ um campo vetorial de classe C^1 definido num subconjunto **simplesmente conexo** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. As seguintes condições são equivalentes:

1. $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr = 0$, qualquer que seja a curva fechada $\mathcal{C}$, C^1 por partes, contida em Ω.

2. A integral de linha de $\vec{F}$ do ponto A até o ponto B independe da curva C^1 por partes , contida em Ω, que liga A a B.

3. $\vec{F}$ é um campo gradiente de alguma função potencial f em Ω.

4. $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ em Ω.