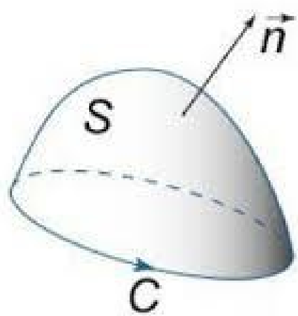
Teorema de Stokes

Uma extensão importante do teorema de green é o teorema de stokes, que relaciona a integral de linha de um campo vetorial $\vec{F}$ ao longo de uma curva fechada $\mathcal{C}$ no $\mathbb{R}^3$ com a integral sobre uma superficie $\mathcal{S}$, onde $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$.



$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\ \textbf{?}\ )\, dS$$

Antes, faz-se necessário introduzir as seguintes definições.

Definição: Uma curva fechada $\mathcal{C}$ é chamada de **simples** se ela não tem interseção com ela mesma.

Definição: Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial com derivadas parciais definidas num subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$. O **campo vetorial rotacional** de $\vec{F}$, denotado por $rot(\vec{F})$, é definido por:

$$\begin{aligned} rot(\vec{F}) &= \nabla \times \vec{F} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Teorema .1 (Stokes) *Considerem-se:*

- *S uma superfície orientável, parametrizada por:* $\varphi(u,v)$, $(u,v) \in D$ *com* φ *de classe* C^2 *num aberto que contenha* $D \cup \partial D$;

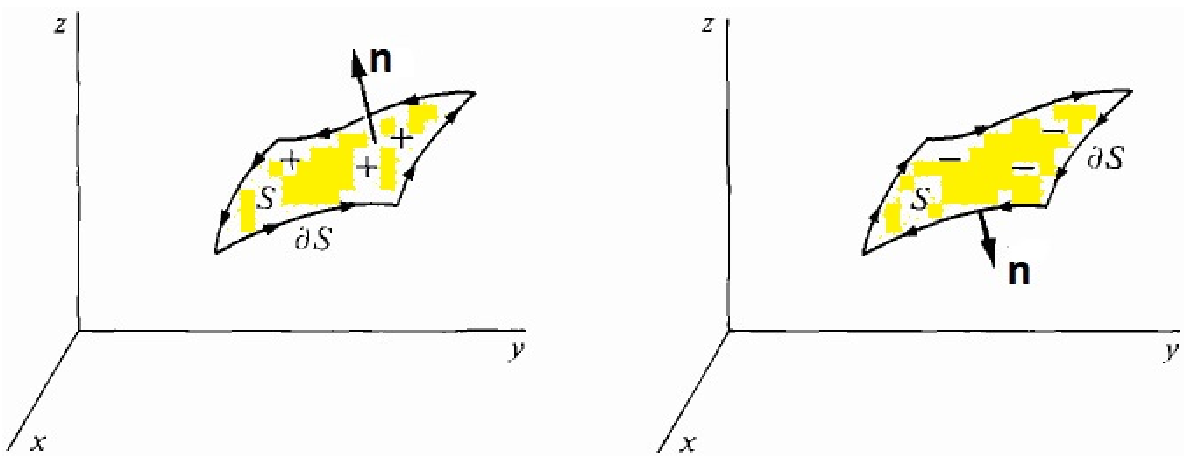
- ∂S *uma linha seccionalmente regular que é bordo de* S, *onde* $\varphi(\partial D)$=∂S.

- $\vec{n}$ *um vector unitário normal* S *com sentido em concordância com o sentido do* ∂S *segundo a "Regra da mão direita".*

- $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 num aberto que contenha $S \cup \partial S$.

Então:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot dr = \iint_S \left[rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} \right] \; dS$$



O teorema a seguir, caracteriza os campos vetoriais de $\mathbb{R}^3$ que são campos gradientes.

Teorema .2 (Teorema das quatro equivalencias) *Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^3$, exceto possivelmente em um número finito de pontos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot dr = 0$, *qualquer que seja a curva fechada $\mathcal{C}$, C^1 por partes, contida em Ω.*

2. *A integral de linha de $\vec{F}$ do ponto A até o ponto B independe da curva C^1 por partes , que liga A a B.*

3. $\vec{F}$ *é um campo gradiente de alguma função potencial* f*, isto é,* $\nabla f = \vec{F}$.

4. $rot(\vec{F}) = \vec{0}$*, isto é,*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}.$$

Exercicios:

1. Verifique o Teorema de Stokes sendo

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z, \ z \leq 4\right\}$$

e $\vec{F}(x, y, z) = (1, 0, 1 - x)$.
(Use a parametrização em coordenadas cartesianas e polares.) R:4π

2. Usando o T. Stokes calcule $\displaystyle\int\!\!\int_S rot(\vec{F}) \cdot dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = (x + 1, 0, 0)$ e S a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2, \ 0 \leq z \leq 9\right\}$$

que tem orientação dada pela normal que tem a componente em z negativa.
R:0

3. Usando o T. Stokes, calcule o trabalho realizado no deslocamento de um ponto material ao longo do bordo de S, percorrido uma só vez, no sentido direto por acção de $\vec{G}(x,y,z) = (0,x,0)$, sendo
$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2=9, \; x+y+z=4\Big\}$$

4. Sejam
$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2=1, \; z \geq 0\Big\}$$

e $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,1)$. Usando o T. Stokes, calcule o fluxo de $rot(\vec{F})$, através de S no sentido da normal com a terceira componente positiva.
R:2π

5. Calcule o fluxo de $rot(\vec{F})$ sendo $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ através de

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ -1 < z < 2\Big\}$$

segundo a normal que tem a componente em z negativa.
R:0

6. Usando o T. Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,x)$ ao longo da parte da linha

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1, \; z = 1\right\}$$

com origem em (1,0,1), extremidade em (0,-1,1) e que passa por (0,1,1).

7. Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $z + y = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

8. Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} ydx + zdy + xdz$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

9. Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} 2xydx + [(1-y)z + x^2 + x]dy + (\frac{x^2}{2} + e^z)dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y-1)^2$.

10. Considere a superficie

$$S = \{(x, y, z) \in^3, \ \ z = \sqrt{x^2 + y^2}; \ \ 1 \leq z \leq 3\}$$

Calcule:

$$\int\int_{\mathsf{S}} rot(\vec{F}) \cdot ds$$

onde $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -xz, z^3)$.