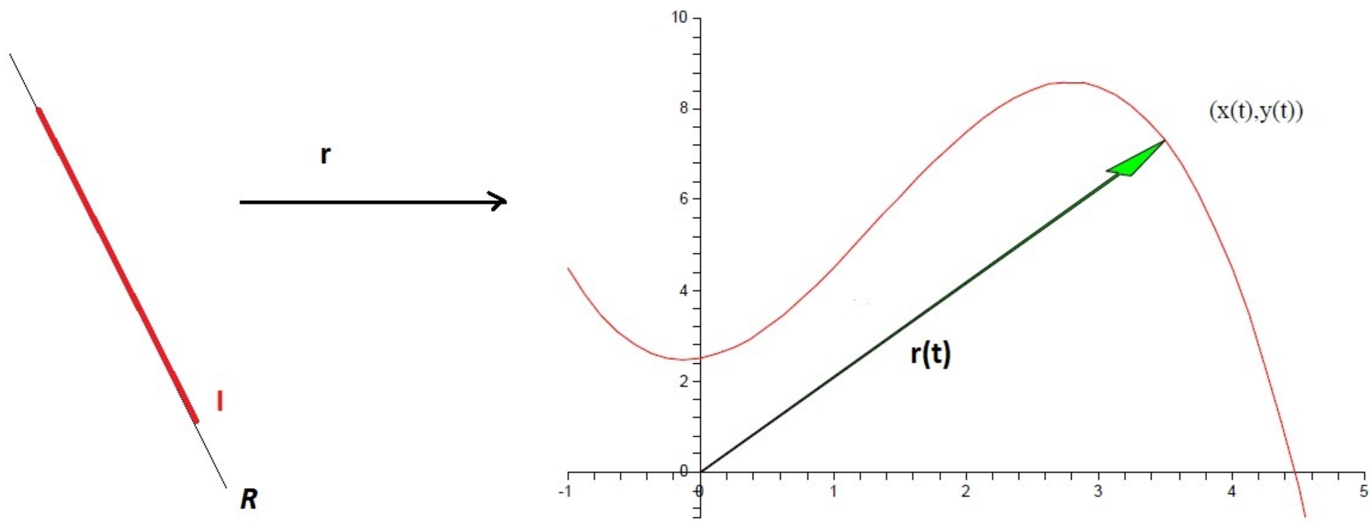
PARAMETRIZAÇÃO DE CURVA:

parametrizar uma curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ (n=2 ou 3), consiste em definir uma função vetorial:

$$r \; : \; I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \;\; (n = 2 \text{ ou } 3),$$

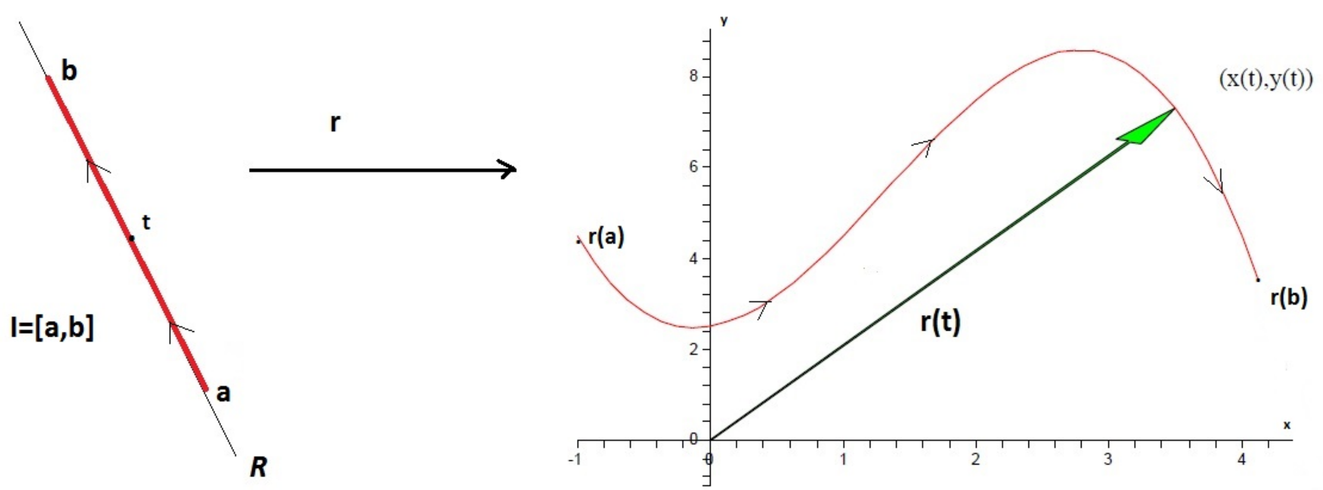
onde I é um intervalo e $r(I) = \mathcal{C}$.



Equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$

Seja $\mathcal{C}$ uma **curva/linha** de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R},$$



com x e y funções contínuas em I e variável t é o parâmetro.
A **orientação** da curva $\mathcal{C}$ corresponde ao sentido definido pelos valores crescentes de t no intervalo I.

Ao ponto $r(a)$ chama-se **origem** ou ponto de partida da curva $\mathcal{C}$ e ao ponto $r(b)$ chama-se **extremidade** ou ponto de chegada da curva $\mathcal{C}$.

Se eliminarnos o parâmetro t nas equações (1.1) obteremos uma expressão cartesiana da curva $\mathcal{C}$.

Exercícios: Represente geometricamente as curvas:

1. $\vec{r}(t) = (t, t^2), t \in [0, 2]$

2. $\vec{r}(t) = (t, t + 3), t \in [0, 5]$

3. $\vec{r}(t) = (t, t), t \in [0, 2]$

4. $\vec{r}(t) = (1 + 2t, 2 + t), t \in [0, 1]$

5. $\vec{r}(t) = (t - 1, 3t + 2), t \in [0, 2]$

6. $\vec{r}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$

7. $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 4\sin(t)), t \in [0, \pi]$

8. $\vec{r}(t) = (\cos(t) - 2, \sin(t) + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

9. $\vec{r}(t) = (5\cos(t), 4\sin(t)), t \in [\pi, 2\pi]$

10. $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [-\pi, \frac{\pi}{3}]$

11. $\vec{r}(t) = (\cos(t) - 4, \sin(t) + 2), t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$

12. $\vec{r}(t) = (\sin(t) - 1, \cos(t) + 3), t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

Uma parametrização de um **segmento de recta** com origem em A e extremidade em B, pode ser:

$$\vec{r}(t) = A + t(\vec{AB}), t \in [0, 1].$$

Seja $\mathcal{C}$ uma curva dada pelo caminho $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ com origem em $A = \vec{r}(A)$ e extremidade em $B = \vec{r}(B)$. A curva $-\mathcal{C}$ (com origem em B e extremidade em A) é dada pelo **caminho inverso** de $\vec{r}$
Uma parametrização para $-\mathcal{C}$ é dada por $\vec{r}^*$, a qual obtém-se a partir de $\vec{r}(t)$ substituindo t por $-t$, ou seja,

$$\vec{r}^*(t) = \vec{r}(-t), \quad t \in [-b, -a].$$

Exemplo: Parametrize o segmento de recta de $\mathbb{R}^2$ que começa em (0,1) e termina em (2,3) e o caminho inverso.

Exercícios: Parametrize as seguintes curvas ($\mathcal{C}$) e as curvas inversas ($-\mathcal{C}$):

1. O segmento de recta que começa em (1,2) e termina em (-1,-3).

2. A parte da recta $y = 2x$ para $x \in [-2, 3]$.

3. A parte do gráfico da função $f(x) = e^{x^2} - 1$ para $x \in [0, 1]$.

Equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$

Seja $\mathcal{C}$ uma **curva/linha** de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{array}{rccc} \vec{r}: & I = [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Exercícios: Represente geometricamente as curvas:

1. $\vec{r}(t) = (0, 2, 2t), t \in [-1, 1]$

2. $\vec{r}(t) = (0, t, 2t + 1), t \in [0, 3]$

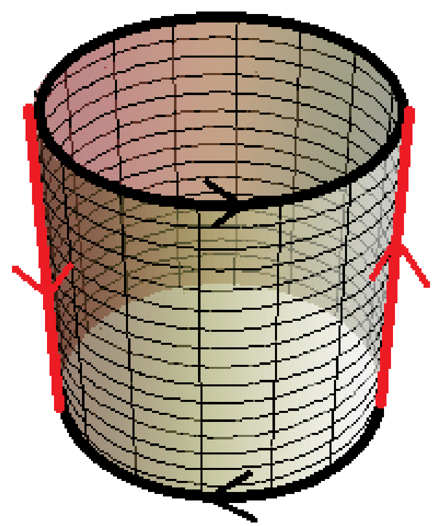
3. $\vec{r}(t) = (\cos\ t, \sin\ t, 2), t \in [0, 2\pi]$

4. Hélice circular: $\vec{r}(t) = (\cos\ t, \sin\ t, t), t \in [0, 4\pi]$

5. Hélice elíptica: $\vec{r}(t) = (2\cos\ t, 3\sin\ t, t), t \in [0, 4\pi]$

Exercícios: Parametrize as linhas de $\mathbb{R}^3$ indicadas na figura seguinte que representa o cilindro

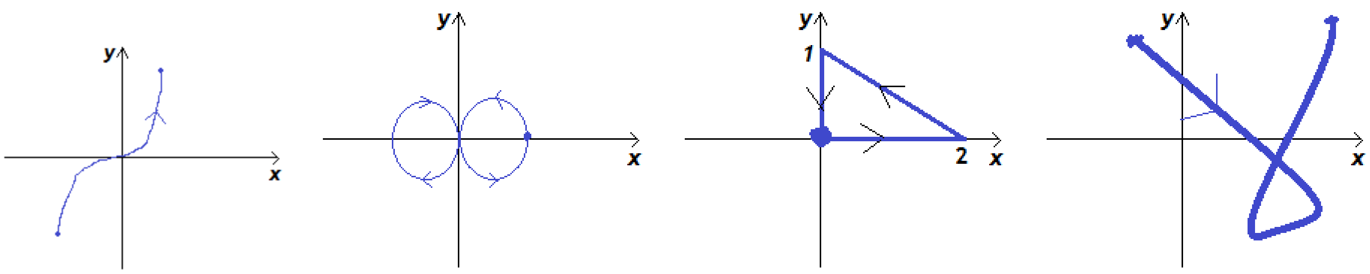
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2=9, \quad 0 \leq z \leq 5\}$$



Classificação de curvas Seja $\mathcal{C}$ uma curva dada por $\vec{r}(t)$, com $t \in [a, b]$.

A curva $\mathcal{C}$ diz-se **fechada** se a origem coincide com a extremidade, ou seja, $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Caso contrário a curva diz-se **aberta**.

A curva $\mathcal{C}$ diz-se **simples** se não se intersecta a si própria (excluindo a origem e a extremidade).



Vector tangente e recta tangente

Vector tangente e recta tangente: Seja $\mathcal{C}$ uma curva de $\mathbb{R}^n$ dada por $\vec{r}(t), \quad t \in [a,b]$.

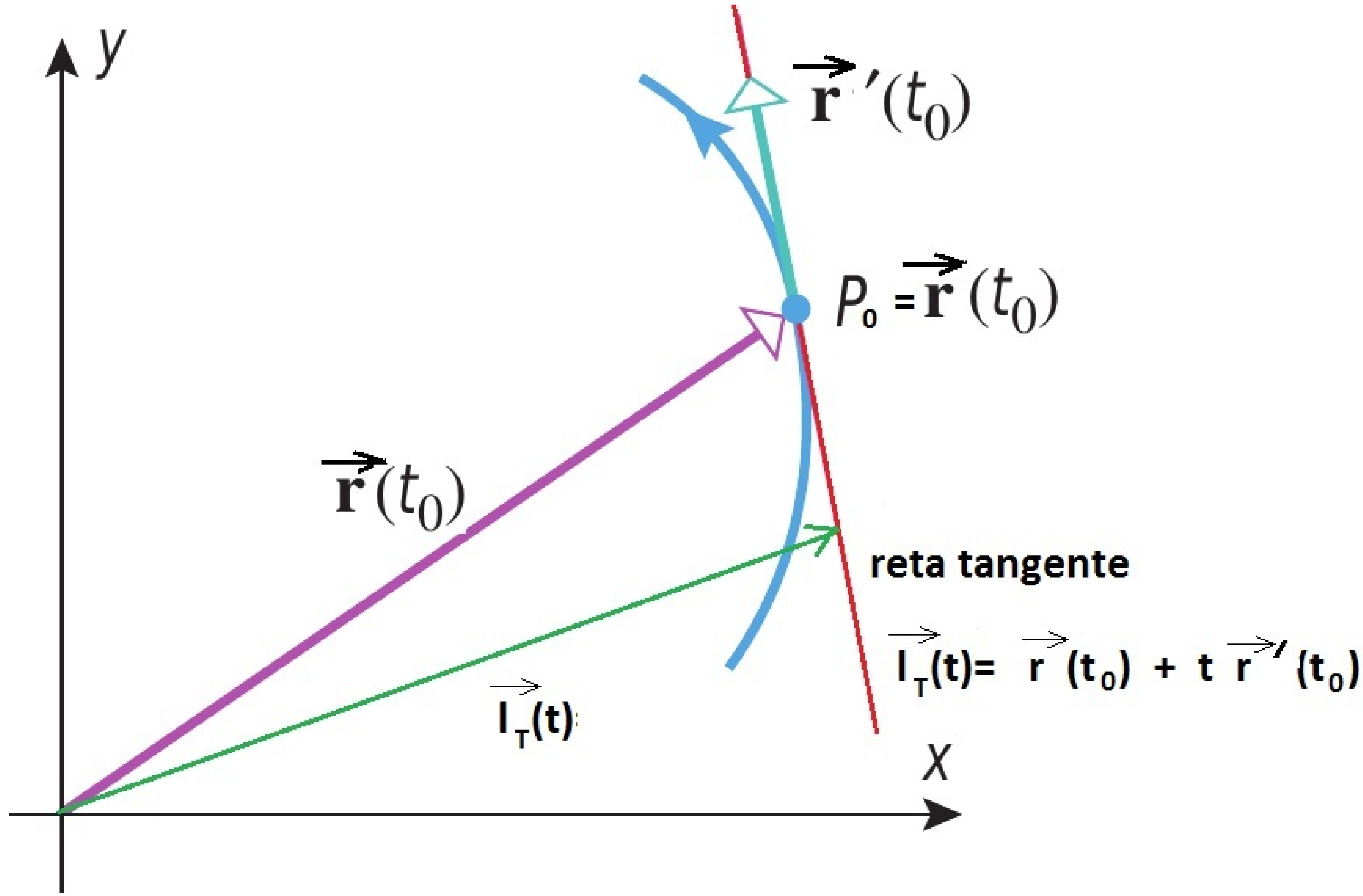
Designa-se por **vector tangente à curva C no ponto** $P_0 = \vec{r}(t_0)$ a derivada

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}, \quad t_0 \in]a,b[$$

quando existe e é não nula.

A **recta tangente** à curva em $P_0 = \vec{r}(t_0)$ é dada por:

$$\vec{l}_T(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}\,'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$



y
$\vec{\mathbf{r}}\,'(t_0)$
$P_0 = \vec{\mathbf{r}}(t_0)$
$\vec{\mathbf{r}}(t_0)$
reta tangente
$\vec{l}_T(t) = \vec{r}(t_0) + t\,\vec{r}\,'(t_0)$
$\vec{l}_T(t)$
X

exercicios:

1. Considere o caminho, $\vec{r}(t)$, que leva de $A = (1, 0)$ para $B = (-1, 0)$, ao longo de uma circunferência de equação
$$x^2 + y^2 = 1$$
em sentido directo (anti-horário). Determine a equação da recta tangente à curva no ponto (0,1).

2. Considere o caminho, $\vec{r}(t)$, que leva de $A = (1, 0)$ para $B = (0, 2)$, ao longo de uma elipse de equação
$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

em sentido directo (anti-horário). Determine a equação da recta tangente à curva no ponto correspondente a $t = \frac{\pi}{4}$.

3. Determine a recta tangente à curva representada pela função

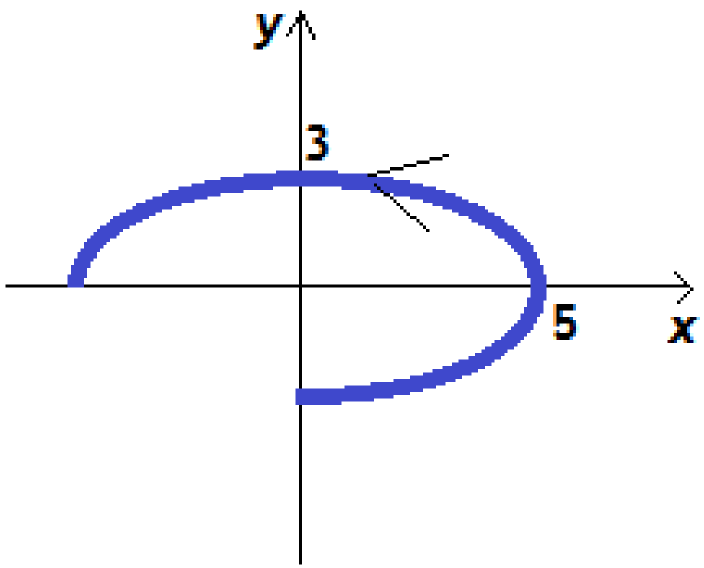
$$\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), t)$$

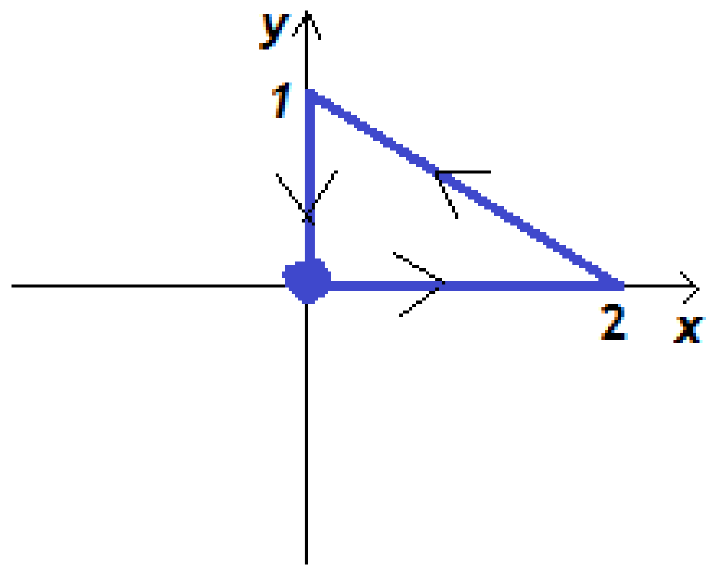
no ponto $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Uma curva $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ dada por $\vec{r}(t), \quad t \in [a,b]$ diz-se **regular** se a derivada $\vec{r}\,'(t)$ existe e é contínua (o que significa que $\vec{r}(t) \in C^1$) e não nula em $]a,b[$.

$\mathcal{C}$ é **seccionalmente regular** se se puder dividir num número finito de curvas regulares.

Nota: Se um caminho é regular, a curva por ele descrita não apresenta bicos nem esquinas angulosas pois a derivada evolui sem variações bruscas de direcção ou sentido.


y
3
5
x


y
1
2
x

Comprimento de uma linha ou curva :

Seja $\mathcal{C}$ uma curva dada por $\vec{r}(t), \quad t \in [a, b]$.

Chamamos **comprimento da linha/curva** $\mathcal{C}$ com origem em $A = \vec{r}(a)$ e extremidade $B = \vec{r}(b)$ ao integral

$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \left\| \vec{r}'(t) \right\| \, dt \quad *$$

Uma curva diz-se **rectificável** se tiver comprimento finito.

*Este integral não depende da parametrização escolhida para $\mathcal{C}$.

Exercícios

1. Prove que o perímetro de uma circunferência de raio R é $2\pi R$.

2. Determine k de modo que o comprimento da recta $y = -2x + 1$ com $x \in [0, k]$ seja 2.

3. Considere

$$\vec{r}(t) = 4\sin(t)\vec{e}_1 + 3t\vec{e}_2 + 4\cos(t)\vec{e}_3, \qquad t \in [0, \pi]$$

Esboce a curva e calcule o seu comprimento.

$(Rpta : 5\pi)$

4. Determine o comprimento da curva $\mathcal{C}$ de equações

$$\left\{ \begin{array}{c} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \end{array} \right. , \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

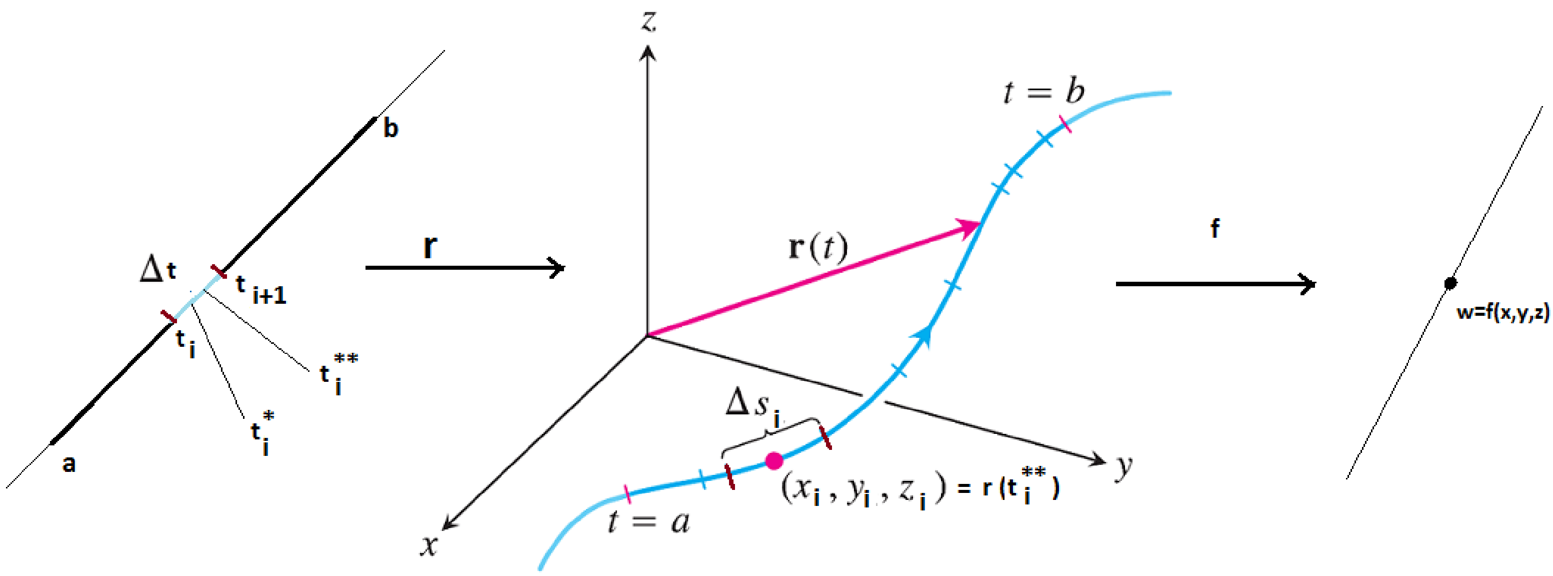
5. Determine o comprimento do arco de curva dado por

$$\left\{ \begin{array}{c} x = ae^t \cos(t) \\ y = ae^t \sin(t) \\ z = ae^t \end{array} \right.$$

desde (a, o, a) até $(-ae^\pi, 0, ae^\pi)$. R: $\sqrt{3}a(e^\pi - 1)$

Integral de linha de campo escalar
Seja $\mathcal{C}$ uma curva contida em $\mathbb{R}^3$ dada por $\vec{r}(t)$, com $t \in [a, b]$.

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo cujo domínio D_f contem todos os pontos da curva $\mathcal{C}$



Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos I_i, com $i = 1, 2, 3, ..., n$ de mesmo comprimento $\triangle t = \frac{b-a}{n}$. logo, a curva $\mathcal{C}$ fica dividida em n subarcos de comprimento $\triangle \mathsf{S}_1, \triangle \mathsf{S}_2, ..., \triangle \mathsf{S}_n$, onde:

$$\triangle \mathsf{S}_i \approx ||r^{'}(t_i^*)||\triangle t \text{ para algum } t_i^* \in I_i.$$

Formemos a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(r(t_i^{**}))\triangle S_i = \sum_{i=1}^{n} f(r(t_i^{**}))||r^{'}(t_i^*)||\triangle t$$

Definimos a integral de linha de f sobre $\mathcal{C}$ por

$$\int_{\mathcal{C}} f \; ds = \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \; ds = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} f(r(t_i^{**}))||r^{'}(t_i^*)||\triangle t$$

se o limite existir.

Observação:

- Se f é uma função continua, então o limite existe e
$$\int_{\mathcal{C}} f \ ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \vec{r}'(t) \right\| \ dt$$

- A integral de linha de uma função escalar f sobre $\mathcal{C}$ não depende da parametrização escolhida para $\mathcal{C}$ e nem de sua orientação, isto é, denotando por $-\mathcal{C}$ a curva $\mathcal{C}$ percorrida em outro sentido, então:
$$\int_{-\mathcal{C}} f \ ds = \int_{\mathcal{C}} f \ ds$$

- Se $f = 1$ então $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f \ ds =$ comprimento de $\mathcal{C}$

- Seja f e g campos escalares contínuos com $D_f, D_g \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ curva regular totalmente contida em $D_f \cap D_g$. Então

$$\int_{\mathcal{C}} \alpha f + \beta g \; ds = \alpha \int_{\mathcal{C}} f \; ds + \beta \int_{\mathcal{C}} g \; ds$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Seja f campo escalar contínuos com $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ curvas regulares totalmente contidas em D_f

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f \; ds = \int_{\mathcal{C}_1} f \; ds + \int_{\mathcal{C}_2} f \; ds$$

Aplicações:

Interpretação geometrica

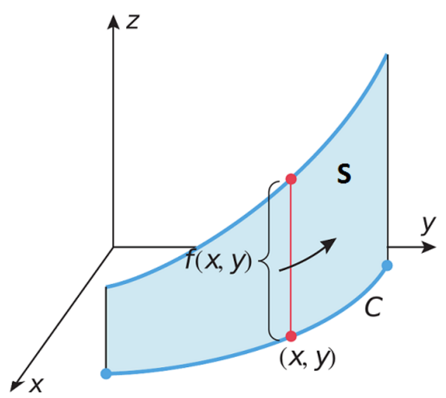
- Seja $\mathcal{C}$ é uma curva no plano xy definida por uma função de classe C^1,

$$r(t) = (x(t), y(t)),\ a \leq t \leq b$$

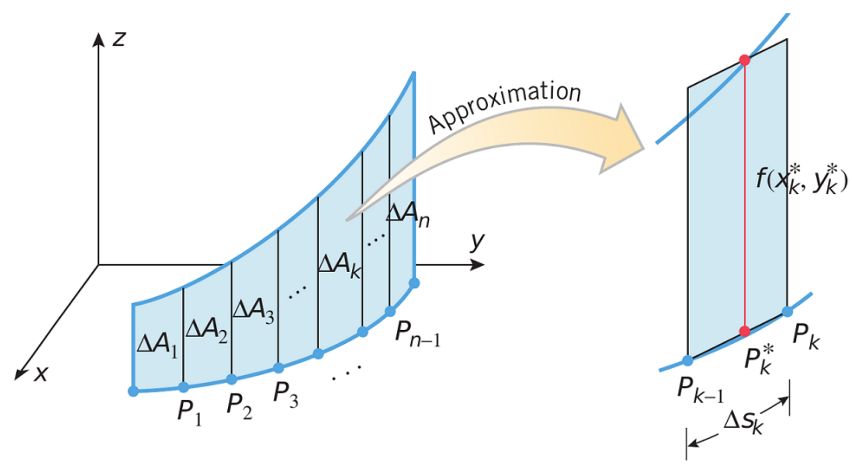
- seja $f(x, y)$ uma função escalar, continua , positiva e definida em $\mathcal{C}$.

Então

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \left\| \vec{r}'(t) \right\|\ dt = \text{área}(\mathcal{S})$$



$$\int_C f\,ds = \text{Área}(S)$$



Exercício : Use a integral de linha para encontrar a área da superfície lateral sobre a curva $\mathcal{C}$ e abaixo da superfície $z = f(x, y)$, onde

1. $\mathcal{C} : x^2+y^2 = 1$ com $y \geq 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e $f(x, y) = xy$.

2. $\mathcal{C} : y = 1 - x^2$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e $f(x, y) = x$.

Aplicações na Física:

Se $f(x,y)$ representa a densidade (massa por unidade de comprimento) de um arame $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, então

- Massa total do arame $\mathcal{C}$ é dada por

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\ ds = M(\mathcal{C})$$

- O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ do arame é dado por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x f(x,y)\ ds}{M(\mathcal{C})}, \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y f(x,y)\ ds}{M(\mathcal{C})}$$

- O **momento de inércia** de $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \int_{\mathsf{C}} r^2(x,y)\rho(x,y)\ ds$$

onde $r(x,y) =$ distância de (x,y) ao eixo L.

Se $f(x,y,z)$ representa a densidade (massa por unidade de comprimento) de um arame $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, então:

- Massa total do arame $\mathcal{C}$ é dada por

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\ ds = M(\mathcal{C})$$

- O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ do arame é dado por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x f(x, y, z) \; ds}{M(\mathcal{C})},$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y f(x, y, z) \; ds}{M(\mathcal{C})},$$

$$\overline{z} = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z f(x, y, z) \; ds}{M(\mathcal{C})}.$$

- O **momento de inércia** de $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \int_{\mathcal{C}} r^2(x,y,z) f(x,y,z)\ ds$$

onde $r(x,y,z) =$ distância de (x,y,z) ao eixo L.

Exercício :

1. Determine a massa de um fio com a forma da curva $y = \ln x$, com $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$, se a densidade em cada ponto é igual ao quadrado da abscissa do ponto.

2. Determine a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3\cos t$, $y = 3\text{sen } t$ e $z = 4t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, se a densidade for $\delta(x, y, z) = \frac{kx}{1+y^2}$ com $k > 0$.

3. Calcule o centro de massa do fio $\mathcal{C}$ parametrizado por $\vec{r} = (t, t, t)$, com $0 \leq t \leq 1$, com densidade linear $\delta(x, y, z) = xyz$.

4. Seja $\mathcal{C}$ um fio delgado com a forma da interseção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e com $z \geq 0$ com o plano $x + y = 1$. Calcule o momento de inércia de $\mathcal{C}$ em relação ao eixo z, se a densidade em cada ponto do fio é proporcional à sua distância ao plano xy.