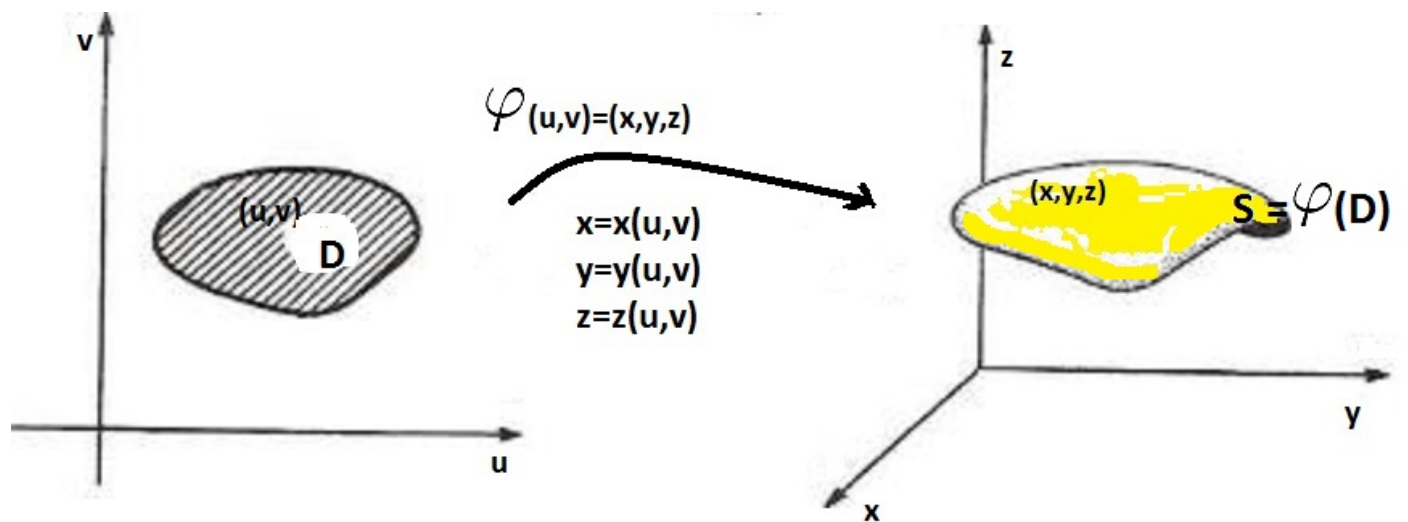


Superfície Parametrizadas: Dizemos que $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada se existir uma função vetorial contínua definida da forma seguinte:

$$\varphi : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

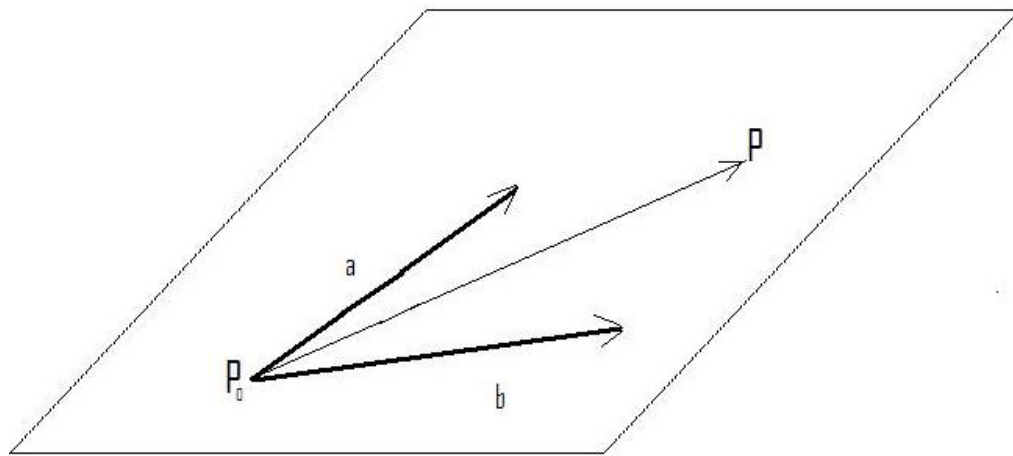
$$(u, v) \longrightarrow \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



Parametrizações das principais superfícies:

1) Plano $\mathcal{S}$

Sejam $P_0 \in \mathcal{S}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não paralelos contido no plano $\mathcal{S}$.



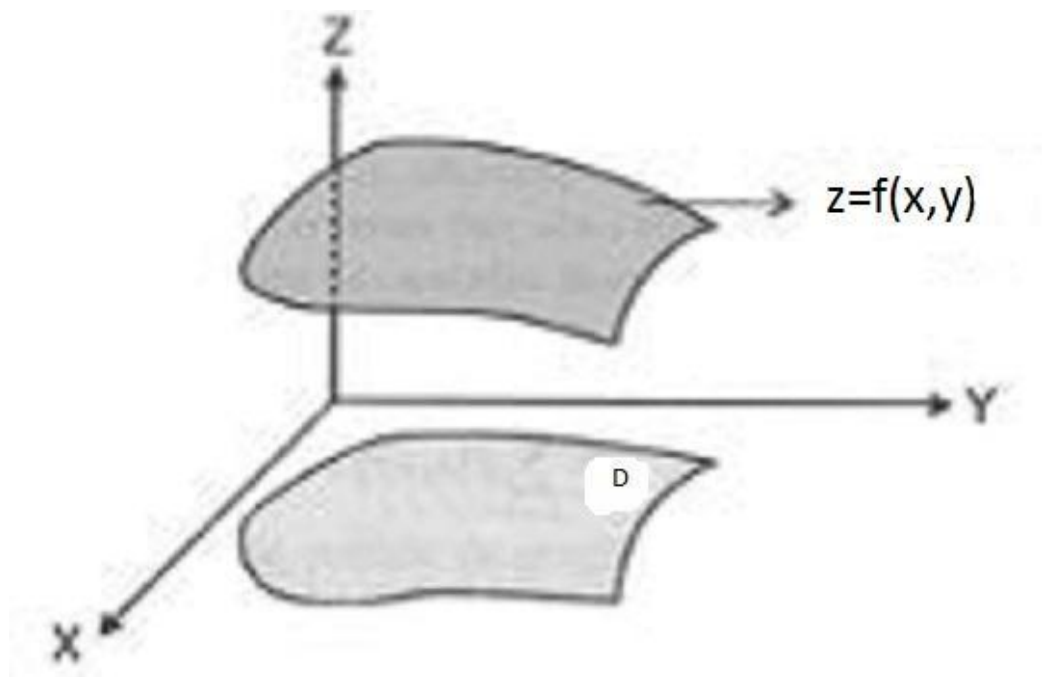
Seja $P \in \mathcal{S}$. Então , existem escalares u e v , tais que:

$$\vec{P_0P} = u\vec{a} + v\vec{b} \Leftrightarrow P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

Então, uma parametrização do plano $\mathcal{S}$ é dada por:

$$\varphi(u, v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b} \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

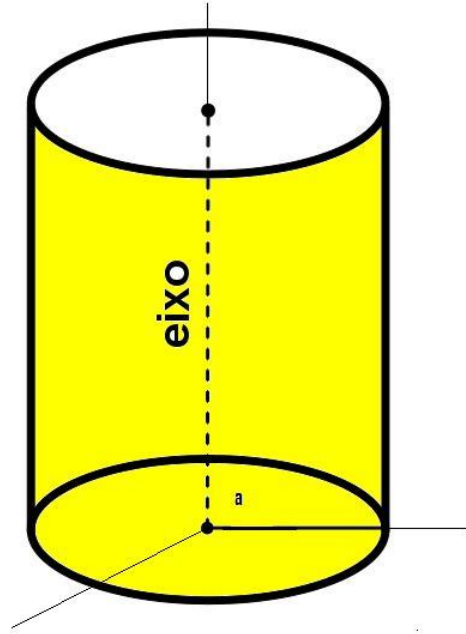
2) $\mathcal{S}$: gráfico de $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in D$ e $f(x, y)$ de classe C^1 em D



Uma parametrização natural (ou canônica) de $\mathcal{S} = G_f$ (gráfico de f) é dada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \text{ com } (x, y) \in D$$

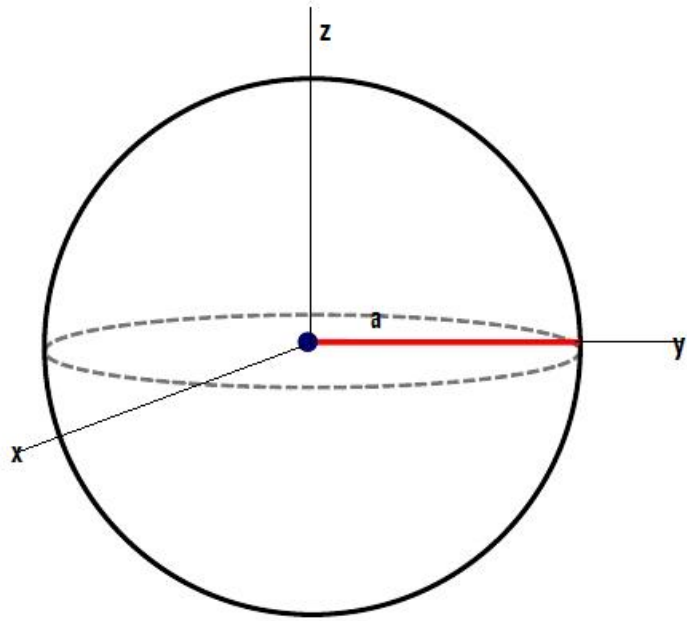
3) Cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$



Utilizamos as coordenadas cilíndricas para parametrizar um cilindro de raio a . Tem-se:

$$\varphi(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z) \text{ com } (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

4) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$



Utilizamos as coordenadas esféricas para parametrizar a esfera de raio a . Tem-se:

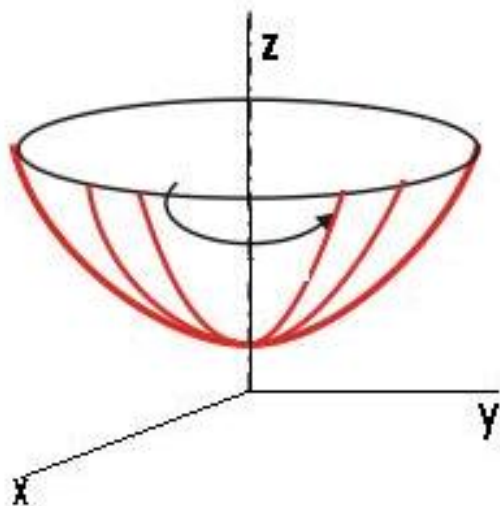
$$\varphi(\theta, \phi) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

$$\text{com } (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \phi]$$

5) Superfícies de revolução

Considere a superfície S obtida girando-se a curva $\mathcal{C}$, no plano xz , em torno do eixo z . Se $\mathcal{C}$ tem equações paramétricas

$$r(t) = (x(t), z(t)), \quad t \in [a, b] \text{ e } x(t) \geq 0; \quad \forall t \in [a, b]$$



então, a superfície de revolução S assim gerada tem uma parametrização dada por:

$$\varphi(\theta, t) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)) \text{ com } (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$$

Exercícios I Parametrize as superfícies:

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z < 4\}$

2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 < z < 4\}$

3. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0\}$

4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16, -1 < z < 3\}$

5. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z < 9\}$

6. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, -1 < z < 4\}$

7. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\}$

8. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, -3 < x < 0\}$

9. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9 - z, 0 < z < 5, x < 0\}$

$$10. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, -4 < z < 0, y < x, x > 0\}$$

$$11. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, -2 < z < 3, y < 0\}$$

$$12. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x < 0, y < 0, z < 0\}$$

$$13. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x < 0, y < 0, z < 0\}$$

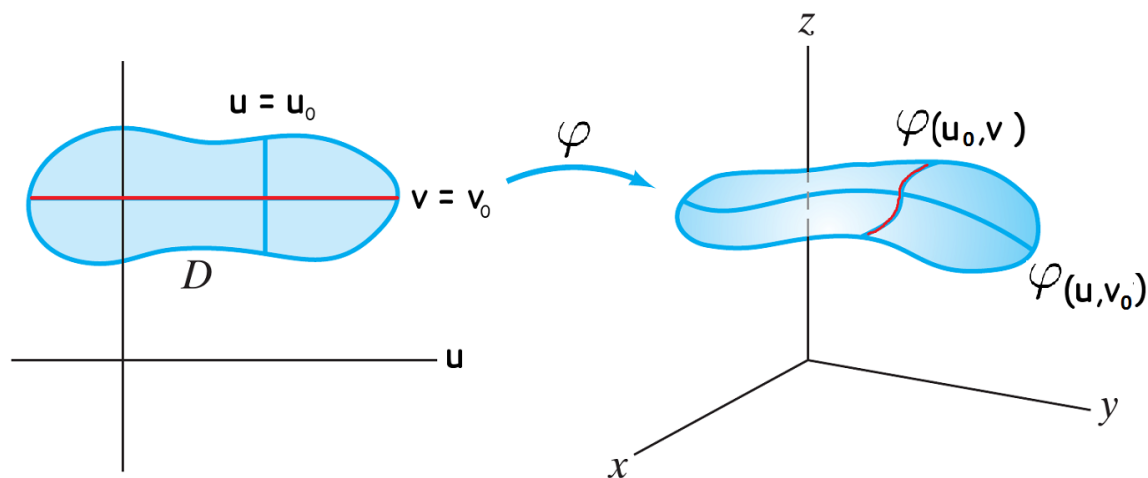
$$14. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x > 0, y > 0, z < 0\}$$

Vetor normal e plano tangente :

Seja S uma superfície parametrizada por

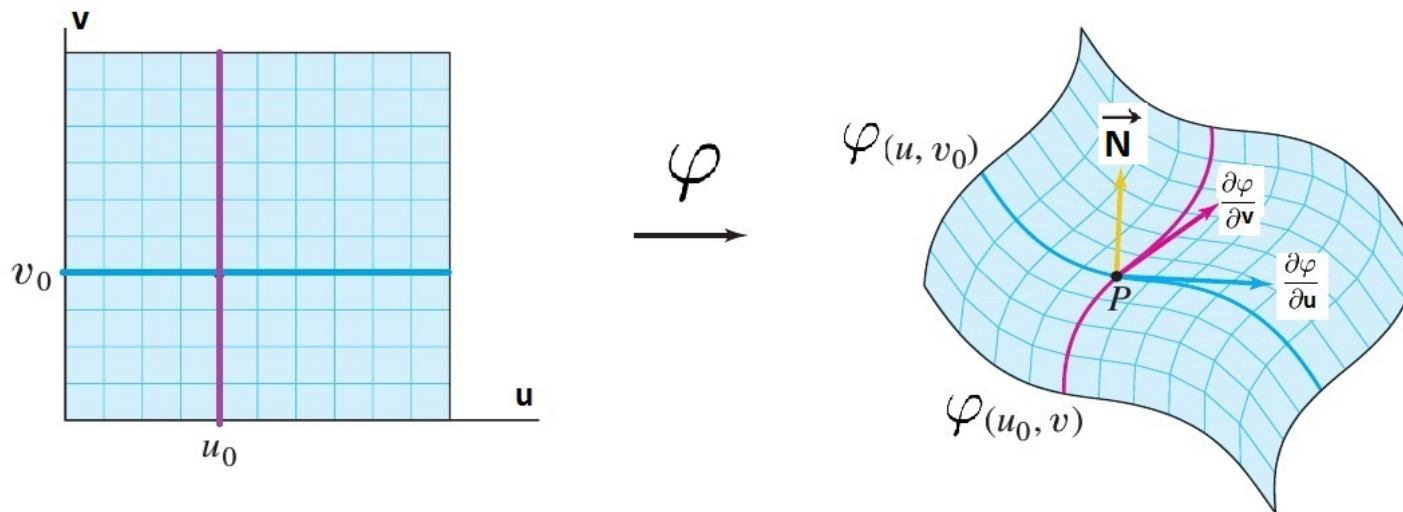
$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

de classe $C^1(D)$.



Um **vetor normal** à superfície S num ponto

$$P(a, b, c) = \varphi(u_0, v_0) \in S$$



é dado por

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

(desde que o vetor $\vec{N}(u_0, v_0)$ seja não nulo.) Ao vetor anterior chama-se **vetor produto fundamental**. **Notas:**

1. $\vec{N} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$ é normal à superfície mas é **unitário**.
2. O vetor $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ também é normal a S mas tem **sentido oposto**.
3. Uma superfície com vetor normal (não nulo) em todos os pontos diz-se **regular** (não apresenta regiões pontiagudas).

4. Equação cartesiana do **plano** que passa no ponto (a, b, c) com vetor normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$n_1(x - a) + n_2(y - b) + n_3(z - c) = 0$$

Exercícios

1. Determine a equação do plano tangente ao parabolóide parametrizado por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ no ponto $(1, 2, 5)$.
2. Determine as equações dos planos tangentes ao parabolóide dado pela equação

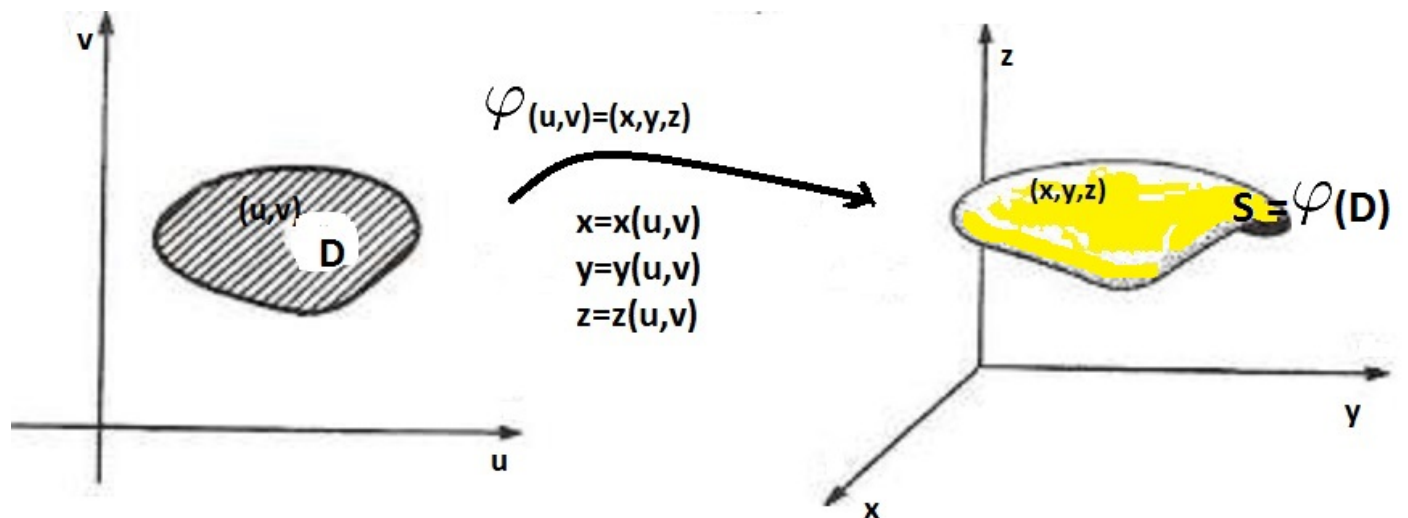
$$x^2 + y^2 = 4 - z$$

nos pontos $(0, 0, 4)$ e $(-1, 1, 2)$.

No restante deste capítulo consideraremos apenas superfícies que são imagens de funções

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



tais que:

- D é um conjunto limitado e fechado do plano.
- φ é injetora, exceto possivelmente na fronteira de D .
- A superfície é regular, exceto possivelmente num número finito de pontos.

Área de superfícies:

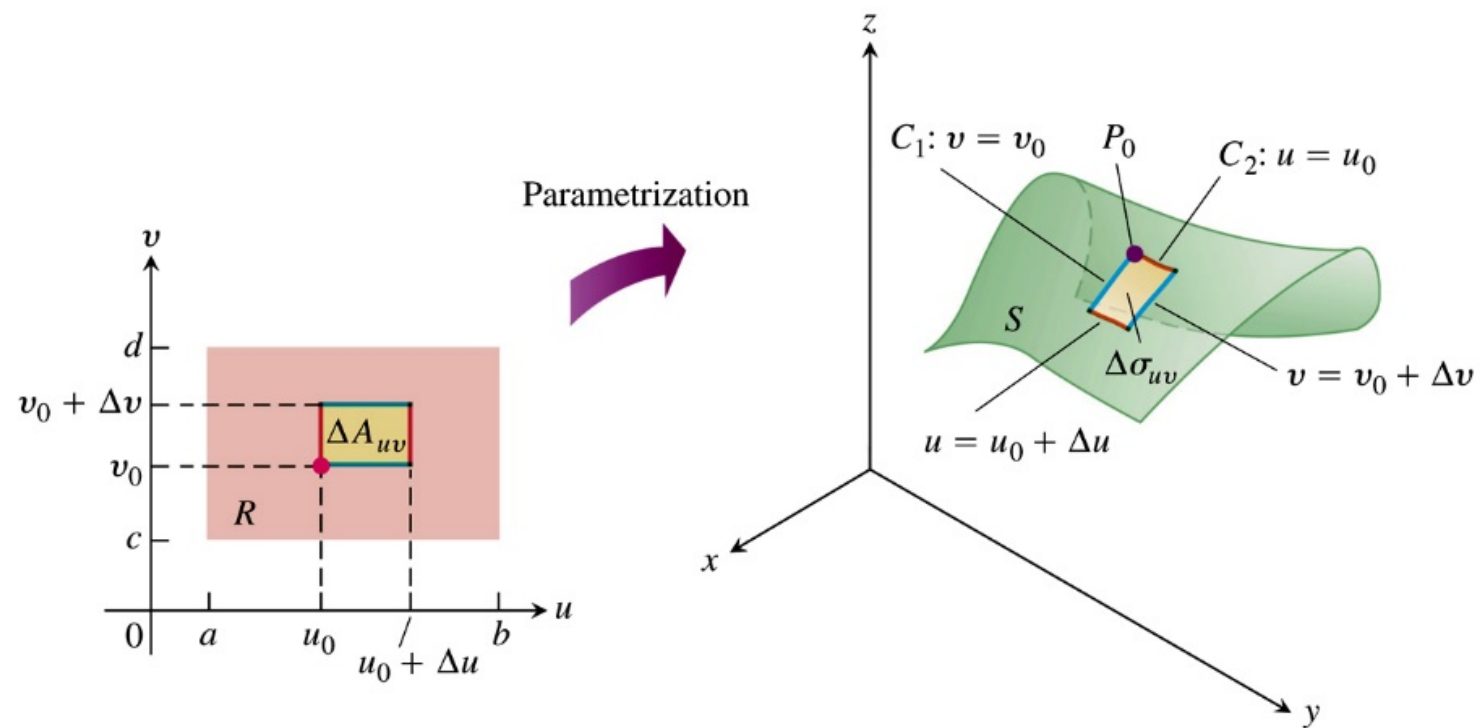
Definição: Seja $\mathcal{S}$ uma superfície parametrizada por

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

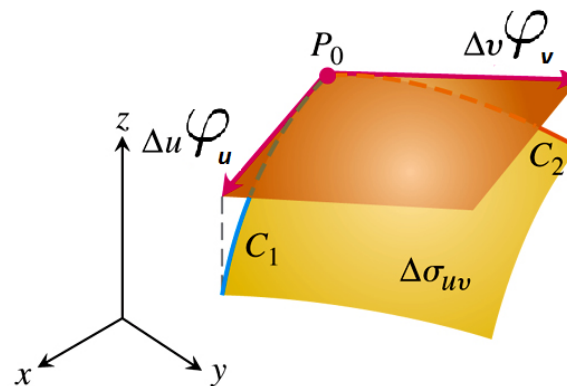
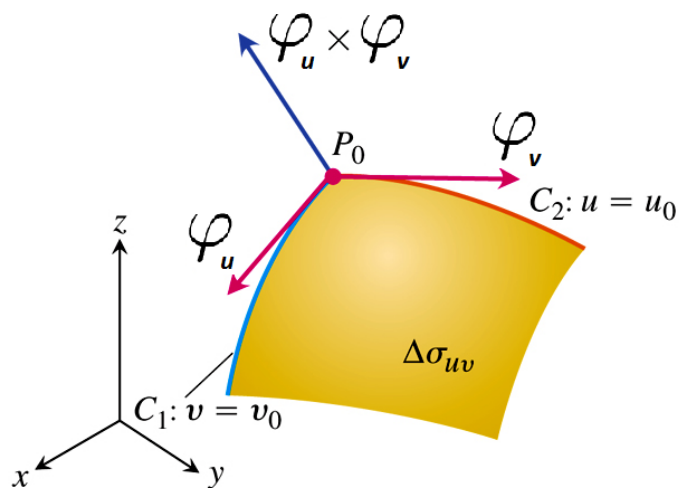
$$(u, v) \longrightarrow \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Definimos a área $A(\mathcal{S})$ de f pela fórmula

$$A(s) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$



$$A(S) = \sum \Delta \sigma_{uv}$$



$$A(\mathcal{S}) = \sum \Delta\sigma_{uv} \approx \sum \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u \Delta v$$

Se $\varphi \in C^1(D)$, então:

$$A(s) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

Exercícios I

1. Calcule a área da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 4 \right\}$$

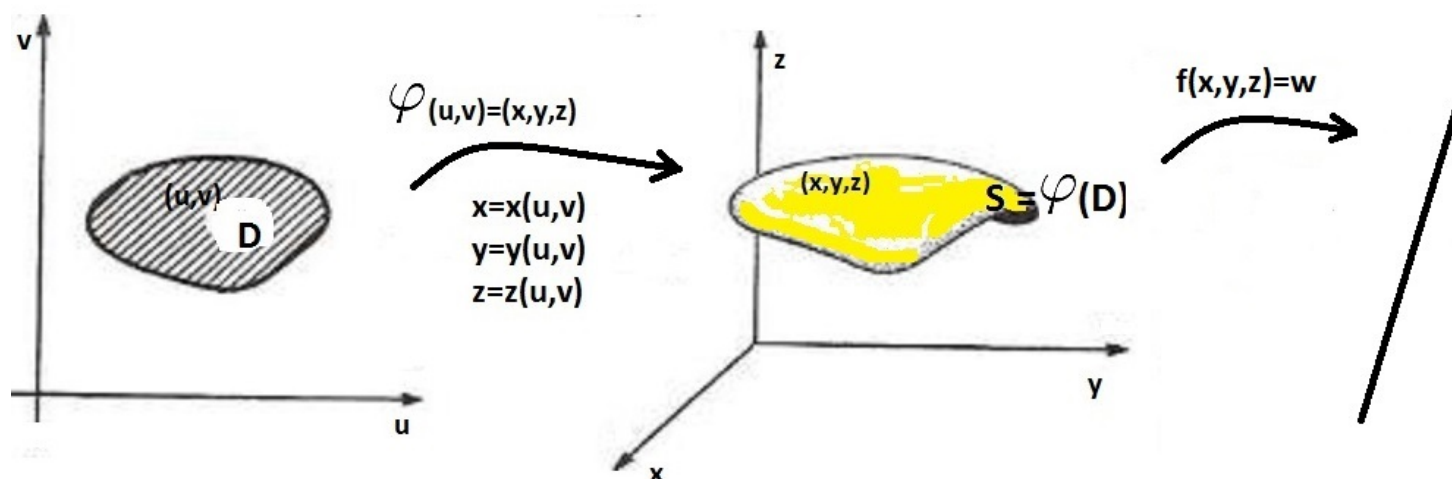
$$R: \frac{\pi}{6}(\sqrt{17}^3 - 1)$$

2. Verifique que a área da superfície de uma esfera unitária é 4π .

Sug: Use coordenadas esféricas.

Integral de superfície de campo escalar

Seja $S \equiv \varphi(D)$ uma superfície, $\varphi \in C^1(D)$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar limitado com $S \subset \Omega$.



Define-se o **integral de superfície de f sobre S** como:

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv$$

onde $dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$ é o elemento de área.

Obs:

- Se $f(x, y, z) = 1$ em S , então:

$$\iint_S 1 ds = \iint_S ds = A(S)$$

- O integral de superfície de campo escalar não depende da parametrização.
- Se S e S_1 são duas superfícies que apenas diferem num número finito de linhas, então:

$$\iint_S f ds = \iint_{S_1} f ds$$

- Se $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$, então

$$\iint_{\mathcal{S}} f \, ds = \sum_{i=1}^n \iint_{\mathcal{S}_i} f \, ds$$

Exercícios II

1. Calcule $\iint_S f \, ds$ sendo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

R: $6\sqrt{2}\pi$

2. Calcule $\iint_S (x + z) \, ds$ onde S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ e $x = 4$ contida no 1º octante. R: $12\pi + 36$

3. Calcule $\iint_S f \, ds$ sendo $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \right\}.$$

$$\text{R: } \frac{65^{\frac{3}{2}} - 17^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Aplicações à Física

- Se $\rho(x, y, z)$ é contínua e positiva em $\mathcal{S}$, e representa a densidade superficial de massa (massa por unidade de superfície), então a massa M de $\mathcal{S}$ é dada por:

$$M(\mathcal{S}) = \int \int_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \, d\mathcal{S}$$

- O **centro de massa** do sólido $\mathcal{S}$ é $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ onde

$$\bar{x} = \frac{\int \int_{\mathcal{S}} x \rho(x, y, z) \, d\mathcal{S}}{M(\mathcal{S})}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \int_{\mathcal{S}} y \rho(x, y, z) \, d\mathcal{S}}{M(\mathcal{S})}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \int_{\mathcal{S}} z \rho(x, y, z) \, d\mathcal{S}}{M(\mathcal{S})}$$

- A **carga eléctrica** num sólido $\mathcal{S}$ é dada por

$$\int \int_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \, d\mathcal{S}$$

onde $\rho(x, y, z)$ é a função que indica a densidade da carga em cada ponto.

- O **momento de inércia** em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \int \int_{\mathcal{S}} r^2(x, y, z) \rho(x, y, z) \, d\mathcal{S}$$

onde $r(x, y, z) =$ distância de (x, y, z) ao eixo L .

Se eixo $L =$ eixo z , então $I_z = \int \int_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$

Se eixo $L =$ eixo y , então $I_z = \int \int_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

Se eixo $L =$ eixo x , então $I_z = \int \int_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$