

Topologia

Definição (Distância): Dados dois pontos de $\mathbb{R}^n$, $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Q = Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ a distância euclidiana entre eles é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

OBS: A distância entre os pontos P e Q é a norma ou comprimento do vetor $\vec{PQ}$.

$$d(P, Q) = \| \vec{PQ} \| = \| P - Q \|^2$$

Definição (Bola aberta) Diz-se, Bola aberta de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio ϵ ao conjunto

$$B(P_0; \epsilon) = \{P \in \mathbb{R}^n; d(P, P_0) < \epsilon\}$$

Definição (Bola reduzida) Diz-se, Bola aberta de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio ϵ ao conjunto

$$B'(P_0; \epsilon) = \{P \in \mathbb{R}^n; 0 < d(P, P_0) < \epsilon\}$$

Definição (Ponto de acumulação): Seja $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que P_0 é um ponto de acumulação de S se :

$$\forall \epsilon > 0, B'(P_0; \epsilon) \cap S \neq \emptyset$$

Obs: Denotaremos por P e P_0 pontos de $\mathbb{R}^2$, como pontos de coordenadas (x, y) e (x_0, y_0) respectivamente.

Limite

Limites: Escrevemos $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = L$ e dizemos que limite da função f no ponto $P_0(x_0, y_0)$ é igual a L quando:

(i) $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e P_0 é ponto de

acumulação de $Dom(f)$

(ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(P_0, \epsilon) > 0$ tal que

se $P \in Dom(f)$ e $0 < dist(P, P_0) < \delta$

então $|f(P) - L| < \epsilon$

Proposição(Propriedades dos limites):

Sejam $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções escalares e $P_0(x_0, y_0)$ um ponto de acumulação de $Dom(f) \cap dom(g)$. Se o $\lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) = L_1$ e

$\lim_{P \longrightarrow P_0} g(P) = L_2$ então

(i) O limite é único.

$$(ii) \lim_{P \longrightarrow P_0} \alpha f(P) + \beta g(P) = \alpha L_1 + \beta L_2$$

$$(iii) \lim_{P \longrightarrow P_0} f(P)g(P) = L_1 L_2$$

$$(iv) \lim_{P \longrightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ desde que } L_2 \neq 0.$$

(Teoremas e proposições sobre limites):

(1.) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = 0$ se e somente se $\lim_{P \rightarrow P_0} |f(x, y)| = 0$

(2.)(Teorema do sanduiche) Sejam f, g e h funções definidas numa vizinhança reduzida do ponto P_0 , na qual temos $g(P) \leq f(P) \leq h(P)$. Se

$$\lim_{P \rightarrow P_0} g(x, y) = \lim_{P \rightarrow P_0} h(x, y) = L$$

então,

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = L$$

(3.) Suponhamos que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam definidas numa bola reduzida de centro (x_0, y_0) , na qual $g(x, y)$

limitada e que $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = 0$. Então

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y)g(x, y) = 0$$

Limite relativo a um conjunto Seja S um subconjunto de $Dom(f)$, $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_0, y_0)$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$. **O limite de $f(P)$ relativo a S quando P tende para P_0 é L , e escreve-se**

$$\lim_{\underbrace{P \rightarrow P_0}_{P \in S}} f(P) = L$$

e e só se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, P_0) : \forall P \in S - \{P_0\},$$

$$P \in B(P_0; \delta) \implies f(P) \in B(L; \epsilon)$$

No caso em que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = m(x - x_0) + y_0\}$ a estes limites chamam-se os **limites direccionais**.

Proposição: Se o limite de uma função existir, então o limite relativo a qualquer conjunto existe e tem o mesmo valor.

Observação (O teste dos dois caminhos) No plano existem infinitas maneiras de nos aproximarmos de um dado ponto (x_0, y_0) , a existência do limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

significa que ele não deve depender de como nos aproximamos do ponto (x_0, y_0) . Em particular, se ao aproximarmos de (x_0, y_0) através de dois caminhos diferentes, a função $f(x, y)$ tender a valores diferentes, então o limite não existirá.

Exercicios: Utilize limites relativos para estudar os limites:

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$(ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Observação: No cálculo do limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y),$$

muitas vezes é conveniente fazermos a mudança de coordenadas cartesianas pra coordenadas polares:

$$x = x_0 + r \cos \theta \text{ e } y = y_0 + r \sin \theta$$

Como (x,y) converge (x_0,y_0) se, e somente se, a

$d((x,y); (x_0,y_0)) = r$ converge a zero, então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$$

o qual existirá se, somente se, ele não depender de θ

Inexistência de Limites

Limites relativos

- (i) Substituição explícita: usaremos Trajetórias do tipo $y = h(x)$ ou $x = h(y)$.
- (ii) Substituição implícita: usaremos Trajetórias do tipo $G(x, y) = 0$.
- (iii) Aplicação sucesiva da regra de L'Hopital.

Limite iterados ou sucessivos

Seja $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P_0(x_0, y_0)$ um ponto de acumulação de $Dom(f)$, então os limites

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\lim_{y \longrightarrow y_0} f(x, y) \right), \lim_{y \longrightarrow y_0} \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x, y) \right)$$

chamam-se de limites iterados ou sucessivos.

Proposição: Se dois limites iterados forem diferentes (existirem e forem finitos) então não existe limite.

Exercícios: Utilize limites iterados para estudar os limites:

$$(i) \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{x - 2y}{x + y}; \quad (ii) \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^5}$$

Continuidade

definição: Seja f definida numa vizinhança de P_0 . Dizemos que f é contínua em P_0 se

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Dizemos que f é contínua num conjunto S , se ela for contínua em cada ponto de S .

Teorema (Propriedades da continuidade) Suponha que f e g sejam contínuas no ponto P_0 e c uma constante. Então,

(i) As funções cf , $f + g$ e fg também serão contínuas em P_0 ,

(ii) Se $g(P_0) \neq 0$, então, f/g também será contínua em P_0 e

(iii) se $h(z)$ for uma função de uma variável real que é contínua em $z_0 = f(P_0)$, então, a função composta $h(f(P))$ também será contínua em P_0 .