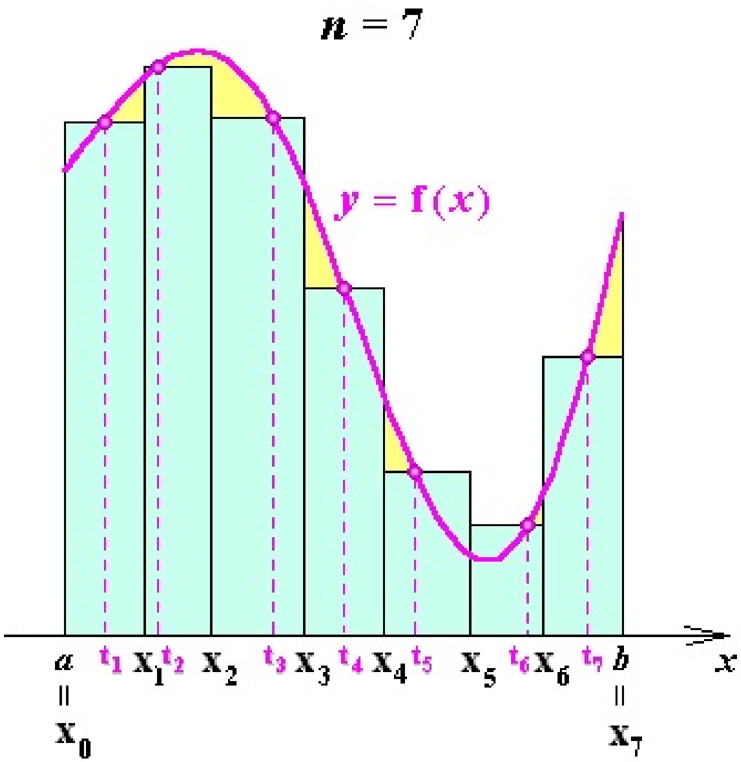
Revisão de integrais simples



Definimos a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

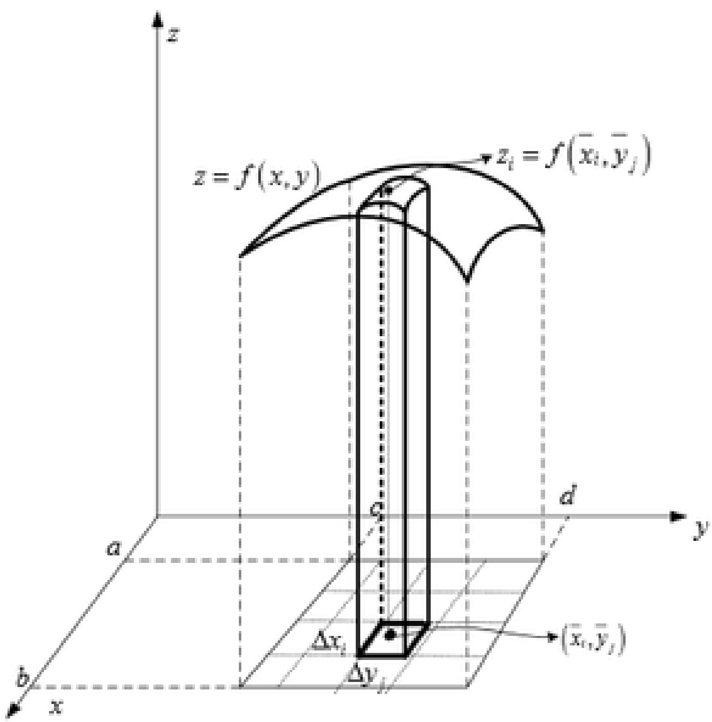
chamada como soma

de Riemann de f sobre $[a, b]$

Definição: Se a sequencia $\{S_n\}$ das somas de Riemann da função f converge quando n tende para $+\infty$ e este limite é independente da escolha dos pontos t_i nos subitervalos $[x_i, x_{i+1}]$ dizemos que f é integravel no intervalo $[a, b]$ e escrevemos:

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Integral duplo de Riemann



Definimos a soma

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

chamada como soma

de Riemann de f sobre R

Definição: Se a sequencia $\{S_{nm}\}$ das somas de Riemann da função f converge quando n e m tendem para $+\infty$ e este limite é independente da escolha dos pontos $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$ nos subretângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ dizemos que f **é integravel na região** R e escrevemos:

$$\int\int_R f(x,y)\ dx\ dy = \lim_{n,m \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Teorema 1: Toda função contínua definida numa região fechada e limitada $\mathcal{R}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$.

Teorema 2: Seja $\mathcal{R}$ uma região fechada e limitada do plano. Se f é contínua, exceto num conjunto de área nula, então f é integrável em $\mathcal{R}$.

Obs: conjuntos de comprimento nulo no reta: pontos.
Obs: conjuntos de área nula no plano: pontos e curvas.
Obs: conjuntos de volume nulo no espaço: pontos, curvas e superficies.

Propriedades: Sejam f e g funções integráveis numa região $\mathcal{R}$ e λ constante real.

- Então $f + \lambda g$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\int\int_{\mathcal{R}} f + \lambda g \; dA = \int\int_{\mathcal{R}} f \; dA + \lambda \int\int_{\mathcal{R}} g \; dA$$

- Se $f(x,y) \geq g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathcal{R}$ então

$$\int\int_{\mathcal{R}} f \; dA \geq \int\int_{\mathcal{R}} g \; dA$$

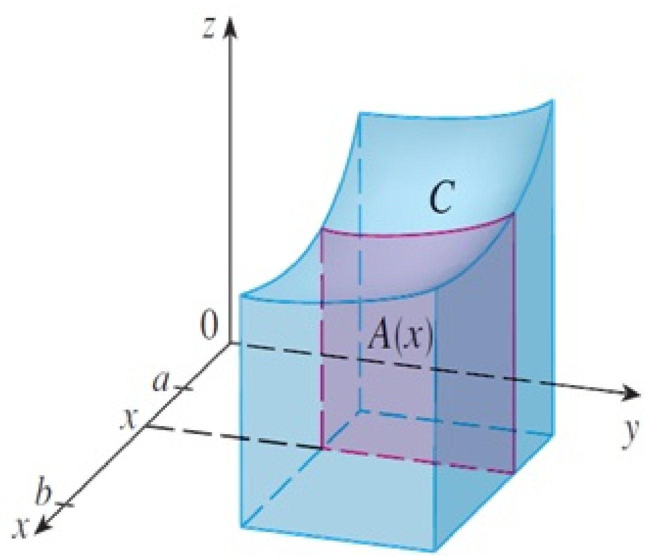
- $$\left| \int\int_{\mathcal{R}} f \; dA \right| \leq \int\int_{\mathcal{R}} |f| \; dA$$

- Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ duas regiões de $\mathbb{R}^2$: $int(\mathcal{R}_1) \cap int(\mathcal{R}_2) = \emptyset$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ então

$$\int\int_{\mathcal{R}} f \; dA = \int\int_{\mathcal{R}_1} f \; dA + \int\int_{\mathcal{R}_2} f \; dA$$

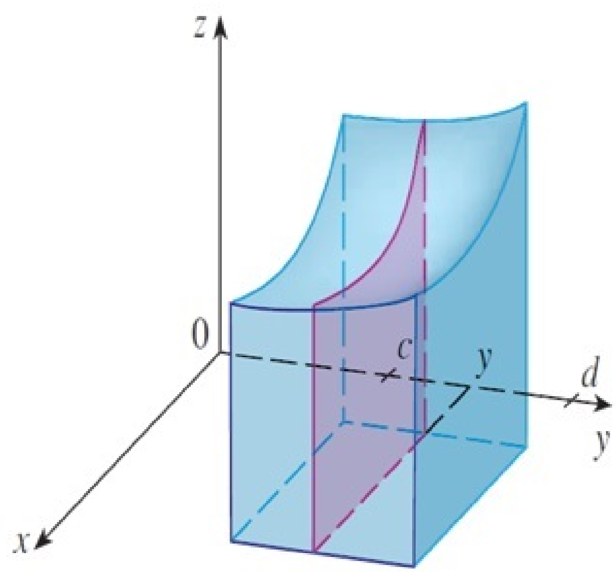
Teorema de Fubini (primeira forma) Se $f(x, y)$ for contínua na região retangular $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, então a integral dupla de f sobre $\mathcal{R}$ pode ser obtida através de integrais iteradas, ou seja:

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)dxdy = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

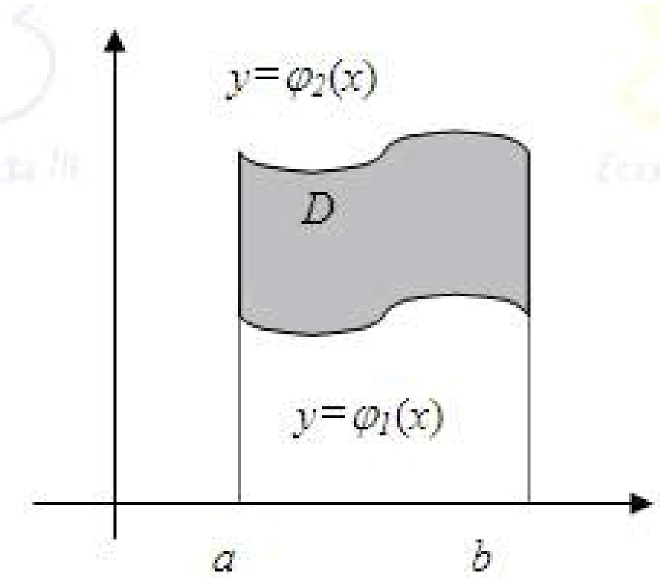


ou

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]\, dy$$



Teorema de Fubini (segunda forma) Seja f uma função definida e contínua num subconjunto limitado, fechado e nao retangular $D \subset \mathbb{R}^2$. Se



D conjunto de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

$$a \leq x \leq b,$$

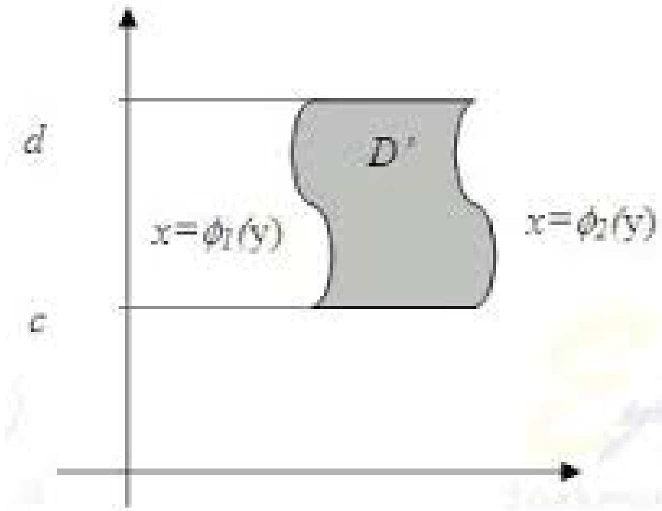
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x).$$

Neste caso D é chamado de região do **tipo I**.

então

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$

Se



D conjunto de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

$$c \leq y \leq d,$$

$$\phi_1(x) \leq x \leq \phi_2(x).$$

Neste caso D é chamado de região do **tipo II**.

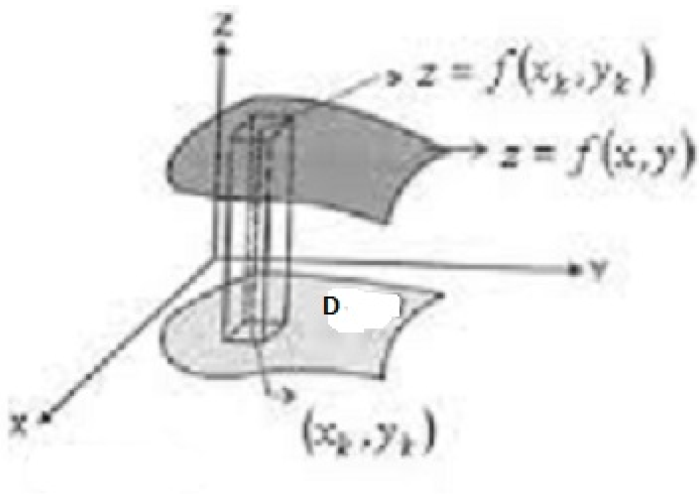
então

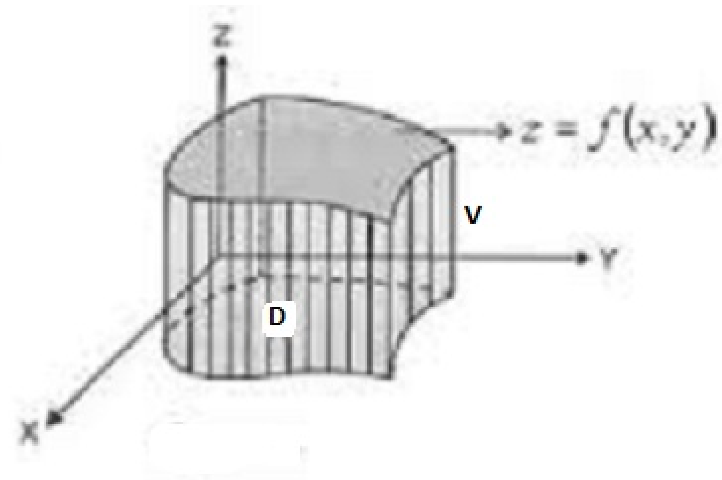
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Áreas e volumes usando integrais duplos

- Seja $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y), (x,y) \in D\right\}$ então

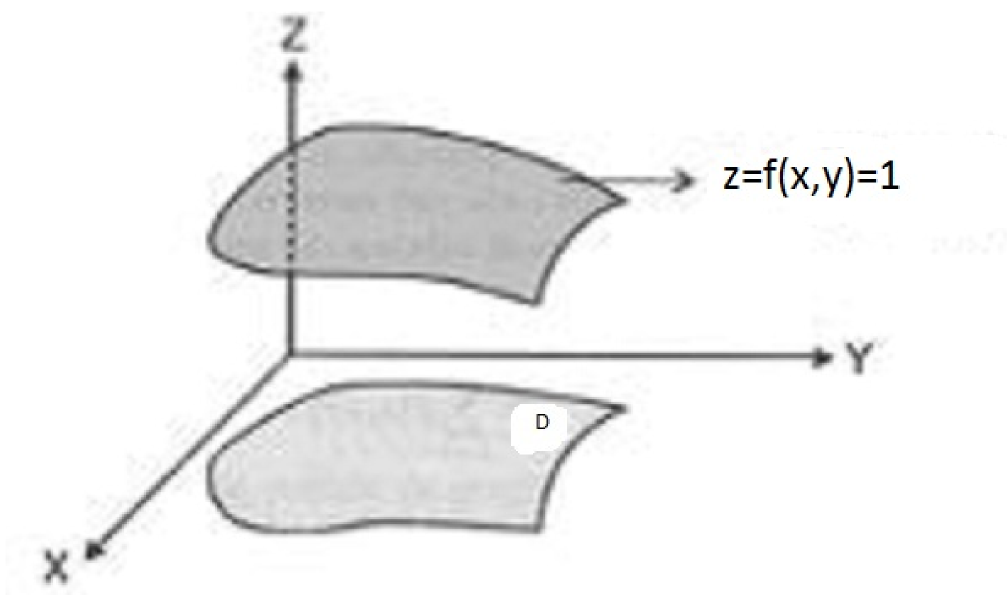
$$\text{volume de } (S) = \int\int_D f \; dA$$





- Seja R uma região limitada de $\mathbb{R}^2$ então

$$\text{área de } (D) = \int\int_D \mathbf{1}\ dA$$



Aplicações Sendo $\rho(x,y)$ a função que indica a densidade em cada ponto de uma placa com a forma da região R.

- A **massa** de uma placa com a forma da região R é dada por
$$\int\int_R \rho(x,y)\ dA$$

- O **centro de massa** de uma região R é $(\overline{x},\overline{y})$ onde
$$\overline{x} = \frac{\int\int_R x\rho(x,y)dA}{\int\int_R \rho(x,y)dA}$$
$$\overline{y} = \frac{\int\int_R y\rho(x,y)\ dA}{\int\int_R \rho(x,y)\ dA}$$

- A **carga eléctrica** numa região R é dada por

$$\int\int_R \rho(x,y)\ dA$$

onde $\rho(x,y)$ é a função que indica a densidade da carga em cada ponto.

- O **momento** de uma lâmina em torno do eixo é

$$M_x = \int\int_R y\rho(x,y)\ dA$$

$$M_y = \int\int_R x\rho(x,y)\ dA$$

onde $\rho(x,y)$ é a função que indica a densidade de massa em cada ponto.

- O **momento de inércia** em torno do eixo dos xx (yy) é:

$$I_x = \int\int_R y^2 \rho(x,y)\ dA$$

$$\left(I_y = \int\int_R x^2 \rho(x,y)\ dA\right)$$

- O **momento de inércia** em torno da origem (ou momento polar de inércia) é

$$I_0 = I_x + I_y = \int\int_R (x^2 + y^2)\rho(x,y)\ dA$$