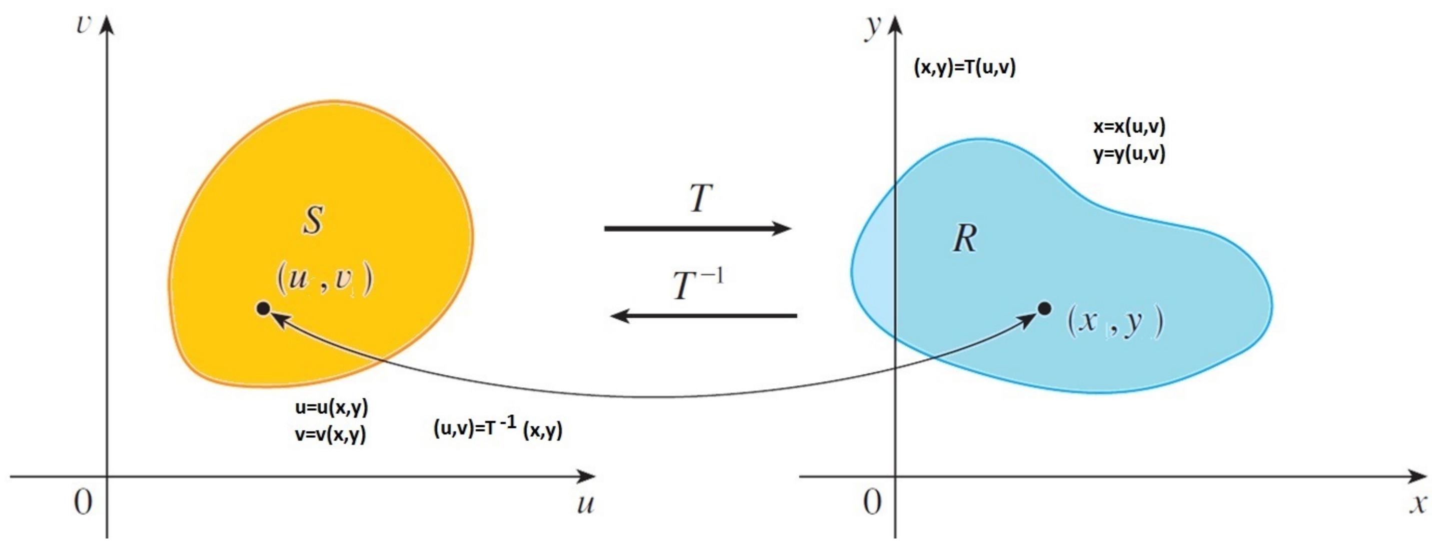
Mudança de variáveis

Para mudar das coordenadas (x, y) para (u, v), usando a função bijectiva



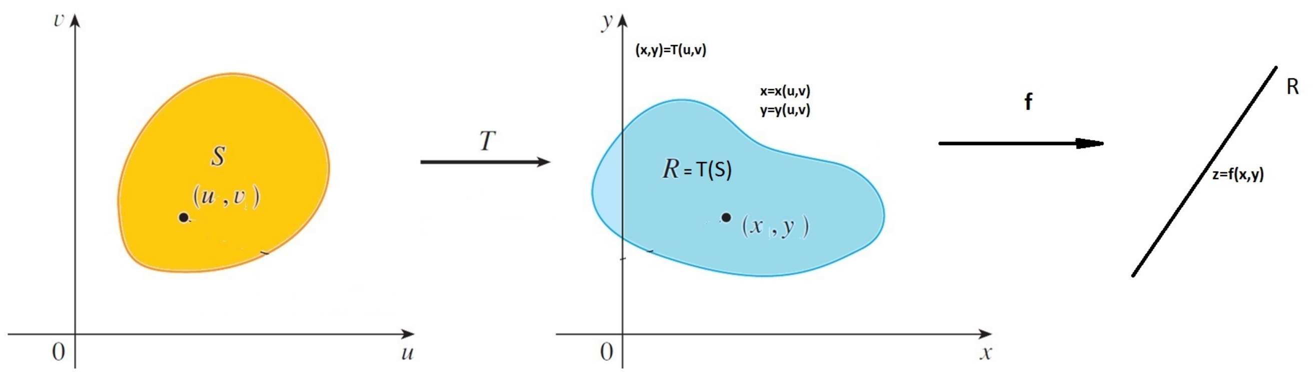
Teorema: Considere T uma aplicação definida por:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

onde x, e y são funções de classe C^1 num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja S um subconjunto limitado e fechado contido em U tal que:

- T é injetora em S.
- Suponhamos que o jacobiano de T, $J_T(u,v)$ seja diferente de 0 em S, isto é,

$$J = J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = Det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq 0$$



Se f é integrável em $T(S)$ então

$$\int\int_R f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_S f(x(u,v),y(u,v)).\,|J|\ du\ dv$$

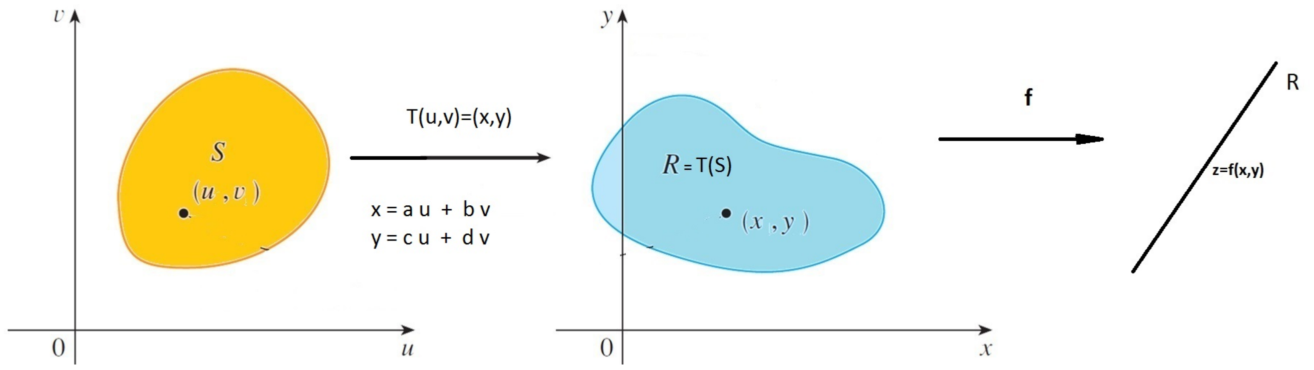
OBS.: Pelo teorema da função inversa, o jacobiano de T^{-1} é dado por

$$J_{T^{-1}}(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = Det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \frac{1}{J_T(u,v)}$$

OBS.: O resultado do teorema acima ainda é válida se $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0$ ou T deixa de ser injetora em subconjuntos de S de área nula.

CASOS ESPECIAIS DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS

(i) Mudança linear.



onde a, b, c e d são constantes reais.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = Det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{2\times 2} = ad - bc$$

Se $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ e f continua em R, então:

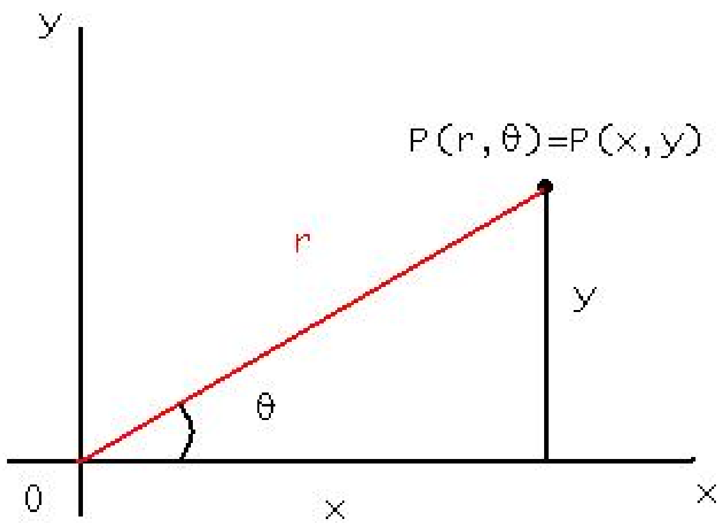
$$\iint\limits_{R} f(x,y)\ dx\ dy = |ad-bc| \iint\limits_{S} f(au+bv, cu+dv)\ du\ dv.$$

Exemplo: Cálcule

$$I = \iint\limits_{R} \frac{e^{y-x}}{e^{y+x}} dxdy,$$

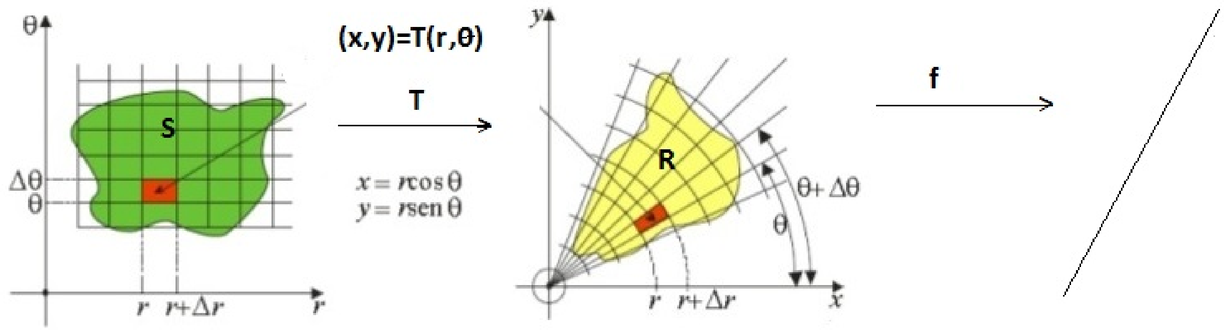
onde R é a região triangular limitada pela reta $x+y=2$ e os eixos coordenados.

(ii) Mudança em coordenadas polares.



Tem-se a seguinte relação entre coordenadas cartesianas (x, y) e polares (r, θ)

$$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r \text{ sen } \theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right.$$



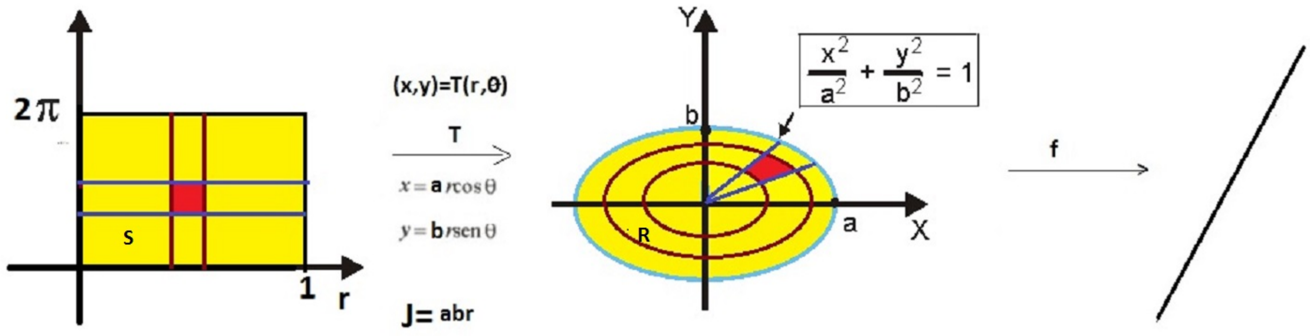
onde

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = Det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{2\times 2} = r$$

Se $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \neq 0$ e f continua em R, então:

$$\int\int_{R} f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_{S} f(r\cos\theta, r\text{sen }\theta) r\ dr\ d\theta$$

(iii) Mudança em coordenadas polares.



Tem-se a seguinte relação entre coordenadas cartesianas (x, y) e polares (r, θ)

$$\begin{cases} x = a\,r\cos\theta \\ y = b\,r\,\mathrm{sen}\;\theta \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = Det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{2\times 2} = a\ b\ r$$

Se $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \neq 0$ e f continua em R, então:

$$\int\int_R f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_S f(ar\cos\theta, br\,\mathrm{sen}\ \theta) a\ b\ r\ dr\ d\theta$$