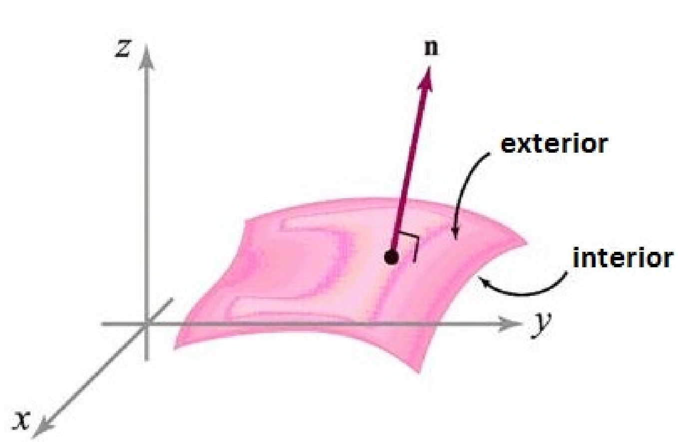
Integral de superfície de campo vetorial

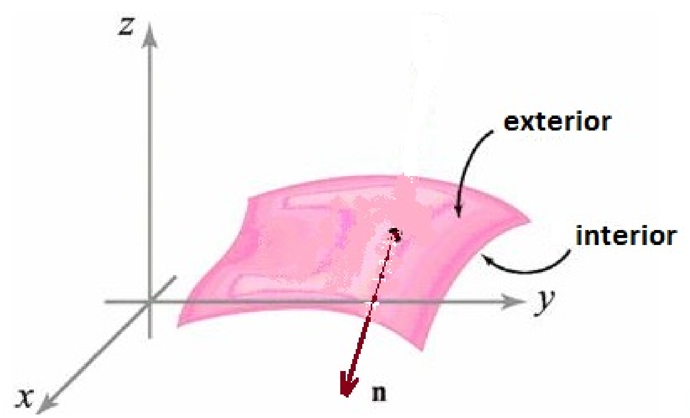
Quando estudamos as integrais de linha ($\mathcal{C}$) de função vetorial ($\vec{F}$), vimos que a definição dependia da orientação da curva, isto é,

$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr = -\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr.$$

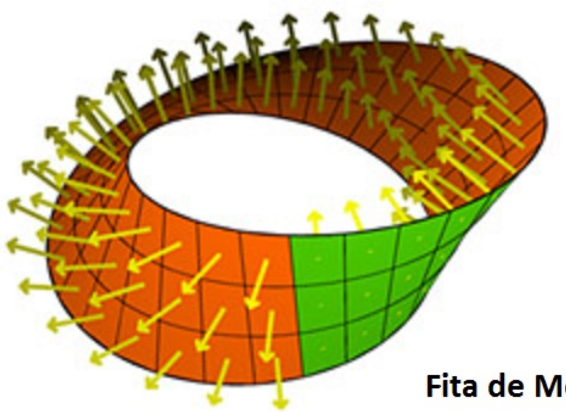
Aqui , em integral de superfície de uma função vetorial, a definição também depende do conceito de **superfície orientada**, que passaremos a definir.

Orientação de uma superfície: Uma superfície $\mathcal{S}$ diz-se **orientável** se podemos definir um vetor normal unitário $\vec{n}$ a cada ponto de S e de modo que estes vetores variem continuamente sobre a superfície S. Intuitivamente falando, significa que $\mathcal{S}$ tem dois lados. Assim quando orientamos uma superfície escolhemos um dos dois possíveis vectores normais unitários.

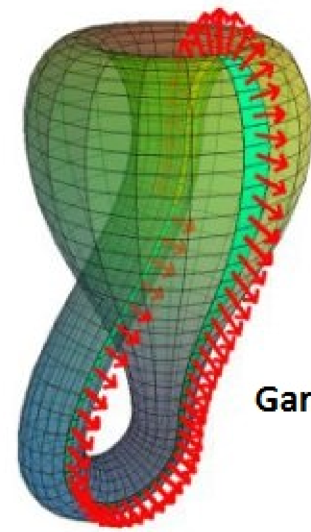




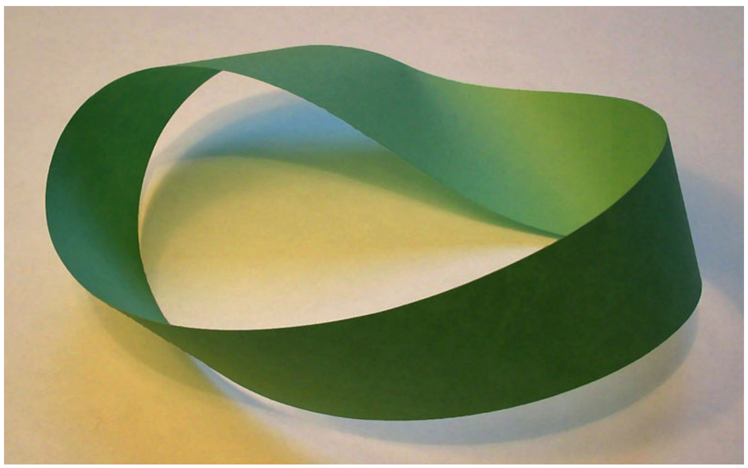
Há superfícies que tem um lado só, por exemplo:



Fita de Mobius



Garrafa de Klein

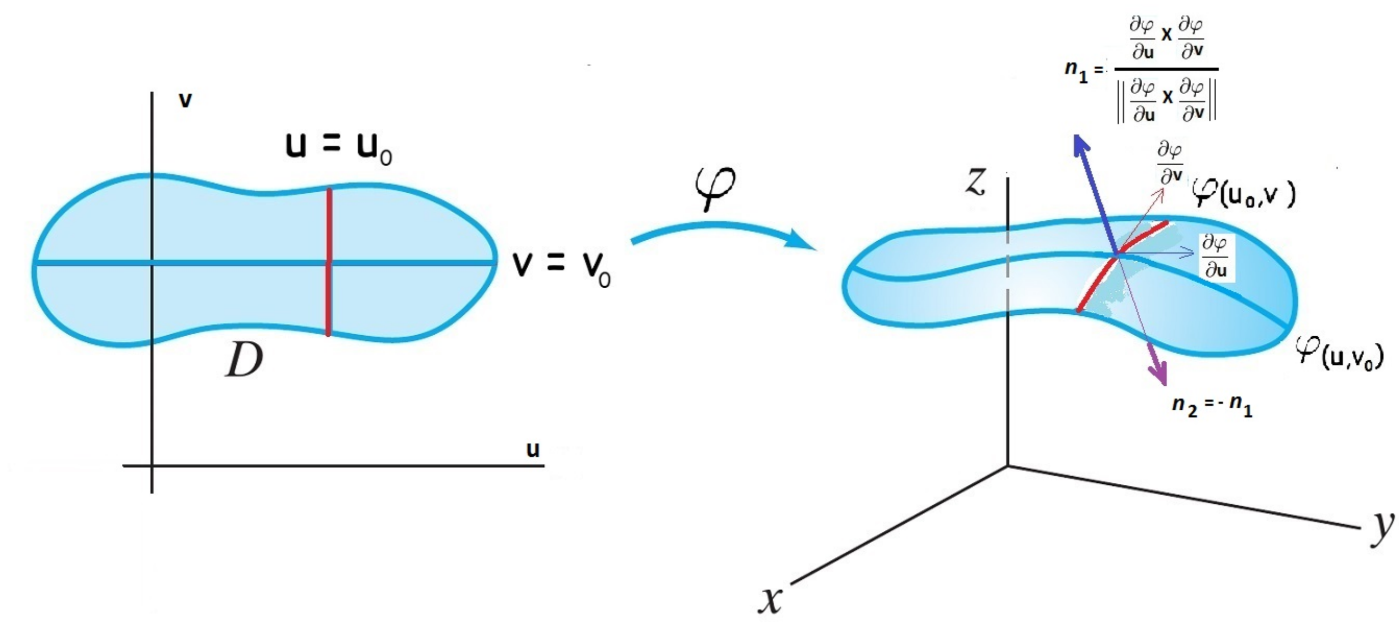


Integral de superfície de campo vetorial Seja $\mathcal{S}$ uma superfície parametrizada por uma função $\varphi(u,v)$ com $(u,v) \in \mathcal{D}$. A esta superfície estão associados dois campos de vetores normais unitários e continuos, a saber:

$$n_1(\varphi(u,v)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

e

$$n_2(\varphi(u,v)) = -\, n_1(\varphi(u,v))$$



Definição .1 (Integral de superfície de função vetorial) *Considere-se:*

1. *Seja S uma superfície orientada de parametrização φ e orientação $\vec{n}$, isto é, $(S, \vec{n})$*

2. *Seja* $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial contínuo, tal que* $S \subset \Omega$.

Define-se

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}\left(\varphi(u,v)\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \, du dv$$

Nota:
$\iint_S \vec{F} \cdot dS$ é o **fluxo** que atravessa S com velocidade $\vec{F}$, ou seja, é a quantidade de fluido que atravessa a superfície S por unidade de tempo.

Exercícios

1. Calcule o fluxo de $\vec{f}(x,y,z) = (x,0,0)$ através das superfícies

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ 0 < y < 2, 0 < z < 2\right\}$$

e

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2, \ 0 < y < 2, 0 < z < 2\right\}$$

segundo a normal com a primeira componente positiva. E através da superfície

$$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2, \ 0 < x < 2, 0 < y < 2\right\}$$

segundo a normal com a terceira componente positiva. Comente o resultado.

2. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$ sendo $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, 2x+2y+2z)$ e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = z,\ z < 4,\ x > 0,\ y > 0\right\}$$

segundo uma normal à sua escolha.

3. Calcule o fluxo de $\vec{f}(x,y,z) = \left(y^2 z, 0, 0\right)$ através da superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = z,\ z < 4\right\}$$

segundo a normal "exterior".

4. Determine o fluxo de $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ através da superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 4-z,\ z > 0\right\}$$

orientada por um vector normal unitário apontado para cima.

5. Calcule o fluxo de $\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ através da superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - x^2 - y^2, \ 0 < z < 1\right\}$$

segundo a normal com a terceira componente positiva.