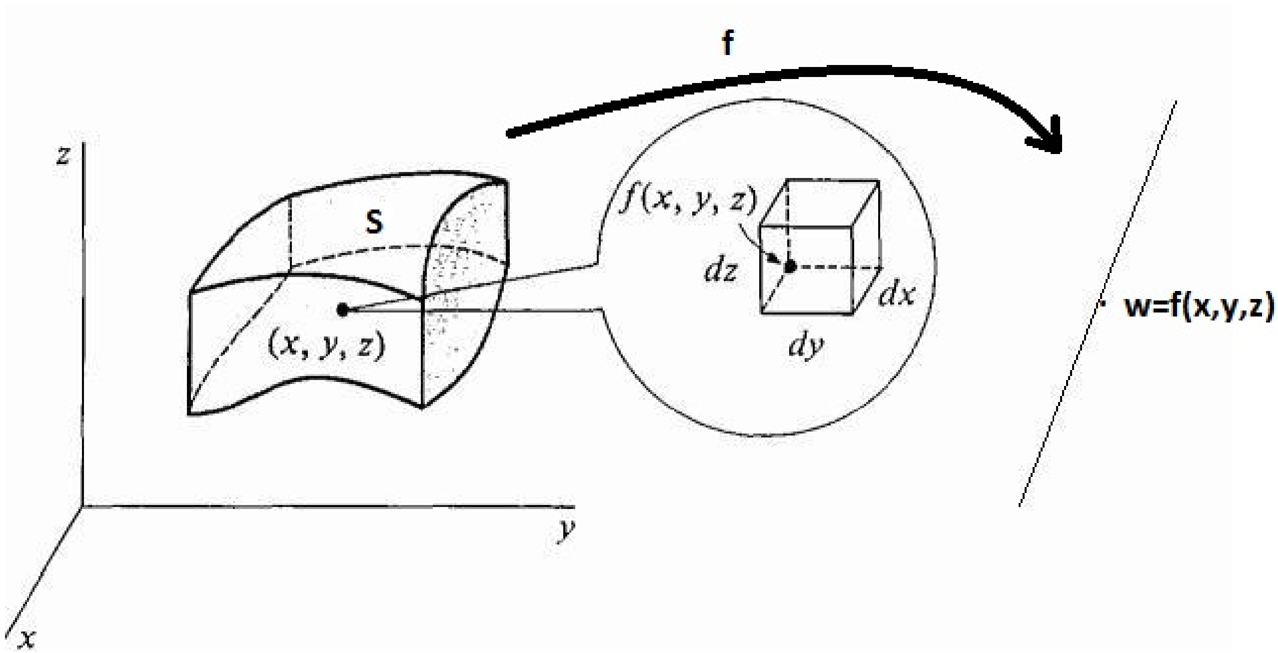
Integral tripla de Riemann



Definimos a soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

chamada como soma de Riemann de f sobre $\mathcal{S}$.

Definição: Se a sequencia $\{S_n\}$ das somas de Riemann da função f converge quando n tende para $+\infty$ e este limite é independente da escolha dos pontos $(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k)$ nos subparalelepípedo

$$R_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

então, dizemos que f **é integravel na região** $\mathcal{S}$ e escrevemos:

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Obs: A integral tripla de f sobre o sólido $\mathcal{S}$ às vezes é indicada pelas seguintes expresões:

$$\int\int\int_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\ dV \text{ ou } \int\int\int_{\mathcal{S}} f\ dV$$

Teorema 1: Toda função contínua definida numa região fechada e limitada $S \subset \mathbb{R}^3$ é integrável sobre $\mathcal{S}$.

Teorema 2: Seja $\mathcal{S}$ uma região fechada e limitada do espaço ($\mathbb{R}^3$). Se f é contínua, exceto num conjunto de volume nulo, então f é integrável em $\mathcal{S}$.

Obs: conjuntos de volume nulo no espaço: pontos, curvas e superficies.

Propriedades: Sejam f e g funções integráveis sobre o sólido $\mathcal{S}$ e λ constante real.

- Então $f + \lambda g$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\iiint\limits_{\mathcal{S}} f + \lambda g \; dV = \iiint\limits_{\mathcal{S}} f \; dV + \lambda \iiint\limits_{\mathcal{S}} g \; dV$$

- Se $f(x,y,z) \geq g(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathcal{S}$ então

$$\iiint\limits_{\mathcal{S}} f \; dV \geq \iiint\limits_{\mathcal{S}} g \; dV$$

-
$$\left| \iiint\limits_{\mathcal{S}} f \; dA \right| \leq \iiint\limits_{\mathcal{S}} |f| \; dV$$

- Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ dois sólidos de $\mathbb{R}^3$: $int(\mathcal{S}_1) \cap int(\mathcal{S}_2) = \emptyset$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ então
$$\iiint\limits_{\mathsf{S}} f \; dV = \iiint\limits_{\mathcal{S}_1} f \; dV + \iiint\limits_{\mathcal{S}_2} f \; dV$$

- Se $f(x, y, z) = 1$ em $\mathcal{S}$, então:

$$\text{volume de } (\mathcal{S}) = \iiint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{1}\ dV$$

- Se $\rho(x,y,z)$ é contínua e positiva em $\mathcal{S}$, e representa a densidade volumétrica de massa (massa por unidade de volume), então a massa M de $\mathcal{S}$ é dada por:

$$M(\mathcal{S}) = \iiint\limits_{\mathsf{S}} \rho(x,y,z)\ dV$$

- O **centro de massa** do sólido $\mathcal{S}$ é $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ onde

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iiint_{\mathsf{S}} x\rho(x,y,z)\ dV}{M(\mathcal{S})}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iiint_{\mathsf{S}} y\rho(x,y,z)\ dV}{M(\mathcal{S})}$$

$$\overline{z} = \frac{\displaystyle\iiint_{\mathsf{S}} z\rho(x,y,z)\ dV}{M(\mathcal{S})}$$

- A **carga eléctrica** num sólido $\mathcal{S}$ é dada por

$$\iint\!\!\int_{\mathrm{S}} \rho(x, y, z)\ dV$$

onde $\rho(x, y, z)$ é a função que indica a densidade da carga em cada ponto.

- O **momento de inércia** em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \iint\!\!\int_{\mathrm{S}} r^2(x, y, z)\rho(x, y, z)\ dV$$

onde $r(x, y, z) =$ distância de (x, y, z) ao eixo L.

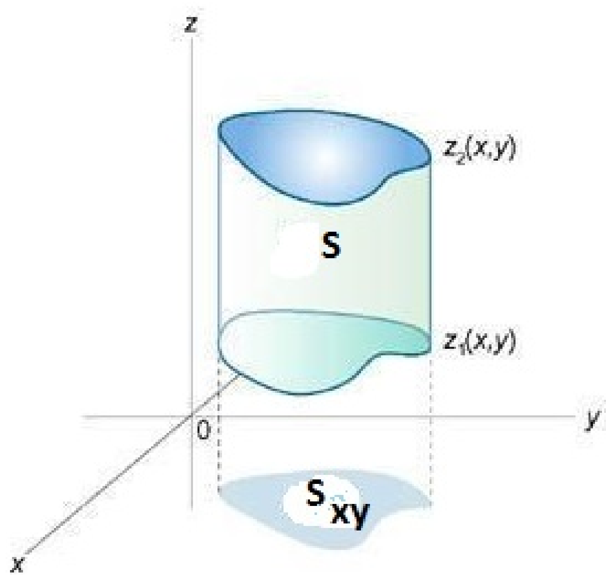
Se eixo $L =$ eixo z, então $I_z = \displaystyle\iiint_{S} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$

Se eixo $L =$ eixo y, então $I_z = \displaystyle\iiint_{S} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$

Se eixo $L =$ eixo x, então $I_z = \displaystyle\iiint_{S} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$

Redução do Cálculo de uma Integral Tripla a uma Integral Dupla: Observamos que o domínio de integração $\mathcal{S}$ pode ser descrito por:

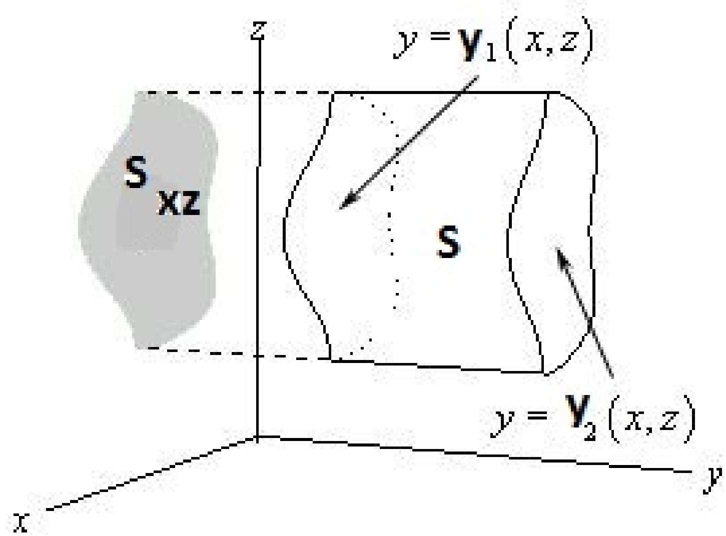
$$\mathcal{S} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in \mathcal{S}_{xy} \text{ e } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\Big\}$$



onde $\mathcal{S}_{xy} = Proj_{xy}^{\mathcal{S}}$(projeção de $\mathcal{S}$ sobre o plano xy) e

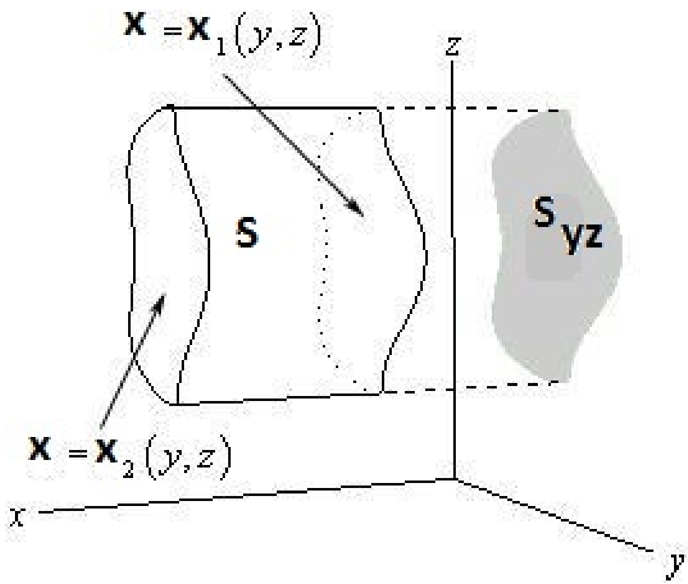
$z_1(x,y),\ z_2(x,y)$ funções continuas;

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,z) \in \mathcal{S}_{xz} \text{ e } y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z)\right\}$$



onde $\mathcal{S}_{xz} = Proj_{xz}^{\mathcal{S}}$(projeção de $\mathcal{S}$ sobre o plano xz) e $y_1(x,z),\ y_2(x,z)$ funções continuas;

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (y, z) \in \mathcal{S}_{yz} \text{ e } x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z) \right\}$$



onde $\mathcal{S}_{yz} = Proj^{\mathcal{S}}_{yz}$(projeção de $\mathcal{S}$ sobre o plano yz) e $x_1(yz)$, $x_2(y,z)$ funções continuas;

Prova-se

$$\iiint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iint\limits_{\mathcal{S}_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dx\ dy;$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iint\limits_{\mathcal{S}_{xz}} \left[\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dx\ dz;$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iint\limits_{\mathcal{S}_{yz}} \left[\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dy\ dz;$$